BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

28260 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL,
GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, MANSION, MOLK,
POKROVSKY, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXIV. — ANNÉE 1900.

(TOME XXXV DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1900

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

W. DE TANNENBERG. — SUR LES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL. — 1 Vol. in-8°, 192 p. Paris, A. Hermann; 1899.

Le Volume que vient de faire paraître M. de Tannenberg, sous un titre modeste, contient toutes les notions qui sont nécessaires à ceux qui veulent entreprendre une étude approfondie de la théorie des courbes et des surfaces : il a le grand mérite d'une extrême clarté; les propositions qu'il renferme sont très nombreuses, malgré son petit nombre de pages, et cependant leur abondance n'est pas une cause de fatigue pour l'esprit, parce qu'elles se présentent de la façon la plus naturelle, et que leur démonstration est simple, en même temps que rigoureuse.

M. de Tannenberg fait naturellement porter son étude sur les lignes courbes et les surfaces dont les points ont des coordonnées cartésiennes développables en séries entières, ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable ou de deux variables indépendantes. Son Ouvrage est fort judicieusement divisé en cinq Parties : les deux premières sont consacrées aux propriétés descriptives des courbes et des surfaces, la troisième aux propriétés métriques des lignes, la quatrième aux propriétés mé-

triques des surfaces réglées, la cinquième, enfin, aux propriétés métriques des surfaces courbes.

Dans les deux premières Parties, l'auteur définit la tangente et le plan osculateur à une courbe, le plan tangent à une surface, les enveloppes de droites et, plus généralement, de courbes dépendant d'un paramètre, les enveloppes de surfaces à un ou deux paramètres; enfin, il indique les notions fondamentales relatives aux congruences et complexes de droites.

Dans la troisième Partie, les formules relatives au trièdre trirectangle fondamental attaché à une courbe reçoivent leur complet développement et donnent lieu à d'intéressantes applications. Celles-ci se continuent naturellement dans la quatrième Partie, consacrée aux propriétés métriques des surfaces gauches et développables.

La cinquième Partie est la plus importante. On y trouve d'abord la définition des six fonctions caractéristiques d'une surface et les relations fondamentales qui existent entre ces fonctions; les propriétés infinitésimales des courbes tracées sur une surface viennent ensuite; l'étude des lignes asymptotiques et des lignes de courbure d'une surface, celle des lignes géodésiques et des congruences de normales forment des applications immédiates des théories générales précédemment exposées. H. A.

STOLZ (O.). — GRUNDZÜGE DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG. Dritter Theil : *Die Lehre von den Doppelintegralen.* Eine Ergänzung zum ersten Theil des Werkes. 1 Vol. in-8°, VIII-296 p. Leipzig, Teubner; 1899.

Il est à peu près inutile de dire que l'on trouvera dans ses Leçons sur les intégrales doubles, comme dans les Leçons qui précédaient, ce souci de la parfaite rigueur qui distingue en général les écrits de M. O. Stolz : non seulement M. Stolz cherche la rigueur, mais il cherche aussi à donner aux conditions sous lesquelles les théorèmes qu'il établit sont vrais, toute l'extension dont ces théorèmes sont susceptibles. Sans doute, cette dernière recherche est moins indispensable que la rigueur, et l'on conçoit des enseignements où l'on s'en passe, pour aller plus vite et habi-

tuer plus tôt les étudiants au maniement de l'outil qu'on leur met entre les mains; toutefois, l'esprit n'est pleinement satisfait que lorsque cette recherche a abouti, et l'enseignement des propositions à la vérité desquelles il est impossible d'assigner des conditions nécessaires et suffisantes a évidemment un caractère d'autant plus scientifique que les conditions suffisantes sont plus larges : le bénéfice est entier si la plus grande extension obtenue dans ces conditions n'alourdit ni l'énoncé ni la démonstration.

Parmi les travaux qu'il a utilisés pour son exposition et qu'il cite tous avec grand soin, M. Stolz signale particulièrement le Mémoire que M. de la Vallée-Poussin a publié en 1892, dans le *Journal de Crelle,* et où il s'est occupé de la transformation des intégrales doubles impropres en deux intégrales simples.

Le présent Volume contient quatre sections. La première se rapporte aux intégrales définies doubles, prises entre des limites fixes, considérées comme le résultat de deux intégrations successives; les propositions concernant l'intégration et la différentiation sous le signe $\int$ y trouvent leur place, et le cas où la quantité sous le signe $\int$ devient infinie y est étudié avec soin, ainsi que le cas des limites infinies.

Dans la seconde section, l'auteur traite de l'intégrale double en elle-même et en donne la définition comme limite de somme, analogue à la définition classique de l'intégrale simple. La notion de domaine d'intégration (*Bereich*) qui se substitue alors à celle de l'intervalle entre les limites, entraîne quelques longueurs, si l'on veut définir abstraitement ce qu'est un contour, l'intérieur d'un contour, le sens dans lequel on parcourt ce contour, etc.; M. Stolz évite ces longueurs en faisant un légitime appel à l'intuition géométrique. Cette notion admise et la décomposition de l'aire en petites parties une fois expliquée, les notions d'intégrale supérieure et inférieure s'introduisent naturellement, ainsi que les conditions d'existence d'une véritable intégrale double.

L'auteur montre ensuite comment une telle intégrale se ramène à deux intégrales simples, traite du théorème de Green et du changement de variables. Tout ceci concerne les intégrales *propres,* c'est-à-dire portant sur des fonctions qui restent limitées dans une aire qui est elle-même limitée. Les intégrales *impropres* sont approfondies dans la section suivante.

La dernière section, enfin, se rapporte aux applications géométriques; il convient de signaler en particulier le soin avec lequel l'auteur définit l'aire d'une portion de surface courbe.

Le Livre se termine par un Appendice à la première Partie, relatif aux ensembles de points, aux intégrales supérieure et inférieure d'une fonction d'une variable, et à la notion générale d'intégrale définie (simple) absolument convergente pour un intervalle fini.

M. Stolz a enrichi son exposition d'un assez grand nombre d'exemples, bien choisis pour en éclairer les points principaux.

J. T.

Alois WALTER. — Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung. In-8°, viii-74 p. Leipzig, Teubner; 1898.

Dans ce petit Volume, M. Walter s'est proposé de traiter complètement le problème de la réfraction atmosphérique terrestre, dont la réfraction astronomique n'est qu'un cas particulier : ce qui caractérise sa méthode, c'est la distinction qu'il établit tout d'abord entre la mise en œuvre des données purement géométriques du problème et celle des données physiques et météorologiques.

Dans la première Partie de son Ouvrage, après avoir admis la loi de la réfraction de la lumière et l'identité des conditions physiques de l'atmosphère en des points d'égale altitude, l'auteur établit un certain nombre de développements en séries de puissances, permettant de résoudre toutes les questions relatives à la réfraction, indépendamment de toute hypothèse faite sur la loi de variation de l'indice avec l'altitude : les formules ainsi obtenues renferment naturellement des coefficients purement numériques indéterminés, appelés les *coefficients de réfraction*, et le premier d'entre eux joue un rôle prépondérant, qu'il est facile de mettre en évidence. Des applications à des cas particuliers montrent bien l'importance des résultats acquis par cette voie très simple.

Dans la seconde Partie, M. Walter ramène la détermination des coefficients de réfraction à celle de la loi de variation de la température avec l'altitude, et discute les principales hypothèses faites sur cette loi jusqu'à maintenant. En particulier, il étudie le pre-

mier coefficient de réfraction, et montre comment sa valeur dépend, pour une part essentielle, de la variation que subit la température, quand on s'élève d'un mètre dans l'atmosphère, au lieu d'observation. Ce nouveau nombre dépend des conditions météorologiques réalisées au lieu de l'observation; une série de nombreuses expériences serait nécessaire pour permettre de lui attribuer, selon les circonstances, une valeur déterminée avec quelque certitude.

Le Livre de M. Walter est rédigé avec une grande netteté et renferme de nombreuses indications bibliographiques : la lecture en sera profitable à tous ceux qui s'intéressent à la Géodésie et à l'Astronomie. H. A.

STAHL (H.). — Elliptische Functionen. *Vorlesungen* von Bernhard Riemann. 1 Vol. in-8°, VII-144 p. Leipzig, Teubner; 1899.

Ces Leçons seront les bienvenues : outre le grand intérêt historique qui s'y attache, elles constituent encore un cadre excellent pour l'exposition de la théorie des fonctions elliptiques, et leur brièveté même fait admirablement ressortir tout ce qu'il y a d'essentiel dans cette théorie. On saura certainement gré à M. Hermann Stahl du soin qu'il a apporté à leur publication.

Elles font partie, nous dit-il, d'un Cours que Riemann a fait « sur les fonctions d'une variable complexe, en particulier sur les fonctions elliptiques et abéliennes ». L'illustre géomètre a donné cet enseignement deux fois, sous des formes différentes, d'abord dans les deux semestres de l'année 1855-1856, puis dans les deux semestres de l'année 1861-1862. Dans ce Cours, les Leçons sur les fonctions elliptiques faisaient un tout et pouvaient être facilement séparées. Le texte de Riemann a été, autant que possible, conservé; pour la commodité du lecteur, M. Stahl a dû faire quelques changements de notations, quelques remaniements dans l'ordre des matières; il a enfin introduit une division en cinq sections et vingt-deux paragraphes.

Il a eu à sa disposition des notes et des rédactions de Hattendorf, Prym, Schering, Dedekind; reçu des renseignements de

MM. Klein, Schilling, H. Weber. L'édition que publie M. Hermann Stahl se présente avec les meilleures garanties.

Les Leçons de Riemann, proprement dites, tiennent soixante-douze pages. Elles sont essentiellement fondées sur les propositions de Liouville et la méthode propre de l'auteur pour la représentation des fonctions d'une variable complexe. Sauf l'introduction de cette méthode, elles ne sont pas sans analogie, par leur esprit et leur suite, avec la première édition du Traité de Briot et Bouquet.

Après avoir établi qu'une fonction doublement périodique devient nécessairement infinie dans le parallélogramme des périodes, et montré, par la considération de l'intégrale prise le long de ce parallélogramme, que la somme des résidus est nulle, que le nombre des pôles est égal à celui des zéros, après en avoir conclu la classification des fonctions doublement périodiques d'après leur ordre, Riemann s'occupe des fonctions doublement périodiques du second ordre. Si $\varphi(v)$ est une telle fonction, avec les pôles simples v'_1, v'_2, le fait que la fonction $\varphi(v'_1+v'_2-v)-\varphi(v)$ ne devient pas infinie suffit à montrer que cette fonction est nulle; on déduit de là aisément les zéros de la dérivée, puis l'équation différentielle que vérifie $\varphi(v)$; inversement, une équation du type considéré définit $\varphi(v)$ comme limite supérieure d'une intégrale de première espèce. En même temps, la représentation conforme du parallélogramme des périodes sur le plan conduit de suite à la surface à deux feuillets T, qui, par l'introduction de deux coupures, devient une surface T′ simplement connexe.

Une transformation rationnelle permet de substituer à la relation entre les deux variables z, s

$$A_0 s^2 + 2A_1 s + A_2 = 0,$$

dont les coefficients sont du second degré en z, une relation de la forme normale

$$y = \sqrt{x(1-x)(1-k^2x)} = \sqrt{(x, k)}.$$

La considération de l'intégrale de première espèce conduit immédiatement à la définition des fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, et les intégrales prises le long des coupures de la surface T′ fournissent les modules de périodicité. Riemann se place dans le cas où k^2 est réel, compris entre 0 et 1. Il a maintenant tout ce qu'il

lui faut pour faire la représentation conforme sur le parallélogramme des périodes de la surface T′ et des quatre parties dans lesquelles elle est divisée par les axes des quantités réelles et purement imaginaires.

En observant que la différence

$$\operatorname{sn} u - \frac{\pi i}{k\mathrm{K}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{q^{n+\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}}}{s - q^{2n+1}} \qquad \left(s = e^{\frac{i\pi u}{\mathrm{K}}}\right)$$

reste finie pour toutes les valeurs de u, Riemann est conduit aux formules de décomposition en fractions des fonctions sn, cn, dn, à la représentation de ces fonctions par des séries trigonométriques. En construisant de même une fraction dont le numérateur et le dénominateur soient des produits infinis en s qui admettent pour zéros, l'un les zéros, l'autre les pôles de $\operatorname{sn} u$, il obtient de même les trois fonctions sous formes de quotients de fonctions entières, et c'est ainsi que s'introduisent les fonctions $\mathfrak{I}$ dans sa théorie.

Après avoir établi les propriétés élémentaires de ces fonctions, Riemann montre comment elles permettent l'intégration d'une fonction doublement périodique quelconque, en construisant, au moyen de ces fonctions, de leurs logarithmes et de leurs dérivées, une expression dont la différence avec l'intégrale considérée reste uniforme et continue dans le parallélogramme des périodes et s'augmente de quantités constantes quand on augmente la variable de $2\mathrm{K}$ ou de $2i\mathrm{K}'$. Il est inutile de dire que sa méthode revient à cette décomposition en éléments simples dont M. Hermite a mis en pleine lumière le rôle fondamental. Riemann applique cette méthode à l'intégrale de troisième espèce.

Pour parvenir aux théorèmes d'addition, Riemann observe d'abord la composition de toute fonction doublement périodique admettant les périodes $2\mathrm{K}$, $2i\mathrm{K}'$, au moyen de $x = \operatorname{sn}^2 u$ et de $y = \sqrt{(x, k)}$, ou, ce qui revient au même, de $\operatorname{sn}^2 u$ et de sa dérivée, en particulier, la composition des fonctions paires et des fonctions impaires. Remarquant ensuite que l'on peut déduire aisément une fonction paire ou une fonction impaire d'une fonction doublement périodique quelconque, il applique cette remarque

aux fonctions

$$\frac{\operatorname{sn}(u+v)}{\operatorname{sn} u}, \qquad \frac{\operatorname{cn}(u+v)}{\operatorname{cn} u}, \qquad \frac{\operatorname{dn}(u+v)}{\operatorname{dn} u},$$

et détermine ensuite aisément les formes des fonctions paires et impaires qu'il en déduit, d'où les formules d'addition.

Il pose ensuite le problème de la transformation, montre comment il conduit aux relations linéaires entre les périodes, comment, enfin, il se ramène à la recherche des transformations rationnelles, les deux fonctions ayant une période commune, tandis que les autres diffèrent par un facteur entier. La multiplication est regardée comme un cas particulier.

La dernière Partie des Leçons, tirée d'un autre Cours, est l'esquisse d'une théorie des fonctions doublement périodiques où l'on prendrait pour point de départ les fonctions $\mathfrak{S}$, introduites *a priori :* une telle exposition a, comme l'on sait, été l'objet d'un Cours de Jacobi en 1838. M. Stahl pense, d'après M. Dedekind, que Riemann n'a pas connu directement les Leçons de Jacobi (1) et qu'il a tiré les formules fondamentales du Mémoire de Rosenhain (*Mém. des savants...*, t. IX; 1851). Le nombre de zéros est déduit de la considération de l'intégrale $\int d \log \mathfrak{S}(v)$. Considérant ensuite les fonctions

$$\left[\frac{\mathfrak{S}_1(v)}{\mathfrak{S}(v)}\right]^2, \qquad \left[\frac{\mathfrak{S}_2(v)}{\mathfrak{S}(v)}\right]^2, \qquad \left[\frac{\mathfrak{S}_3(v)}{\mathfrak{S}(v)}\right]^2,$$

dont les périodes sont 1 et τ, qui sont du second ordre et dont on reconnaît de suite les zéros et les pôles, Riemann observe que chacune des fonctions prend une valeur donnée en deux points symétriques par rapport au centre du parallélogramme, et il en conclut aisément qu'elles sont des fonctions linéaires de l'une d'entre elles ; on peut représenter ces fonctions, respectivement multipliées par des constantes convenables a^2, b^2, c^2, par x, $1-x$, $1-k^2x$; la dérivée $\frac{dx}{dv}$ est une fonction doublement périodique du troisième ordre dont on reconnaît aisément les zéros,

(1) *Œuvres*, t. I, p. 501, publiées en 1881.

d'où l'équation différentielle

$$C\frac{dx}{dv} = 2\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)};$$

on aperçoit dès lors le passage aux fonctions de Jacobi et le moyen de déterminer les diverses constantes.

La fonction

$$\log\Theta(u-a) - \log\Theta(u-b),$$

lorsqu'on augmente u de $2K$ ou de $2iK'$, s'augmente d'une quantité constante. On en déduit qu'elle est l'intégrale d'une fonction algébrique de $\operatorname{sn} u$. En partant de là, Riemann obtient aisément la relation

$$\log\Theta(u-a) - \log\Theta(u+a) = \int_0^u \varphi(u)\,du,$$

où

$$\varphi(u) = \frac{C\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2(a+iK')} + C_1;$$

la détermination des constantes C, C_1 le conduit à l'intégrale de troisième espèce $\Pi(u, a)$ et au théorème de l'échange du paramètre et de l'argument. La méthode se généralise de manière à fournir, sous la forme

$$A_1\log\Theta_1(u-a_1) + \ldots + A_m\log\Theta(u-a_m) + Au + B,$$

où l'on suppose nulle la somme $A_1 + \ldots + A_m$, l'intégrale d'une fonction algébrique de $\operatorname{sn}^2 u$ qui n'admet que des pôles simples. Enfin, des considérations analogues permettent d'obtenir l'intégrale de seconde espèce

$$E(u) = \int_0^u \operatorname{dn}^2 u\,du.$$

Riemann s'occupe ensuite de l'équation différentielle linéaire du second ordre que vérifient K et K′, et où la variable indépendante λ est le carré du module. Il en déduit, par une analyse intéressante, la relation

$$\lambda\lambda'\left(K\frac{dK'}{d\lambda'} - K'\frac{dK}{d\lambda}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

où $\lambda' = 1 - \lambda$, puis la relation de Legendre

$$KE' + EK' - KK' = \frac{\pi}{2}.$$

Il obtient enfin les expressions de $\mathfrak{S}_2(0)$, $\mathfrak{S}_3(0)$, $\mathfrak{S}(0)$ au moyen de k et de K en partant de l'équation aux dérivées partielles en v et τ que vérifient les quatre fonctions $\mathfrak{S}$.

Ces leçons ne peuvent manquer d'intéresser les géomètres; mais M. Hermann Stahl a voulu aussi qu'elles pussent servir aux étudiants pour apprendre la théorie des fonctions elliptiques. Il a d'ailleurs échappé à la tentation très naturelle de conserver le cadre de Riemann, en l'élargissant et le remplissant, en y introduisant celles des propositions importantes dont la théorie s'est enrichie depuis Riemann, en complétant quelques démonstrations, en comblant quelques lacunes, en donnant enfin les explications nécessaires au lecteur qui n'est pas familier avec la théorie des fonctions. Sans doute, en faisant ainsi, M. Hermann Stahl aurait écrit un bon Livre, mais il a bien agi en renonçant au plaisir d'écrire ce Livre, où la parole et la pensée de Riemann auraient nécessairement été altérées. Avec raison, il a voulu conserver pieusement l'une et l'autre : il s'est contenté d'introduire discrètement çà et là, dans le texte, quelques propositions complémentaires, si voisines de celles qu'établit Riemann, qu'il est réellement difficile de les en séparer; encore a-t-il soin de prévenir le lecteur par l'emploi de petits caractères; puis il a écrit un véritable commentaire des Leçons de Riemann, commentaire qui tient la moitié du volume; il donne là, en restant d'ailleurs dans l'esprit de celui qu'il commente, les explications utiles et ceux des compléments qui ne se relient pas immédiatement au texte. M. Stahl a terminé son Livre en introduisant les fonctions de Weierstrass, en sorte que le lecteur de ce petit Volume puisse se trouver en possession de tous les points essentiels de la théorie. J. T.

LEIBNIZ. — Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern, herausgegeben von *C.-J. Gerhardt*. Erster Band. in-8°, XXVIII + 760 p. Berlin, Mayer et Müller; 1899.

Les papiers de Leibniz, qui conservait jusqu'à ses premiers brouillons, forment à Hanovre une mine inépuisable d'inédits; l'exploitation en appartient sans conteste, par droit de premier occupant, à C.-J. Gerhardt, qui, dès 1846, éditait l'*Historia et origo Calculi differentialis*, et, de 1849 à 1863, donnait sept volumes d'écrits mathématiques de Leibniz (les quatre premiers renfermant la correspondance, les trois derniers les opuscules). Spécialement attiré vers l'histoire des Mathématiques, à laquelle il a consacré quelques autres travaux importants, Gerhardt a peut-être hésité avant d'entreprendre la publication des écrits philosophiques [1], dont il a donné le premier volume en 1875, et qu'il poursuit depuis cette époque; mais qui pouvait, mieux que lui, déchiffrer l'écriture souvent illisible de Leibniz? qui était capable, comme lui, de faire un choix judicieux parmi toutes ces pièces, dont les unes sont insignifiantes, dont les autres ne peuvent, telles qu'elles sont, supporter l'impression? qui aurait su, comme il l'a fait, tirer, sous une forme intelligible, de ces dernières, au milieu des surcharges, des ratures et des notes confuses, ce qu'il y avait qui valût vraiment la peine d'être reproduit?

C'est, en tout cas, une bonne fortune, pour ceux qui s'intéressent à l'histoire des Mathématiques, que l'Académie des Sciences de Berlin ait voulu, à l'occasion du deuxième centenaire de sa fondation, honorer spécialement la mémoire de celui qui y prit une si grande part, et qu'elle ait, dans ce but, chargé l'infatigable Gerhardt d'une nouvelle édition de la correspondance de Leibniz avec les Mathématiciens. Cette nouvelle édition est conçue sur un plan différent de celui de la précédente et que, pour ma part, je trouve très heureux. Ainsi, au lieu de l'ordre strictement chronologique, le premier volume, qui vient de paraître, nous offre trois

(1) La distinction des deux classes d'écrits de Leibniz n'est pas des plus aisées; l'historien des Mathématiques a à s'occuper de diverses pièces publiées comme philosophiques; le philosophe, au contraire, peut trouver, surtout dans la correspondance mathématique, nombre de passages qui l'intéressent spécialement.

séries distinctes, précédées chacune d'une introduction spéciale : 1° lettres échangées avec Oldenburg, Newton, Collins et Conti; 2° correspondance avec Tschirnhaus; 3° correspondance avec Huygens. De plus, dans ces séries sont insérées diverses pièces, tirées des papiers de Leibniz, ayant rapport de date et de sujet avec les lettres publiées [1]. Chaque série forme ainsi un tout complet, facile à étudier en lui-même, et où l'on suit sans peine l'évolution des pensées, surtout si l'on a recours aux introductions, qui ont été écrites avec une rare compétence, et où l'éditeur a su dire tout ce qu'il fallait, sans rien ajouter d'oiseux.

Est-ce à dire que tout soit parfait dans ce beau volume? Ce serait méconnaître les difficultés de la tâche et les limites pratiques de la correction. La vérité est que le texte n'est pas partout suffisamment assuré, soit qu'il ait été établi sur des copies fautives, soit que les originaux aient été mal déchiffrés. J'ai déjà eu l'occasion d'indiquer ailleurs [2] une trentaine de corrections nécessaires. Voici quelques autres taches relevées après un examen attentif des vingt premières pages.

P. 40 (seconde du texte de la correspondance), la première lettre est datée 15/22 juillet 1670. Si je comprends bien la note de l'éditeur, cette date est empruntée à la lettre suivante, où on lit (p. 41, l. 4) 15/23; il y a donc au moins une faute d'impression. D'autre part, la différence des deux dates de style julien et grégorien devrait être de dix jours, et la correction à faire reste incertaine [3]. — P. 42, l. 29 : *caltentioribus,* lire *callentioribus.* — P. 44, l. 18, *pleræque,* lire *pleræque;* l. 36 : *durieties,* lire *durities.* — P. 47 : il était utile de signaler que la lettre III est incomplète; l. 3 en rem. : *Baconi* (au lieu de la forme ordinaire *Baconis*) est suspect. — P. 50, l. 21 : *interrumperet,* lire *interrumperer.* — P. 60, l. 9 : *utitur,* lire *utetur;* l. 16 : *applicationi,* lire *applicatione* (s'il n'y a pas toutefois une

(1) Parmi ces pièces, signalons en particulier le début du Traité perdu de Pascal sur les coniques, début que Leibniz avait copié, et remarquons, à titre de curiosité, que Pascal y appelle *antobole* la section conique fermée (elliptique ou circulaire).

(2) *Revue critique,* numéro du 20 novembre 1899.

(3) C'est 13/23 juillet qui paraît la leçon la plus probable; cependant il faudrait examiner la lettre d'Oldenburg, qui existe en original.

correction plus grave à faire); l. 21 : *chodarum* imprimé pour *chordarum*. — P. 54, l. 6 en rem. : *fore*, lire *face*. — P. 55 : le total du compte argent ne concorde pas avec le détail des articles. — P. 56, l. 5 : *utrique*, lire *utriusque*; l. 28 : *de* est à ajouter avant *ratione*. — P. 57, l. 18 : après *onerati*, il y a, semble-t-il, une phrase omise; Leibniz, après avoir parlé de l'alcali, a dû parler de l'acide. — P. 58, l. 9 : le texte n'est guère intelligible et me paraît suspect, mais je n'ose proposer une correction; l. 22 : l'indication d'une lettre perdue aurait dû être relevée; l. 26 : *pisterio*, lire *pistorio*. — P. 60, l. 20 : après *polum*, il y a un membre de phrase omis; Leibniz a dû dire que le pôle boréal de l'aimant de Grandami était pointé vers le nadir.

Ajoutez quelques fautes de ponctuation qui gênent la lecture, on trouvera sans doute qu'une revision attentive de ces textes, déjà édités, n'aurait pas été inutile; que, d'un autre côté, la correction typographique aurait pu être plus satisfaisante, car bon nombre des taches signalées sont évidemment de simples fautes d'impression.

Cependant tout cela est d'une importance secondaire, et si j'ai cru utile de faire remarquer que l'on ne doit pas avoir une confiance absolue dans le texte de la correspondance de Leibniz (pas plus que dans celui de la plupart des correspondances publiées), si j'ai été obligé, par suite, de justifier cette remarque, je dois déclarer d'autant plus nettement que je n'ai constaté aucune faute réellement grave, et que le volume publié n'en est pas moins précieux et pas moins digne d'être consulté à l'avenir au lieu des éditions précédentes.

Ce qu'il contient, je n'ai pas besoin de le dire plus longuement; la première série de lettres n'est rien moins que l'ensemble des pièces qu'il faut lire avant tout pour se former une idée juste des prétentions et des droits de Leibniz dans l'invention du Calcul infinitésimal; la seconde, qui contient nombre de pièces jusqu'à présent inédites (lettres de Tschirnhaus), jette un jour singulier sur les relations des deux mathématiciens allemands; la troisième enfin, qui devance l'achèvement de la publication de la correspondance de Huygens, permet de juger de la grande influence que le savant hollandais exerça sur Leibniz, et de ramener à un

point de vue exact les récits que l'on fait d'ordinaire sur son attitude vis-à-vis du nouveau calcul.

Si je parle de l'influence de Huygens, je l'entends d'ailleurs surtout au point de vue moral, et non seulement eu égard aux conseils qu'il donna à Leibniz pour l'étude des Mathématiques. Car je ne veux pas cacher l'impression générale que m'a laissée, sur le caractère de Leibniz, la lecture de ce volume de correspondance. Au début, lorsque, âgé seulement de vingt-quatre ans, il entre en relation avec Oldenburg, le Secrétaire de la Société Royale de Londres, il est excessivement infatué de lui-même, vantard et gascon; il est ce que Tschirnhaus restera toute sa vie. Lorsque, moins de trois ans après, le 9 avril 1673, la Société Royale l'admet comme associé étranger ([1]), son bagage scientifique est insignifiant; l'opuscule *De arte combinatoria,* qu'il avait fait imprimer à vingt ans, et qu'il avoua plus tard n'avoir pas été un début particulièrement heureux; l'*Hypothesis physica nova* de 1671, formée de deux opuscules dont l'un est dédié à la Société Royale, l'autre à l'Académie des Sciences de Paris, ébauche d'un système du monde encore plus imparfait que celui des tourbillons de Descartes; la *Notitia Opticæ promotæ,* de la même année, simple promesse qui ne devait aboutir à rien; enfin le premier modèle de cette machine arithmétique, qui devait lui coûter tant de peine et tant de frais inutiles, et qui n'a pu marcher régulièrement que de nos jours. C'est tout; et lorsqu'en janvier 1673 il va à Londres et entre en relations personnelles avec les savants anglais, s'il leur parle de ce qu'il a découvert en Mathématiques, il se fait aussitôt dire par Pell que c'est déjà connu, et c'est inutilement qu'il se débat contre l'évidence. Il me semble vraiment bien douteux que son ton et ses prétentions aient laissé une impression nettement favorable aux membres de la Société Royale, si frappés qu'ils aient pu être par l'universalité des connaissances de ce jeune homme, déjà revêtu d'une charge politique et qui s'était au moins aussi annoncé comme juriste que comme savant. Mais Oldenburg tenait évidemment à avoir un correspon-

([1]) Lorsque l'Académie des Sciences, en 1675, lui fit le même honneur, la question n'était pas la même. Leibniz avait déjà nettement prouvé son génie mathématique.

dant utile en Allemagne, et les relations que Leibniz avait déjà su se créer semblaient assurer qu'il remplirait ce rôle dans d'excellentes conditions.

Lorsqu'en 1676 Leibniz quitte la France, il a singulièrement changé; il a appris à ne plus parler de ses rêves comme de réalités, il a appris à concentrer ses efforts sur des points déterminés, où le succès est possible, et à les poursuivre jusqu'à ce qu'il ait obtenu des résultats décisifs, au lieu de se dépenser en promesses vagues et irréalisables. Sa correspondance avec Tschirnhaus est particulièrement intéressante par les conseils d'ami qu'il essaye de lui donner, sans le froisser, afin de le corriger à son tour de ses gasconnades.

Que ce changement de caractère, chez Leibniz, s'accentue de plus en plus, ce sera, bien entendu, l'effet de l'âge et de l'expérience; plus ses travaux lui acquéraient de gloire, plus il pouvait savoir quelle peine coûte l'établissement d'une nouvelle vérité positive; mais pour que, de vingt-cinq à trente ans, il se soit déjà ainsi transformé, il faut qu'il ait subi quelque influence spéciale, et je ne puis la trouver ailleurs que dans cet Huygens, déjà couvert de gloire, et cependant si modeste et d'un bon sens si limpide. A voir avec quel respect réel il lui écrira plus tard, lorsque lui-même se sera élevé à un niveau égal, à voir quel compte il tient de son jugement, si sévère qu'il soit, par exemple, sur le projet de *Characteristica geometrica,* il ne me semble pas que l'on puisse nier l'impression profonde qui lui était restée de son premier commerce avec Huygens, et qu'aucun autre de ses contemporains ne me paraît avoir exercée sur lui.

Je reviens sur l'incident auquel j'ai fait allusion tout à l'heure et qui eut lieu entre Leibniz et Pell; on le raconte en effet d'ordinaire un peu trop à l'avantage du premier. Il s'agit au reste de ses premiers travaux réels en Mathématiques. On sait qu'avant son arrivée en France, en 1672, il n'avait guère étudié que les éléments; du moment où il voulut s'élever plus haut, comme, en même temps qu'il étudiait les ouvrages dont la connaissance lui était nécessaire, il essaya de voler de ses propres ailes, il devait fatalement découvrir de bonne foi des propositions déjà connues. Il n'y a, en fait, dans l'affaire dont il s'agit, qu'un point curieux, c'est qu'on était, ce semble, mieux informé à Londres qu'à Paris.

La découverte que Leibniz croyait avoir faite est relative à la composition d'un nombre fonction d'un autre au moyen de ses différences finies, d'ordre successif. Sans doute, il en avait parlé en France comme il en parla en Angleterre; mais là Pell lui objecte que cette composition, sur laquelle Briggs avait déjà fait des remarques, a été donnée dans un Ouvrage publié à Lyon, en 1670, par le Français Mouton. Leibniz vérifie que le fait est exact, mais dans une lettre à Oldenburg, du 3 février 1673, lettre évidemment faite pour être montrée, il revendique la priorité sur deux points.

En ce qui concerne le second, il avait raison; Mouton n'avait considéré que des différences en nombre fini, c'est-à-dire des fonctions algébriques entières; Leibniz avait étendu sa proposition au cas d'un nombre indéfini de différences non nulles. Là est certainement le trait du génie mathématique; seulement il faut avouer que, tant qu'une idée de ce genre n'a pas reçu d'applications précises, elle reste comme non avenue. Or Leibniz a beau célébrer l'importance de sa considération, il n'est pas encore en mesure de prouver ce qu'il avance à cet égard, et il est obligé de rester dans le vague.

Reportons-nous maintenant à la lettre de Newton à Oldenburg du 24 octobre 1676. Newton la commence précisément en disant comment, au début de ses travaux mathématiques, alors qu'il étudiait les écrits de Wallis, il trouva le moyen de résoudre le problème proposé par celui-ci, d'interpoler des séries indéfinies entre les termes d'une suite d'expressions finies, et comment il parvint ainsi à représenter par des séries l'aire du cercle et celle de l'hyperbole. Or ce moyen n'est autre que l'extension dont Leibniz parle à Oldenburg, et il n'est pas douteux que ce ne soit en poursuivant son idée que Leibniz parvint lui-même en 1674 à l'expresssion sériaire spéciale qu'il donna pour la quadrature du cercle. Si cette remarque prouve bien l'importance capitale de l'idée dont il s'agit, et si l'indépendance de Leibniz doit être reconnue, il n'en est pas moins clair que sur ce point, comme sur bien d'autres, la priorité de Newton est incontestable.

Quant à l'autre revendication de Leibniz dans sa lettre du 3 février 1673, c'est une singulière maladresse, et je m'étonne que M. Gerhardt, en analysant sa lettre (p. 13), ne l'ait pas signalée.

Le Tableau de coefficients donné par Mouton est naturellement celui des coefficients du binome, bien familier depuis longtemps pour tous les arithméticiens. Or, quel que soit le procédé de formation qu'ait indiqué Mouton pour ce Tableau, il est incontestable que celui qui correspond à la formule

$$C_n^m = C_n^{m-1} + C_{n-1}^{m-1},$$

procédé que revendique Leibniz, était connu depuis Stifel [1]. Mais il est encore plus étrange que Leibniz dise s'étonner de ne pas avoir trouvé ce procédé dans le *Triangle arithmétique* de Pascal, alors qu'il constitue précisément le mode de formation de ce triangle. Tout cela ne pouvait guère faire bonne impression sur les savants anglais, et, s'ils n'ont pas relevé ces assertions, ç'a sans doute été par pure politesse.

Leibniz ajoute, à la fin de sa lettre, qu'il a obtenu (c'était d'ailleurs par un procédé tout autre) la sommation des séries indéfinies formés par les inverses des nombres figurés successifs. D'après le récit qu'il a fait plus tard, ce problème lui avait été proposé, pour les inverses des nombres triangulaires, par Huygens, au début de leurs relations, et si la démonstration (p. 19) conservée dans les papiers de Leibniz ne serait guère regardée aujourd'hui comme rigoureuse, il n'en est pas moins probable que l'exactitude de la solution fut le premier signe auquel Huygens reconnut la réalité des aptitudes mathématiques du jeune étranger. Mais là encore celui-ci jouait de malheur. Collins lui fait répondre, le 6 avril 1673 (p. 86), qu'il considère [2] la méthode de sommation des séries dont parle Leibniz comme donnée par Mengoli dans un ouvrage publié en 1658. Avant d'examiner le fait, Leibniz répond que sa méthode doit être différente (ce qui ne semble pas douteux) et que Mengoli n'a dû enseigner que la sommation d'un nombre fini de termes, tandis qu'il est, lui, par-

---

(1) La relation $C_n^m = \frac{m-n+1}{n} C_{n-1}^m$ est, au contraire, une découverte de Fermat, qui en a laissé partager la gloire à Pascal, quoiqu'il l'eût faite longtemps avant ce dernier.

(2) *Putat.* Cette expression singulière s'explique par l'obscurité des écrits de Mengoli. Toutefois il est clair que Collins en a tiré une méthode, qu'il possède bien, mais dont il ne prétend nullement s'attribuer l'invention.

venu à la sommation de la série indéfinie. Comme si la sommation d'un nombre fini de termes ne permettait pas de passer aisément à la série indéfinie! Si dans la réplique de Collins, transmise par Oldenburg, cette question est laissée de côté, c'est sans doute aussi par politesse; et il faudra encore du temps avant qu'il trouve quelque chose de réellement neuf dans les essais de Leibniz.

En résumé, jusqu'en 1674, les lettres de Leibniz feraient plutôt mal augurer de son avenir; c'est un esprit plein de verve, brillant, mais auquel manque la discipline scientifique, et qui semble avoir des visées trop larges pour fournir de bonne heure des preuves de maturité. Il n'en est que plus intéressant d'étudier, dans le détail de sa correspondance, l'affermissement rapide de sa pensée et le progrès positif de son savoir. PAUL TANNERY.

MORITZ CANTOR FESTSCHRIFT. — ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK, Heft IX, 658 p. in-8°, Teubner. Leipzig; 1899.

C'est à l'occasion du 75e anniversaire de la naissance (23 août 1824) de l'illustre historien de la Mathématique que le *Zeitschrift für Mathematik und Physik* vient de donner un Volume spécial d'*Abhandlungen* dont les articles ont été demandés aux amis et admirateurs du Maître, et dont la publication a été dirigée par Maximilien Curtze et Siegmund Günther. Le premier des deux éditeurs a terminé le volume par le relevé des écrits de M. Cantor, relevé d'autant plus intéressant que la seule liste des articles de recension dans le *Zeitschrift f. M. u. P.* peut servir de bibliographie pour l'histoire des Mathématiques depuis 1856.

Les articles sont au nombre de trente-deux, et rangés suivant l'ordre alphabétique des noms des auteurs. Trois ont écrit en français : V.-V. BOBYNIN, à Moscou (sur les procédés servant à décomposer les quotients en quantièmes, comme le faisaient les anciens Égyptiens et les praticiens grecs; article un peu obscur, et dont il aurait peut-être mieux valu donner une traduction allemande); PAUL MANSION, à Gand (sur le caractère géométrique de l'Astronomie ancienne; remarques très justes); moi-même enfin (sur les fragments mathématiques de Descartes, et particulièrement sur ses ovales).

Deux articles sont en anglais : T.-S. Heath, à Cambridge, sur une allusion assez obscure d'Aristote à la construction des parallèles, intéressante pour l'histoire du postulatum avant Euclide; F. Cajori, Colorado Springs, notes sur l'histoire des logarithmes, en particulier sur les Tables de Speidell, les premières qui aient donné (en 1620) les logarithmes appelés à tort *népériens* (¹).

Deux articles sont en italien : A. Favaro, sur un manuscrit récemment découvert des *Mécaniques* de Galilée, manuscrit qui donne des variantes importantes par rapport au texte publié dans l'*Edizione Nazionale* (ce manuscrit a été édité depuis par A. Favaro); Gino Loria, sur les renseignements que fournissent, touchant l'histoire des Mathématiques en Italie au XVIIIᵉ siècle, deux recueils littéraires négligés jusqu'à présent. L'auteur fait ressortir que l'on considère souvent à tort les géomètres italiens du dernier siècle comme s'étant tenus à l'écart du mouvement général.

Les vingt-cinq autres articles sont en allemand; voici comment on pourrait les classer méthodiquement.

Généralités. — F. Rosenberger, sur l'utilité de l'histoire des sciences exactes; A. Heller, sur les problèmes que soulève l'histoire de la Physique. Deux articles de grande portée.

Mathématique grecque. — A. Sturm, notes sur Anaximandre et Démocrite; A. Nagl, le calcul sur l'abacus grec, intéressante solution de difficultés que présentait l'explication des dispositions offertes par les abaques antiques; H. Suter, texte arabe et traduction du *loculus* d'Archimède, petite fantaisie du grand Géomètre sur une sorte de jeu de patience; F. Hultsch, remarquable restitution de la *dioptra* d'Hipparque pour la mesure des angles; J.-L. Heiberg, textes arithmétiques byzantins, intéressants pour l'histoire de la numération et du calcul.

Moyen âge et Renaissance. — M. Curtze, texte d'une ancienne traduction allemande du *Tractatus quadrantis* de *Robertus Anglicus*, que j'ai publié dans les *Notices et extraits* (XXXV_2,

(¹) Toutefois les logarithmes de Speidell sont calculés, non pour les nombres, mais pour les lignes trigonométriques; la caractéristique n'y est point distinguée des autres figures, et pour avoir réellement les logarithmes naturels des lignes plus petites que l'unité, il faut retrancher 10 de cette caractéristique.

1897); S. Günther, étude approfondie sur Nicolas de Cues, ses idées et ses travaux concernant la Cosmographie et la Géographie (avec reproduction d'une curieuse Carte de l'Europe centrale); F. Müller, terminologie des premiers auteurs mathématiques ayant écrit en allemand, patient relevé qui ne me semble guère favorable aux idées des puristes actuels; E. Wappler, textes pour l'histoire de l'Algèbre en Allemagne, tirés d'un manuscrit de Widmann d'Eger; H. Staigmüller, Johann Scheubel, professeur à Tubingue, surtout considéré comme algébriste (il a été trop rabaissé par Treutlein et mérite d'être placé à côté de Stifel); M. Steinschneider, bibliographie des écrits mathématiques composés par des auteurs juifs dans la première moitié du xvie siècle; K. Hunrath, sur les Tables trigonométriques de Rheticus et de Viete, étude circonstanciée; A. von Braunmühl, histoire de la méthode de prosthaphérèse, qui servit avant l'invention des logarithmes, pour éviter les multiplications dans les calculs trigonométriques.

xviie *et* xviiie *siècles*. — E. Wohlwill, la découverte de la forme parabolique de la trajectoire des projectiles (important article auquel je consacrerai une étude spéciale); G. Wertheim, exposé clair et exact de la dispute entre Fermat et Wallis; J.-H. Graf, sur un curieux plagiat d'une *Géométrie pratique* du graveur Sébastien Leclerc, mise sous le nom d'*Ozonam* (*sic*) [1]; G. Eneström, Wargentin et ses travaux sur les Tables de mortalité (il ne mérite pas les reproches qu'on lui a adressés au sujet de l'emploi de la méthode dite *de Halley*); E. Gelcich, sur l'histoire de la détermination des longitudes en mer, preuves de l'incertitude qu'elle a constamment offerte avant la construction des chronomètres.

Mathématiques modernes. — S. Dickstein, histoire des critiques concernant la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange; P. Stäckel, Taurinus, un précurseur de Lobatchefski et de Bolyai (c'est le neveu de Schweikart, qui inventa le terme de

---

[1] Ozanam avait composé une *Géométrie pratique* tout à fait différente. Le plagiaire (Berne, 1699) a voulu lui prendre son nom, en même temps qu'il prenait l'ouvrage à un autre.

Géométrie astrale); F. MEYER, sur l'Encyclopédie des Sciences Mathématiques, courte analyse des six premiers articles de ce recueil; F.-A. UNGER, description des machines à calculer, pleine d'indications utiles.

Ces brèves mentions suffiront à peine pour donner une idée exacte de l'intérêt qu'offre ce *Fetschrift*. Sans doute il n'était pas difficile, pour l'occasion dont il s'agissait, de trouver les collaborateurs désirables; mais limiter à chacun l'espace autant qu'il a été nécessaire de le faire, obtenir néanmoins des articles d'une valeur réelle, et assurer une variété aussi complète, cela n'était point une tâche aisée. MM. Curtze et Günther doivent être fiers du succès de leurs efforts. PAUL TANNERY.

H. BROCARD. — NOTES DE BIBLIOGRAPHIE DES COURBES GÉOMÉTRIQUES, partie complémentaire; 243 p. in-8° autographiées, imprimerie et lithographie Comte-Jacquet, Bar-le-Duc; 1897.

C'est un complément de l'utile vocabulaire dont il a été parlé dans le numéro du *Bulletin* de juillet 1898 (p. 165). L'étendue de ce complément tient moins à des omissions d'articles dans le premier travail qu'à ce que M. Brocard a développé, en général, les indications sur chaque courbe.

Le nombre des articles s'élève à 1022, d'après la table alphabétique commune aux deux répertoires. Il est vrai que tous ces articles ne se rapportent pas réellement à des courbes, et que, d'autre part, il y a quelques doubles emplois; mais on ne peut que savoir le plus grand gré à M. Brocard d'avoir relevé patiemment une nomenclature aussi étendue et d'avoir ainsi préparé tous les matériaux pour qui voudra entreprendre de dresser un catalogue méthodique des courbes spécialement dénommées jusqu'à présent.

Bien entendu, un répertoire de cette nature ne peut que s'accroître sans cesse, si on veut le tenir au courant. Mais il me semble qu'il est déjà assez considérable pour qu'on l'arrête avec le XIXe siècle, et qu'on laisse s'écouler une ou deux générations avant de fixer un nouveau jalon lexicographique.

Le travail de M. Brocard est-il désormais complet pour le passé? Ce serait plutôt là le point important, mais je ne pense pas qu'il y ait personne autre que l'auteur qui puisse réellement répondre à cette question, et il a montré assez de conscience et de savoir-faire pour que nous ayons toute confiance en lui. Je ne compte pas la possibilité de signaler quelque nom mort-né perdu dans un Mémoire oublié ou dans un manuscrit inédit; cette possibilité existera toujours, mais ne peut exciter un intérêt proprement scientifique.

C'est ainsi que je signalais, l'autre jour, dans ce qui reste du *Traité des coniques* de Pascal (¹), le terme, d'ailleurs assez mal fait, d'*antobole*, pour désigner la section conique fermée (cercle ou ellipse) : « vel (planum) per verticem non transiens, nulli ex verticalibus (lignes du sommet ou génératrices) parallelum est; talis coni sectio est Antobola, eo quod in se ipsam redit. »

C'est ainsi encore que, tout récemment, j'ai rencontré à la Bibliothèque de Munich (cod. gall. 247 à 252) un ouvrage anonyme considérable, dont les deux dernières parties seraient une mine précieuse pour l'histoire oubliée des lignes courbes. Cet ouvrage intitulé : *Application de l'Algèbre et des lieux géométriques pour la solution des problèmes de Géométrie,* est certainement d'Ozanam, et il n'a été achevé qu'après la publication de l'*Analyse des infiniment petits* du marquis de l'Hospital, c'est-à-dire après 1696.

J'y ai, par exemple, relevé ce petit détail curieux de l'histoire du *folium* de Descartes, au Livre II, Chap. IV, dans une série de problèmes concernant le tracé des tangentes.

Probl. 42, le *folium*, rapporté aux tangentes au point double comme axes, est appelé *ligne inclinée,* et aucune mention de Descartes n'y est faite.

Le probl. 43, au contraire, débute comme suit :

« Tirer une touchante par le point B donné sur la ligne de Descartes ABC. »

« Cette courbe a été appelée *ligne de Descartes,* parce que

(¹) *Der Briefweehset von G.-W. Leibniz mit Mathematikern,* Berlin, Mayer et Müller, 1899, p. 136. *Voir* plus haut p. 16, note 1.

M. Descartes en a parlé le premier, et qu'en cette façon il semble l'avoir inventée. »

Suit l'énoncé de « la propriété essentielle », qui conduit immédiatement à « l'équation constitutive » :

$$ax^2 - 3x^2y = ay^2 - y^3,$$

c'est-à-dire à l'équation du *folium* rapporté à son axe de symétrie (OY) et à la perpendiculaire au point double (OX).

De fait, Descartes avait proposé le *folium* sous la première forme à Fermat en janvier 1638; il le proposa ensuite sous la seconde (lettre à Mersenne du 23 août 1638) à Roberval, pour se moquer de lui s'il ne reconnaissait pas que c'était la même courbe. Il me semble que la rédaction d'Ozanam ne peut s'expliquer qu'en admettant qu'il aura compilé, sans se rendre compte de cette identité, un recueil antérieur dans lequel les deux problèmes étaient dans un ordre inverse, la *ligne de Descartes* définie d'abord de la seconde façon, puis la même ligne de Descartes qualifiée d'*inclinée* et définie de la première façon.

Quand Ozanam écrivait, il y avait bien trente ans que Clerselier avait publié les *Lettres de Descartes* où la plaisanterie de ce dernier était révélée; on peut admettre que le recueil que je suppose avait été formé depuis. En tout cas, la boucle seule du *folium* est figurée sur le manuscrit, et non les branches asymptotiques, qui cependant avaient déjà été reconnues par Huygens.

PAUL TANNERY.

PASCAL (E.). — DIE VARIATIONSRECHNUNG AUTORISIERTE DEUTSCHE AUSGABE, von *Adolf Schepp*. 1 vol. in-8°, VI-146 p., Teubner; 1899.

Nous sommes heureux d'annoncer la traduction allemande de l'exposition résumée que M. Pascal a donnée dans les Manuels Hœpli de la théorie du Calcul des variations, exposition qui forme, avec le Calcul des différences finies, la troisième partie du Calcul infinitésimal de l'auteur. Le *Bulletin* [1] a déjà parlé des qualités

[1] T. XXI_1, p. 270; 1897.

et de l'objet du travail de M. Pascal; nous nous contenterons de signaler, cette fois, les nombreux et intéressants renseignements historiques et bibliographiques que l'on y trouve, la façon dont est mise en lumière la part qu'ont apportée à cette théorie ceux qui l'ont fondée et développée. J. T.

TCHEBYCHEF (P.-L.). — Œuvres publiées par les soins de MM. *A. Markoff* et *N. Sonin*, Membres ordinaires de l'Académie impériale des Sciences. T. I avec portrait, Saint-Pétersbourg; 1899. Commissionnaires de l'Académie impériale des Sciences, VI-714 p. in-4°.

C'est avec beaucoup de plaisir et beaucoup de reconnaissance que sera accueillie la publication des Œuvres de Tchebychef. Le grand géomètre russe était très apprécié et très populaire dans notre pays. C'est dans les Recueils français qu'il a publié plusieurs des plus importants de ses Mémoires, il nous rendait aussi fréquemment visite; il prenait grand plaisir à s'entretenir avec plusieurs d'entre nous et à nous faire connaître les conceptions très originales qui impriment un caractère si particulier à chacun de ses travaux. Nous avions tous une grande admiration pour le savant, en même temps qu'une grande reconnaissance pour les marques d'estime et de bienveillance qu'il ne cessait de nous prodiguer. C'est avec joie que nous voyons revivre ses traits dans le portrait que les éditeurs ont placé en tête du Volume que nous recevons aujourd'hui.

Cette publication, entreprise grâce au concours qu'a bien voulu assurer M. le général d'artillerie W.-T. Tchebychef, frère du regretté géomètre, sera, nous n'avons pas besoin d'y insister, un véritable service rendu aux études mathématiques. Tchebychef, on le sait, était un géomètre ne se rattachant à aucune école; les vues qu'il a apportées dans les Mathématiques lui appartiennent entièrement; dans la solution des problèmes qu'il était conduit à se poser, il a apporté une rare fertilité de moyens et une pénétration véritablement extraordinaire. Il a pour ainsi dire renouvelé l'étude de toutes les questions dont il a eu à s'occuper. L'étude de ses travaux est donc de celles que l'on ne

saurait trop recommander; elle est de nature à éveiller chez tous ceux qui l'entreprendront sérieusement les qualités d'originalité et d'invention, cet esprit d'initiative qui sont, aujourd'hui plus que jamais, nécessaires à tous les savants.

MM. Markoff et Sonin, auxquels l'Académie de Saint-Pétersbourg a confié la publication nouvelle, s'en sont occupés avec le plus grand zèle; ils ont fait appel au concours désintéressé de beaucoup de savants russes, principalement d'anciens élèves de Tchebychef, et ils ont eu ainsi à leur disposition les traductions des articles qui, du vivant de l'auteur, ont été publiés dans une seule langue.

L'édition comprendra deux Volumes. Elles renferme tous les travaux imprimés du vivant de l'auteur, sauf deux thèses publiées à part : l'une pour le grade de magister, intitulée : *Essai d'analyse élémentaire de la théorie des probabilités*, Moscou, 1845, et une thèse de doctorat intitulée : *Théorie des congruences*.

L'ordre chronologique est celui qui a été adopté pour la distribution des matières.

Le Tome I comprend 29 Notes et Mémoires publiés de 1843 à 1858 : ils se rapportent aux fractions continues, à l'intégration des différentielles irrationnelles, à la théorie des cartes géographiques, à celle des parallélogrammes, aux propriétés des nombres premiers, à l'interpolation et à la représentation approximative des fonctions. La réunion de tant de beaux travaux inspirés par les mêmes idées directrices donne à chacun d'eux une valeur nouvelle; elle contribuera à assurer le développement et la continuation de recherches que Tchebychef a poursuivies pendant toute sa vie et auxquelles il attribuait avec raison tant d'importance.

G. D.

MÉLANGES.

SUR UNE FORMULE DE WEIERSTRASS;

Par M. Émile PICARD.

On sait quelle est, dans la théorie des intégrales hyperelliptiques d'après Weierstrass, l'importance de l'identité

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sqrt{P(x)}}{(y-x)\sqrt{P(y)}}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\sqrt{P(y)}}{(x-y)\sqrt{P(x)}}\right]=\frac{U(x,y)}{\sqrt{P(x)}\sqrt{P(y)}},$$

où $P(x)$ désigne un polynome arbitraire ayant des racines distinctes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et où $U(x, y)$ est un polynome en x et y défini par cette identité même. Weierstrass considère l'intégrale double

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}}\int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}}\frac{U(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{P(x)}\sqrt{P(y)}}.$$

Cette intégrale est nulle si, μ étant le plus petit des deux nombres μ et ν, on a

$$\mu+1<\nu.$$

Si, au contraire, $\mu+1=\nu$, l'intégrale a une valeur différente de zéro. C'est ce résultat que nous nous proposons d'établir d'une manière très simple et entièrement différente de celle de l'illustre géomètre.

Nous allons envisager l'intégrale double prise le long d'un domaine à deux dimensions formé par une courbe fermée C du plan de la variable x qui comprenne à son intérieur deux des points a, et par une courbe fermée C′ analogue dans le plan de la variable y. Si les deux courbes C et C′, tracées sur le même plan, offrent la disposition de la *fig.* 1, c'est-à-dire si les contours C et C′ ne se coupent pas (ou peuvent être ramenés à des contours ne se coupant pas sans traverser les points a), on aura de suite, d'après l'identité (1),

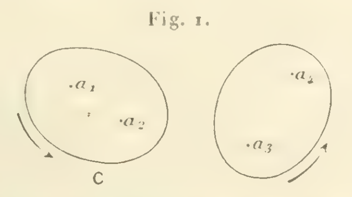
$$(\mathrm{I})\qquad \int_C\int_{C'}\frac{U(x,y)}{z}\,dx\,dy=0\qquad \left[z=\sqrt{P(x)}\sqrt{P(y)}\right],$$

puisque, tous les éléments restant finis dans les deux intégrales

$$(2)\qquad \int\int\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{P(x)}{(y-x)z}\right]dx\,dy,\qquad \int\int\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{P(y)}{(x-y)z}\right]dx\,dy,$$

on n'a qu'à faire la première intégration dans chacune de ces intégrales et l'on obtient ainsi *zéro*.

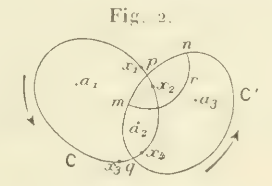
Fig. 1.



Le résultat précédent ne subsiste pas si les deux contours ont la disposition de la *fig.* 2.

Les contours C et C′ ont deux points communs p et q et le maniement des intégrales (2) demande quelques précautions à cause des *deux* éléments qui y deviennent infinis. Prenons sur C

Fig. 2.



deux points x_1 et x_2 de part et d'autre de p, et deux points x_3 et x_4 de part et d'autre de q. Nous allons calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_C \int_{C'} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sqrt{P(x)}}{(y-x)\sqrt{P(y)}}\right] dx\, dy,$$

l'intégration par rapport à y étant faite le long de C′, et l'intégration par rapport à x étant faite le long de l'arc x_1x_3 et le long de l'arc x_4x_2. Le radical $\sqrt{P(x)}$ a une valeur bien déterminée le long de C, et le radical $\sqrt{P(y)}$ une valeur bien déterminée le long de C′; nous pouvons supposer qu'ils sont égaux en p, ils auront alors des valeurs de signes contraires en q.

Ceci posé, l'intégrale précédente est manifestement égale à

$$-\int_{C'}\left[\frac{\sqrt{P(x_1)}}{(y-x_1)\sqrt{P(y)}} - \frac{\sqrt{P(x_2)}}{(y-x_2)\sqrt{P(y)}}\right] dy$$

$$-\int_{C'}\left[\frac{\sqrt{P(x_3)}}{(y-x_3)\sqrt{P(y)}} - \frac{\sqrt{P(x_4)}}{(y-x_4)\sqrt{P(y)}}\right] dy.$$

Pour calculer l'intégrale qui forme la première ligne, traçons un arc *mrn*, comme l'indique la *fig.* 2. Une intégrale prise le long de C' est égale à la somme d'une intégrale prise le long du contour *mqnrm* et d'une intégrale relative au contour *mrnpm*. Or, pour la première ligne, la première de ces deux intégrales est très petite si x_1 est très voisin de x_2; la seconde se réduit à

$$\int \frac{\sqrt{P(x_2)}}{(y-x_2)\sqrt{P(y)}}\,dy,$$

prise le long du contour *mrnpm* : elle a donc pour valeur $2\pi i$. L'intégrale de la seconde ligne se calculera de même; sa valeur est encore $2\pi i$, en se rappelant qu'en q les radicaux $\sqrt{P(x)}$ et $\sqrt{P(y)}$ sont de signes contraires.

Si l'on calcule maintenant l'intégrale

$$\int\int \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{P(y)}{(x-y)z}\right] dx\,dy$$

dans les mêmes conditions, on trouve évidemment zéro. Par suite l'intégrale

$$\int\int \frac{U(x,y)}{z}\,dx\,dy,$$

prise pour y le long de C', et pour x le long de C à l'exclusion des deux arcs très petits $x_1 x_2$ et $x_3 x_4$ est très voisine de $4\pi i$. On aura donc par suite, puisque l'élément de cette intégrale reste fini en p et q,

$$\int_C \int_{C'} \frac{U(x,y)}{z}\,dx\,dy = 4\pi i.$$

Ce résultat est bien d'accord avec la relation obtenue par Weierstrass et qu'il formule de la manière suivante (*Œuvres*, t. I, p. 117) :

$$\int_{a_1}^{a_2}\int_{a_2}^{a_3} \frac{F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}} = \frac{\pi}{2i}.$$

Le polynome $R(x)$ est désigné dans notre texte par $P(x)$, et F représente $\frac{U}{2}$.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

EMIL WOHLWILL. — DIE ENTDECKUNG DER PARABELFORM DER WURFLINIE. *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, IX, p. 579-635. Teubner, Leipzig: 1899.

Dans le quatrième volume de son *Histoire de la méthode expérimentale en Italie*, ouvrage où sont au reste consignés les résultats de recherches extrêmement méritoires, Rafaello Caverni a soutenu un singulier paradoxe dont le thème essentiel est le suivant : ce n'est point Galilée qui a découvert que la trajectoire des projectiles est une parabole, et si même il avait eu cette idée, il l'avait écartée, pour s'en tenir à la fantastique hypothèse de Tartaglia. La découverte serait due à Cavalieri, qui, de fait, a été le premier à la publier dans son *Specchio ustorio* (1632); mais Galilée aurait ensuite persuadé Cavalieri que l'antériorité lui appartenait, et se serait arrogé une gloire dont, au dire de M. Caverni, il convient de le dépouiller sans scrupule.

M. Wohlwill a cru devoir faire à ce paradoxe l'honneur d'une réfutation en règle, qu'il ne méritait certainement pas en lui-même, mais que la réputation acquise par M. Caverni pouvait rendre utile; je ne m'étendrai pas sur cette réfutation, faite de main de maître; je constate seulement qu'elle est absolument complète, que tous les détails de la question sont parfaitement éclaircis, et que de nouvelles vérifications ont permis de préciser certaines dates importantes.

Mais je voudrais présenter quelques réflexions sur le fait bien connu qui a été le point de départ du roman échafaudé par M. Caverni; car ce fait est, à mon avis, un élément essentiel de l'histoire du principe de l'indépendance de l'effet d'une force et de l'effet du mouvement antérieurement acquis, et cependant il me paraît avoir été négligé sous ce rapport.

Dans son célèbre dialogue des *Massimi Sistemi* (1632), Galilée ne parle nullement de la courbe décrite par les projectiles; il réserve expressément la question pour l'ouvrage dont il avait réuni les éléments depuis plus de vingt ans, les *Nuove Scienze*, qui parurent en 1638. Au contraire, il énonce très clairement la

loi des carrés des temps pour la chute des graves, et il pose également le principe de l'indépendance des mouvements, c'est-à-dire les deux éléments nécessaires et suffisants pour reconnaître la forme parabolique des trajectoires.

Mais dans les *Massimi Sistemi*, ce principe de l'indépendance joue surtout un rôle important pour établir que les mouvements se passent à la surface de la terre de la même façon, soit qu'elle tourne, soit qu'elle ne tourne pas : c'est-à-dire que Galilée étend l'indépendance au mouvement de rotation conçu comme tel, qu'il n'admet point la déviation des corps vers l'est, et qu'il n'a aucune idée du théorème de Coriolis. Personne ne peut lui en faire un reproche, mais il importe, pour l'historien, de constater le fait; j'ajoute que le seul phénomène à la surface de la terre, où Galilée croit voir un effet lié à la rotation de la terre est celui des marées, et que c'est à cette question qu'il consacre la quatrième journée des *Massimi Sistemi*, pour exposer une théorie très ingénieuse, mais dont les conclusions sont naturellement erronées.

Le seul endroit des *Massimi Sistemi* qui puisse faire penser que Galilée ait eu, au moins à un moment donné, quelques scrupules sur sa façon d'entendre l'indépendance des mouvements, se rencontre dans une réponse de Salviati à Simplicio, après le calcul du temps de la chute d'un grave depuis la lune jusqu'à la terre ([1]). Comme le péripatéticien objecte que ce temps, quoique très réduit par rapport aux évaluations de Scheiner, est encore assez grand pour faire croire à un retard du point de chute (déviation vers l'ouest), Salviati réplique qu'il faudrait beaucoup plutôt admettre une avance (déviation vers l'est), puisque le mouvement de circulation se fait suivant des cercles de plus en plus petits. Mais si importante que soit cette remarque, elle ne vaut que comme un doute. Galilée a pu le ressentir à l'occasion de la question spéciale qu'il traitait là, mais il n'a pas cru, pour cela, devoir modifier ses

---

([1]) Vol. III, p. 259, de l'Ed. Naz. — Le calcul du temps de chute est fait en supposant la constance de l'accélération, malgré l'énorme variation de distance. On verra que cette constance était loin d'être un dogme pour Galilée. M. Wohlwill a d'autre part rendu très probable que toute cette discussion, y compris l'énoncé de la loi des carrés des temps, est une addition faite en dernier lieu au plan primitif.

assertions positives, d'après lesquelles le mouvement apparent de chute des graves se fait rigoureusement selon la verticale, pas plus qu'il n'a jugé à propos, dans les *Nuove Scienze*, de revenir sur ce sujet.

Il s'ensuit donc que lorsque, dans les *Massimi Sistemi*, il parle de la spirale trajectoire absolue d'un grave (tombant à l'équateur) (1), si l'on veut déterminer cette spirale d'après ses idées, très nettement exprimées, en la rapportant au centre de la terre comme pôle et, comme axe, au rayon passant par la position initiale, on doit prendre une équation telle que celle-ci

$$(1) \qquad \rho = a - b\omega^2;$$

mais, au lieu de cela, et c'est ici la pierre de scandale pour M. Caverni, Galilée, qui n'a point, en cet endroit, encore énoncé la loi des carrés des temps, dit qu'il est possible que cette trajectoire absolue soit un cercle :

$$(2) \qquad \rho = a\cos\omega = a - 2a\sin^2\frac{\omega}{2}.$$

Comment cette assertion pouvait-elle être prise par les mathématiciens contemporains de Galilée? Aucun d'eux, surtout Cavalieri, ne pouvait lier ce problème, de la trajectoire absolue du grave abandonné à lui-même, avec celui de la trajectoire apparente des projectiles; dans un cas, le mouvement vers le centre est supposé changer de direction; dans l'autre, il est supposé rester parallèle à lui-même. Mais aucun d'eux n'était capable non plus de reconnaître l'erreur de principe commise par Galilée; on pouvait tout au plus constater la contradiction théorique entre la loi des carrés des temps et la relation (2), comme aussi l'impossibilité de faire coïncider suffisamment pour l'expérience les relations (1) et (2), car cette coïncidence $\left(\text{si l'on remplace } \sin\frac{\omega}{2} \text{ par } \frac{\omega}{2}\right)$ exigerait encore pour g une valeur à peu près dix fois plus faible que la valeur réelle.

Ce fut dans ces limites que dut se borner la communication

(1) J'ajoute cette restriction, qui n'est point dans Galilée, parce qu'elle est rendue nécessaire par sa figure et par ses explications.

faite à Galilée, en 1637, par un ami de Carcavi (probablement Fermat) (¹), communication malheureusement perdue. Galilée répondit qu'il ne fallait voir, dans son hypothèse de la possibilité d'une forme circulaire de la trajectoire absolue, qu'un caprice et une bizarre fantaisie.

Mais, si l'on fait abstraction de la contradiction avec l'expérience, ce caprice n'est nullement une absurdité. Il implique seulement que, théoriquement, Galilée ne regardait point la loi des carrés des temps comme d'une rigueur absolue, c'est-à-dire qu'il doutait si la pesanteur restait constante, malgré les variations de distance au centre de la terre. Était-il capable de déterminer la loi de variation de la pesanteur satisfaisant à la condition d'une forme circulaire pour la trajectoire absolue? C'est bien douteux ; cependant on ne peut se prononcer d'une façon assurée pour la négative, car Galilée a été loin de publier toutes ses idées. Or je suis, pour ma part, de l'opinion de Libri, que la conception des *indivisibles* (²) lui appartient et que l'on doit au plus hésiter sur la question de savoir jusqu'à quel point il l'avait développée.

En tout cas, en supposant, bien entendu, l'indépendance des mouvements comme il l'admet dans les *Massimi Sistemi*, il est aisé de reconnaître que, pour que la trajectoire absolue soit circulaire, il faut que la pesanteur soit proportionnelle à la distance au centre. Or, il est remarquable que Galilée ait précisément admis avec grande faveur l'opinion de Beaugrand sur une telle proportionnalité, et cela malgré les paralogismes évidents commis par Beaugrand dans sa prétendue démonstration.

Si le *caprice* de Galilée doit s'expliquer, comme le dit M. Wohlwill, par un trait de caractère du grand penseur, et aussi par le parti polémique qu'il tire de sa fantaisie, il me semble que les remarques qui précèdent en peuvent mieux faire comprendre le point de départ et aussi la véritable portée.

Pour en revenir à Cavalieri, je dirais aussi que M. Wohlwill montre peut-être un peu trop d'indulgence à son égard. Le fait

---

(¹) Il s'est occupé de la *spirale de Galilée* (voir *Œuvres de Fermat*, Paris, Gauthier-Villars, t. III, p. 70; 1896).

(²) En 1632, Cavalieri n'avait encore rien publié sur ce sujet; Galilée était cependant au courant du projet de la *Geometria indivisibilium*.

d'avoir imprimé une proposition qu'il savait appartenir à Galilée et dont il ne pouvait douter que celui-ci ne voulût se réserver la publication, était au moins une indiscrétion; en prévenant le lecteur qu'il devait *en partie* ce qu'il allait dire aux enseignements de Castelli et aux communications de Galilée, il aggravait son tort; car ce qui lui appartenait en propre, c'était au plus une démonstration facile à trouver et qui ne pouvait différer de celle même de Galilée. Celui-ci fut blessé, puis il pardonna devant des excuses qui rachetaient la faute. Nous pouvons bien aussi l'excuser, mais elle n'en reste pas moins réelle.

PAUL TANNERY.

A. BOUCHÉ-LECLERCQ. — L'ASTROLOGIE GRECQUE. XX-658 p. gr. in-8°; Ernest Leroux, Paris; 1899.

Dans la préface de mes *Recherches sur l'histoire de l'Astronomie ancienne*, j'écrivais, il y a sept ans, que l'histoire de l'Astrologie restait entièrement à faire, et que l'on ne pouvait même pas dire que le premier canevas en fût tracé.

Aujourd'hui cette lacune est comblée, et je dois d'ailleurs déclarer qu'elle l'est d'une façon qui dépasse ce que je considérais comme immédiatement possible. C'est que M. Bouché-Leclercq a eu la grande sagesse de savoir délimiter son sujet; il s'est borné, en principe, à le considérer dans l'antiquité classique et à ne tenir compte que des ouvrages astrologiques imprimés. Dans son *Histoire de la Divination*, il avait déjà prouvé qu'il était capable d'épuiser un sujet ainsi délimité, quelque vaste qu'il fût; et l'on ne peut que se féliciter si, par surcroît, il a ajouté quelques *excursus* indiqués par la nature du sujet, mais pour lesquels il devait recourir à de nouvelles sources.

Le savant professeur à la Faculté des Lettres de Paris met quelque coquetterie à ne pas être pris pour un mathématicien; il a su, en tout cas, s'assimiler toutes les connaissances nécessaires pour bien comprendre sa matière et pour l'expliquer clairement et exactement. Je dirai même que, par exemple, les figures qu'il a tracées, *proprio Marte*, pour rendre compte des apparences des

mouvements planétaires, mériteraient amplement d'être adoptées dans l'enseignement des lycées pour la Cosmographie, si, ce que je crains fort, cet enseignement est resté ce que je l'ai connu. Notez que, dans les questions de détail que M. Bouché-Leclercq avait à traiter, plus d'une exige une réflexion attentive, et qu'une erreur y serait bien pardonnable, même à un professionnel. Mais si l'on en trouve une dans son Livre (et pour ma part, au point de vue mathématique, je n'en ai découvert qu'une seule), ce sera précisément une de ces inadvertances que l'on passe à tout le monde, sauf aux enfants de l'école primaire (1).

Il y a cependant des lecteurs que M. Bouché-Leclercq ne contentera pas. Ce sont ceux qui voudraient apprendre dans son livre à pratiquer l'Astrologie. Ils feront encore mieux de le lire que de recourir au *Tetrabiblos* de Ptolémée; mais il n'est peut-être pas inutile que j'explique pourquoi ils ne seront pas beaucoup plus avancés.

Dans tout procédé de divination, susceptible de conquérir la vogue, il y a, comme en cartomancie, le petit jeu et le grand jeu. Le petit jeu repose sur un petit nombre de combinaisons aisées, auxquelles on n'a à appliquer que des règles faciles à retenir, mais on n'obtient que des réponses vagues ou banales. Le grand jeu approche d'autant plus de l'idéal divinatoire que les combinaisons sont en nombre plus considérable, et que les règles sont plus compliquées. Le devin, et c'est là son art, peut alors choisir arbitrairement telle règle ou telle combinaison pour prédire ce qui convient, et pour corriger successivement ce qu'il a déjà dit. Si plus tard l'événement le dément, sa réponse est prête; son art est sérieux et impeccable; mais l'homme peut se tromper; il a oublié telle considération dont l'importance est cependant bien reconnue.

Nul procédé de divination ne peut certainement lutter sous ce rapport avec le grand jeu de la généthliaque, tel que l'enseigne Ptolémée; les combinaisons sont en nombre réellement illimité, et les règles forment le fouillis le plus inextricable. Évidemment c'est un simple trompe-l'œil; jamais aucun praticien ne s'est

(1) Page 7 : « Il fallait savoir que le nombre 10 est, après l'unité, le premier nombre qui soit composé de deux moitiés impaires. » C'est probablement là d'ailleurs une phrase empruntée; mais je n'ai pu deviner à qui elle l'était.

assimilé la totalité d'une pareille théorie ; mais chacun pouvait y puiser suivant sa fantaisie, et, en cas de besoin, le Livre du maître était là, susceptible de fournir aux accusations portant contre l'art une riposte décisive. De la sorte, l'Astrologie put régner quinze cents ans ; et si son système n'avait pas postulé l'immobilité de la Terre, nous n'en serions peut-être pas encore débarrassés.

Après Ptolémée, et en dehors de lui, nous n'avons ou bien que des auteurs qui cherchent à l'imiter, ou bien des manuels tout à fait enfantins pour le petit jeu astrologique, savoir si le moment est propice pour telle ou telle action. Le degré intermédiaire fait défaut ; pour apprendre à pratiquer effectivement l'Astrologie à la façon des Grecs, il faudrait étudier un certain nombre de thèmes et, à côté, les prédictions réellement faites. Cela est possible dans une certaine mesure, au moins pour l'Astrologie de la Renaissance ; mais pour l'antiquité, il faut y renoncer, à moins que l'on n'admette que les Byzantins aient conservé les traditions classiques et que les inédits que recherchent actuellement MM. Cumont, Boll et Kroll, ne fournissent pour la période byzantine des documents qui nous manquent jusqu'à présent.

Avant Ptolémée, les matériaux sont insuffisants pour résoudre sûrement un certain nombre de questions capitales ; en tout cas, M. Bouché-Leclercq a su en tirer un assez bon parti pour établir un point important, à savoir que la perfection de l'Astrologie (au sens que j'ai indiqué) est en grande partie due à Ptolémée. Il semble certainement, dans son *Tetrabiblos,* s'être montré novateur beaucoup plus original et réformateur beaucoup plus hardi que dans la *Syntaxe.*

Mais d'où vient l'Astrologie ? quelles sont ses premières origines ? M. Bouché-Leclercq fait preuve, vis-à-vis des légendes consacrées, d'un scepticisme radical. Il prétend réduire au minimum les connaissances astronomiques des Égyptiens et des Chaldéens ; il croit que leurs procédés divinatoires étaient restés tout à fait dans les limbes, que l'élaboration presque complète en est due à une aberration du génie grec, entraîné par sa croyance instinctive à l'unité du monde et par le goût pour les spéculations mystiques sur les nombres et les figures (pythagorisme). Il reconnaît d'ailleurs très nettement qu'avant leur contact plus intime avec l'Orient, les Grecs ne supposaient aux astres que des influences

météorologiques, mais après les conquêtes d'Alexandre, si les peuples hellénisés ont fourni la matière, ce sont les Hellènes qui ont donné la forme.

J'estime que M. Bouché-Leclercq a eu grandement raison de réagir vigoureusement contre les exagérations dont la tradition courante a tant de peine à se défaire. Mais n'a-t-il pas été trop loin? Je pense pour ma part que ses doutes, relatifs à certaines connaissances astronomiques des Chaldéens, ne sont pas suffisamment justifiés. Mais surtout pour l'Astrologie, l'heure n'est pas venue de discuter à fond la question, alors qu'il existe encore tant d'écritures cunéiformes qui n'ont pas été déchiffrées, et que, d'un moment à l'autre, les conclusions aujourd'hui les plus plausibles peuvent être mises à néant par une découverte inattendue. Dans l'état actuel de nos connaissances, M. Bouché-Leclercq a surtout raison d'insister sur les faits suivants : Petosiris, Necepsos, Manéthon, qui représentent la tradition astrologique égyptienne, sont des noms servant d'enseigne à des écrits apocryphes dont les auteurs ont reçu la culture grecque; les Chaldéens qui ont circulé dans l'Empire romain comme astrologues viennent sans doute de tout autre pays que de la Chaldée; enfin, les écritures cunéiformes astrologiques déchiffrées jusqu'à présent nous révèlent bien des procédés analogues à ceux des Grecs, mais sous les Arsacides ou au plus tôt sous les Séleucides, c'est-à-dire après Alexandre. Quant aux Chaldéens antérieurs, chez qui les noms des étoiles semblent avoir été plus ou moins différents, on est encore loin d'avoir débrouillé leur Ciel; il devient cependant probable que leurs constellations zodiacales sont l'origine de celles des Grecs; en tout cas on n'a encore rien rencontré qui ressemble à la généthliaque; l'astrologie se borne à observer des conjonctions et des oppositions et surtout les circonstances des éclipses dont elle tire des présages d'intérêt général et non particulier; c'est un sujet qui, à l'époque grecque, passe tout à fait au dernier plan.

Il n'en est pas moins vrai que, si le nom de Chaldéen est devenu, dans l'antiquité, synonyme d'astrologue, il a bien fallu que les Chaldéens aient eu une astrologie à eux, et le problème du départ à faire entre cette astrologie et la grecque, qui est en tout cas postérieure, ne peut guère être tranché actuellement. Si M. Bouché-Leclercq a porté une lumière inattendue sur quelques points, par

exemple en montrant que, selon toute probabilité, l'origine de la semaine (avec les jours dénommés d'après les planètes) ne remonte pas beaucoup au delà de notre ère, il ne reste encore que trop d'incertitudes sur nombre d'autres questions non moins importantes.

L'auteur aura en tout cas pleinement atteint le double but qu'il s'était proposé : constituer un répertoire commode pour la claire explication des termes astrologiques employés dans l'antiquité, termes dont il faut connaître le sens exact pour comprendre nombre de documents importants pour l'histoire de l'Astronomie; raconter, sous une forme attrayante, malgré l'aridité des détails, l'histoire de cette singulière maladie de l'esprit humain à laquelle si peu de mathématiciens ont échappé, à partir de son invasion, que le nom de leur science, l'*ars mathematica*, est précisément, dans l'antiquité, devenu celui de l'Astrologie.

PAUL TANNERY.

KIEPERT (L.). — GRUNDRISS DER DIFFERENTIAL UND INTEGRAL-RECHNUNG. II. Theil : *Integral-Rechnung. Siebente verbesserte und vermehrte Auflage des gleichnamigen Leitfadens*, von D[r] *Max Stegemann*. 1 vol. in-8°, XX-617 p. Helwingsche Verlagsbuchhandlung; 1899.

La dernière édition de ce Traité ne remonte qu'à trois ans; c'est la meilleure preuve de la faveur dont il jouit dans le public pour lequel il a été écrit. M. Kiepert ne signale d'ailleurs qu'un petit nombre de changements sur la sixième édition; mais, dans la préface, il fait un pressant appel aux techniciens pour que ceux-ci veuillent bien lui signaler les défauts ou les lacunes de son Livre : cet appel mérite d'être signalé et cette opinion que, pour écrire un livre de ce genre, la collaboration entre le savant et l'ingénieur est très désirable, contient sans doute une grande part de vérité; ce qui intéresse l'un n'est pas toujours ce qui intéresse l'autre; s'il appartient sûrement au premier d'établir les propositions fondamentales et de coordonner les matières qu'il traite, il appartient aux praticiens de dire quelles choses leur servent effectivement, quelles parties il faut élaguer, malgré leur intérêt

théorique, vers quel but il faut diriger le lecteur. Et il est vrai aussi que les collaborateurs de cette dernière sorte doivent être multiples, parce que les besoins des uns ne sont pas ceux des autres; grâce à leur concours, s'ils veulent l'apporter, l'ancien manuel de Stegemann, que M. Kiepert a déjà singulièrement amélioré, et dont le remaniement est facile puisqu'il continuera sans doute de s'écouler aussi rapidement, pourrait rendre encore de meilleurs services. J. T.

MÉLANGES.

SUR UNE RELATION GÉOMÉTRIQUE ENTRE DEUX COURBES;

PAR M. N.-J. HATZIDAKIS.

Les normales aux différents points d'une courbe c qui font avec les normales principales, aux points correspondants, un angle constant le long de la courbe, peuvent-elles être *normales principales* ou *binormales* d'une autre courbe c'?

Premier cas. — En posant $MM' = a$, on aura, pour des coordonnées relatives de M' par rapport au trièdre de M : o, $a\cos\theta$, $a\sin\theta$, θ désignant l'angle constant mentionné. Les projections de la vitesse relative de M' sur les axes du trièdre de M seront (Darboux, *Surfaces*, t. I, p. 8)

$$V'_x = 1 - ar\cos\theta, \qquad V'_y = -ap\sin\theta, \qquad V'_z = ap\cos\theta,$$

car a doit être évidemment constant, si la droite MM' est perpendiculaire à la vitesse de M', ce qui est une condition nécessaire.

Le trièdre de c, dans une position quelconque, deviendra parallèle au trièdre de c', si on le fait tourner d'abord autour de la tangente Mx jusqu'à ce que la normale principale My coïncide avec MM', et ensuite autour de MM' jusqu'à ce que Mx devienne parallèle à $M'x'$.

Si donc nous concevons un trièdre *intermédiaire* $xy'z_1$, qui

résulte après avoir fait tourner seulement autour de Mx, on aura, pour les rotations p_1, q_1, r_1 de ce dernier trièdre,

$$p_1 = p + \frac{d\theta}{ds} = p,$$

$$q_1 = q\cos\theta + r\sin\theta = r\sin\theta,$$

$$r_1 = -q\sin\theta + r\cos\theta = r\cos\theta.$$

Mais nous avons, d'un autre côté,

$$p' = p_1\cos\omega + r_1\sin\omega, \qquad q' = q_1 - \frac{d\omega}{ds}, \qquad r' = -p_1\sin\omega + r_1\cos\omega,$$

$$\omega = \text{angle}(Mx, M'x');$$

on aura donc, en remplaçant,

$$(1) \qquad \begin{cases} p' = p\cos\omega + r\cos\theta\sin\omega, \\ r\sin\theta = -\dfrac{d\omega}{ds}, \\ r' = -p\sin\omega + r\cos\theta\cos\omega. \end{cases}$$

On a ainsi les deux rotations p', r' en fonction des courbures p, r de M [1].

L'angle ω peut être exprimé en fonction de p, r, a et θ; en effet, on a

$$(2) \qquad V'\cos\omega = 1 - ra\cos\theta, \qquad V'\sin\omega = -V'_y\sin\theta + V'_z\cos\theta = ap,$$

d'où

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\omega = \frac{ap}{1 - ar\cos\theta}.$$

Remarquons que l'on a aussi

$$\omega = -\sin\theta\int r\,ds + \text{const}.$$

[1] On a supposé ici $\theta < \frac{\pi}{2}$, $\omega < \frac{\pi}{2}$, que les sens positifs des trièdres ont la même orientation et que la projection de la vitesse V' sur le plan yz fait un angle aigu avec Mz; dans le *second cas*, $\theta < \frac{\pi}{2}$, $\omega < \frac{\pi}{2}$, les sens positifs des trièdres sont supposés d'orientation contraire et que la projection de la vitesse V sur le plan yz fait un angle aigu avec My. Si l'on change ces conditions, on doit changer aussi quelques signes dans les formules.

On tire des égalités (2)

$$(4)\qquad V'^2 = \frac{ds'^2}{ds^2} = (1 - ra\cos\theta)^2 + a^2p^2.$$

On a maintenant

$$p' = -\frac{V'}{\tau'}, \qquad r' = +\frac{V'}{\rho'},$$

et comme, (2),

$$\frac{1}{V'} = \frac{\sin\omega}{ap},$$

il vient, (1),

$$(5)\qquad \begin{cases} \tau' = \dfrac{a\rho}{\sin\omega(\cos\theta\sin\omega)(\tau - \cos\omega)(\rho)}, \\[2ex] \rho' = \dfrac{-a\rho}{\sin\omega(\sin\omega)(\rho - \cos\theta\cos\omega)(\tau)}. \end{cases}$$

On a ainsi les deux courbures de c′ en fonction de celles de c et de a, ω, θ; ou bien, à cause de (3),

$$(6)\qquad \begin{cases} \tau' = \tau\left[\left(1 - \dfrac{a\cos\theta}{\rho}\right)^2 + \dfrac{a^2}{\tau^2}\right], \\[2ex] \rho' = \dfrac{-\rho^2\tau^2\left[\left(1 - \dfrac{a\cos\theta}{\rho}\right)^2 + \dfrac{a^2}{\tau^2}\right]}{a(\rho^2 + \cos^2\theta)(\tau^2) - \cos\theta(\tau^2\rho)}. \end{cases}$$

La courbe c n'est pas tout à fait arbitraire; en effet, on a, (1) et (3),

$$r\sin\theta = \frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tang}\frac{ap}{1 - ra\cos\theta},$$

ou bien

$$(7)\qquad \frac{\tau^2}{a\rho}\sin\theta\left[\left(1 - \frac{a\cos\theta}{\rho}\right)^2 + \frac{a^2}{\tau^2}\right] = \frac{d\tau}{ds} - \frac{a\cos\theta}{\rho^2}\left(\tau\frac{d\rho}{ds} - \rho\frac{d\tau}{ds}\right),$$

équation différentielle qui définira la courbe c, quand a, θ seront donnés. On en tire

$$(8)\qquad \varphi(\rho, \tau, c) = 0.$$

La courbe c′ n'est pas, non plus, tout à fait arbitraire, car ses deux rayons ρ', τ' sont liés, (6), aux rayons de c; si donc on élimine, entre (6) et (8), les quantités ρ, τ, on aura une équation de la forme $f(\rho', \tau', c) = 0$.

Des cas particuliers très intéressants sont les deux suivants :

1° $\theta = 0$. Alors *les normales principales des deux courbes coïncident*. On retrouve les courbes de M. Bertrand (DARBOUX, t. I, p. 13 et suiv.). Et, en effet, l'équation (7) devient alors

$$\frac{d\tau}{ds} = -\frac{a}{\rho^2}\left(\tau\frac{d\rho}{ds} - \rho\frac{d\tau}{ds}\right),$$

ou bien, en intégrant,

$$1 = \frac{a}{\rho} - \frac{b}{\tau}.$$

On trouve, en outre, $\omega =$ const., etc.

Remarquons qu'en supposant $\omega =$ const., on a de nouveau le cas de M. Bertrand, ou bien le cas évident d'une droite c et d'une hélice cylindrique c', (1) et (5).

2° $\theta = \frac{\pi}{2}$. *La binormale de c coïncide avec la normale principale de c'*; on a ainsi les courbes c' de M. Mannheim (voir *Comptes rendus,* novembre 1877, ou *Intermédiaire des Mathématiciens,* mai et juillet 1899). *Les deux courbures de c' sont liées par une équation algébrique du second degré d'une forme particulière.* ... (Voir *second cas*).

Second cas. — Nous allons maintenant considérer le cas où les normales aux différents points d'une courbe c qui font, avec les normales principales aux points correspondants, un angle constant le long de la courbe, sont binormales d'une autre courbe c'.

En posant $MM' = a$, et θ' désignant l'angle constant mentionné, on aura, pour les projections de la vitesse relative de M' sur les axes du trièdre de c,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &V'_x = 1 - ar\sin\theta, \qquad V'_y = -ap\cos\theta, \qquad V'_z = ap\sin\theta \\ &\qquad\qquad \left(\theta = \frac{\pi}{2} - \theta'\right), \end{aligned}\right.$$

puisqu'on aura $a =$ const.

Le trièdre de c, dans une position quelconque, deviendra parallèle au trièdre de c', si on le fait tourner d'abord autour de la tangente Mx jusqu'à ce que la binormale Mz coïncide avec MM'.

et ensuite autour de MM′ jusqu'à ce que Mx devienne parallèle à M′x'. Il suffit donc de considérer un trièdre *intermédiaire* xy_1z' pour avoir, pour les rotations p_1, q_1, r_1 de ce dernier trièdre,

$$\begin{aligned}
p_1 &= p + \frac{d\theta}{ds} = p,\\
q_1 &= q\cos\theta - r\sin\theta = -r\sin\theta,\\
r_1 &= q\sin\theta + r\cos\theta = r\cos\theta,
\end{aligned}$$

puisque $q = 0$.

Mais, d'un autre côté,

$$p' = p_1\cos\omega + q_1\sin\omega, \qquad r' = r_1 + \frac{d\omega}{ds}, \qquad q' = -p_1\sin\omega + q_1\cos\omega,$$

d'où, en remplaçant, il vient

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
p' &= p\cos\omega - r\sin\theta\sin\omega,\\
r' &= r\cos\theta + \frac{d\omega}{ds},\\
q' &= 0 = -p\sin\omega - r\sin\theta\cos\omega,\\
\omega &= \text{angle}(\text{M}x,\ \text{M}'x').
\end{aligned}\right.$$

Des équations (2) on tire

$$(3)\qquad \operatorname{tang}\omega = -\frac{r}{p}\sin\theta,$$

mais, comme on trouve aussi des égalités (1),

$$(4)\qquad \operatorname{tang}\omega = \frac{ap}{1 - ar\sin\theta},$$

il vient

$$(5)\qquad r\sin\theta = a(p^2 + r^2\sin^2\theta),$$

c'est-à-dire

$$(5')\qquad \frac{\sin\theta}{\rho} = a\left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\right).$$

L'équation algébrique du second degré (5′) *doit donc être vérifiée par les deux courbures de la courbe* M.

Il est facile de montrer que, réciproquement, *toute courbe satisfaisant à l'équation* (5′) *a la propriété géométrique indiquée.* Nous omettons la démonstration à cause du manque de place.

Comme on a

$$p = \frac{V}{\tau}, \qquad r = \frac{V}{\rho},$$

il vient, des relations (2),

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\tau} = -\dfrac{\sin\omega}{a\dfrac{1}{\tau}}\left(-\dfrac{\cos\omega}{\tau} + \dfrac{\sin\omega}{\rho}\sin\theta\right), \\[2ex] \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{\sin\omega}{a\dfrac{1}{\tau}}\left(\dfrac{\cos\theta}{\rho} - \dfrac{d\omega}{ds}\right), \end{cases}$$

puisque, (1),

$$(1')\qquad V = -\frac{ap}{\sin\omega}.$$

L'équation (3) nous donne

$$\sin\omega = \frac{-r\sin\theta}{\sqrt{p^2 + r^2\sin^2\theta}}, \qquad \cos\omega = \frac{p}{\sqrt{p^2 + r^2\sin^2\theta}}$$

et

$$\frac{d\omega}{ds} = \sin\theta\,\frac{p\dfrac{dr}{ds} - r\dfrac{dp}{ds}}{p^2 + r^2\sin^2\theta};$$

donc on a, (6),

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{\sin\theta}{a}\,\dfrac{\tau}{\rho}, \\[2ex] \dfrac{1}{\rho} = -\dfrac{\tau^2\sin\theta}{a\sqrt{\rho^2 - \tau^2\sin^2\theta}}\left(\dfrac{\cos\theta}{\rho} - \sin\theta\,\dfrac{\tau\dfrac{d\rho}{ds} - \rho\dfrac{d\tau}{ds}}{\rho^2 - \tau^2\sin^2\theta}\right). \end{cases}$$

Donc, *des deux rayons de la courbe c', celui de torsion s'exprime en fonction des ρ, τ de c* [*ou bien*, (5′), *en fonction de ρ seul*] *et des a et θ, celui de courbure, au contraire, au moyen des ρ, τ, $\frac{d\rho}{ds}$, $\frac{d\tau}{ds}$, a, θ.*

Les quantités a, θ données, aucune des deux courbes n'est *tout à fait* arbitraire : en effet, la courbe c est définie par l'équation algébrique (5′); la courbe c' doit vérifier une équation différentielle entre ses deux rayons, que l'on trouvera en éliminant, entre (5′) et les intégrales de (7), ρ, τ. Nous l'omettons ici.

Deux cas particuliers remarquables sont les suivants :

1° $\theta = 0$. Les binormales des deux courbes coïncident, et, comme on a, (2), $p \sin \omega = 0$, on aura

$$\text{ou} \quad p = 0, \quad \text{ou bien} \quad \sin \omega = 0;$$

$p = 0$ donne aussi $p' = 0$, et les deux courbes sont planes ; on a, (4), aussi $\omega = 0$, d'où $r' = r$; les courbes sont égales, puisqu'on a, en général, (1),

$$ds'^2 = ds^2[(1 - ar \sin \theta)^2 - a^2 p^2],$$

et ici, par suite, $ds' = ds$ (a reste indéterminé). *Les courbes sont des sections planes d'une surface cylindrique générale*, résultat évident aussi *a priori*.

Si $\omega = 0$, $p \gtrless 0$, on a aussi, (4) ou (1′), $a = 0$. Les deux courbes coïncident, ce qu'on pourrait aussi trouver d'avance.

2° $\theta = \frac{\pi}{2}$. La binormale de c' coïncide avec la normale principale de c. La courbe c est *une courbe de M. Mannheim* et l'équation (5′) devient bien l'équation de ces courbes :

$$\frac{1}{\rho} = a\left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\rho^2}\right).$$

(*Cf.* Premier cas).

Remarque. — Nous avons eu connaissance, après la rédaction des lignes précédentes, d'un Article de M. E. Cesàro, qui traite la même question (un peu généralisée) par une méthode différente (voir *Mathésis*, janvier 1900).

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Ernst SCHRÖDER. — Algebra der Logik. t. I, xii-717 p.; 1890. T. II, 1re Partie, xiv-400 p.; 1891. Leipzig, Teubner.

M. Schröder, l'auteur bien connu d'un *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* (1873), a consacré un gros Ouvrage (et une grande partie de sa vie) à développer le Calcul logique de Boole, à le corriger, à le perfectionner, et à en faire une Science indépendante et complète ([1]). Nous ne nous étendrons pas ici sur les raisons philosophiques qui rendent ce système utile et même nécessaire au progrès de la Logique, et que l'auteur a exposées tout au long dans une *Introduction* de 125 pages. Nous nous proposons simplement de faire connaître cette nouvelle Algèbre aux Mathématiciens, de leur en expliquer les principes, les définitions et les règles fondamentales.

Voici comment la Logique est devenue susceptible d'un traitement mathématique, et a donné naissance à cette Algèbre. Tout jugement catégorique (à copule *est*) exprime un rapport d'inclusion ou d'exclusion entre deux concepts : or chaque concept a une *extension*, c'est-à-dire détermine une certaine classe d'objets auxquels il s'applique. Donc, au point de vue de l'extension, le rapport d'inclusion de deux concepts se traduit par le rapport d'inclusion des classes correspondantes. Dire « tout a est b », c'est affirmer que la classe a est contenue dans la classe b. On exprimera cette relation de contenu à contenant par un signe approprié ([2]), et l'on écrira

$$a < b \text{ } ([3]).$$

Telle est la relation fondamentale de la Logique selon M. Schröder

([1]) C'est ce que l'Auteur avait commencé à faire dans son opuscule : *Der Operationskreis des Logikkalkuls*, 37 pages (Leipzig, Teubner, 1877).

([2]) Le signe employé par M. Schröder est formé par la réunion du signe d'égalité et du signe d'inclusion proprement dite (analogue au signe d'inégalité $<$). Comme nous n'aurons jamais besoin de ce dernier, nous l'employons pour désigner la relation générale d'inclusion.

([3]) Qu'on peut lire : « a dans b ».

(§§ 1, 2). Elle jouit de deux propriétés essentielles qui constituent les deux principes de l'Algèbre de la Logique :

I. $$a < a.$$

« (Tout) a est a. » C'est le *principe d'identité*.

II. Si $a < b$ et $b < c$, il en résulte

$$a < c.$$

C'est le *principe du syllogisme* (en *Barbara*).

Il va sans dire que la relation d'inclusion (de *subsomption*) n'exclut pas l'*identité :* dire que tout a est b, ce n'est pas affirmer que tout b est a, mais ce n'est pas non plus affirmer qu'il y a d'autres b que les a (des b qui ne sont pas a).

Il est clair que les deux classes a et b seront identiques, si tout a est b et si tout b est a. D'où la définition formelle de l'égalité logique (ou identité) :

« Si $a < b$ et $b < a$, on a $a = b$, et réciproquement. »

De cette définition et du principe d'identité, il résulte que

$$a = a.$$

De la même définition et du principe du syllogisme résultent les propositions suivantes :

« Si $a < b$, et $b = c$, on a $a < c$. »

« Si $a = b$, et $b < c$, on a $a < c$. »

« Si $a = b$, et $b = c$, on a $a = c$ (§ 4). »

Comme on le voit, les concepts sont représentés dans le calcul, ou plutôt remplacés par les *classes* qui constituent leur extension, c'est-à-dire par des ensembles d'objets ou d'individus quelconques (qui forment ce qu'on appelle en Logique des espèces et des genres). La relation de l'espèce au genre est ramenée à la relation (purement extensive) du contenu au contenant. Le Calcul logique n'est donc pas autre chose que le Calcul des ensembles considérés au point de vue de leur inclusion ou exclusion relative (1).

---

(1) On remarquera que la théorie des ensembles pourrait s'exprimer commodément et avec avantage au moyen des notations de la Logique. La relation $<$ a déjà été adoptée par MM. Cantor et Dedekind. De même, on verra que ces auteurs ont employé les notions de *somme* et de *produit* logiques, sous une notation différente.

D'autre part, la théorie des ensembles trouve une interprétation naturelle et une application intuitive en Géométrie, dans l'étude des « domaines » ou « ensembles de points »; ceux-ci peuvent donc servir de schèmes aux classes, et par suite aux concepts correspondants. Ce schématisme avait déjà été employé par Euler, qui figurait l'extension des concepts par des cercles qui s'emboîtent ou se coupent mutuellement. Ainsi, à côté de son interprétation logique, la nouvelle Algèbre comporte des applications variées à la théorie des ensembles et à la Géométrie (§ 3).

Nous allons maintenant définir les trois opérations fondamentales de la Logique. Les deux premières, qui sont des combinaisons de deux termes, s'appellent *multiplication* et *addition,* en vertu de leur analogie formelle avec les opérations arithmétiques de même nom ([1]).

La *somme* de deux classes a et b est l'ensemble des objets contenus dans l'une ou l'autre de ces classes. On la définira donc formellement comme suit :

« Si $a < c$ et $b < c$, on a $a + b < c$, et réciproquement. »

Cela signifie que toute classe c qui contient à la fois a et b contient leur somme $a + b$; et réciproquement.

Le *produit* de deux classes a et b est l'ensemble des objets contenus à la fois dans l'une et dans l'autre (communs à toutes deux). On le définira donc formellement comme suit :

« Si $c < a$ et $c < b$, on a $c < ab$. »

Cela veut dire que toute classe c contenue à la fois dans a et dans b est contenue dans leur produit ab; et réciproquement ([2]) (§ 5).

Il convient de définir en même temps deux classes particulières, qui joueront le rôle de *modules* de l'addition et de la multiplica-

---

([1]) On les désignera aussi par les mêmes signes algébriques.

([2]) On remarquera que ces notions de *somme* et de *produit* coïncident respectivement avec les notions du *plus petit commun multiple* et du *plus grand commun diviseur* de deux ensembles (de M. Cantor, ap. *Mathematische Annalen,* t. XVII et XXI) et avec celles que M. Dedekind désigne par $\mathfrak{M}(A, B, \ldots)$ et $\mathfrak{G}(A, B, \ldots)$ ap. *Was sind und was sollen die Zahlen?* n°s 8 et 17 (Braunschweig, Vieweg, 1887). M. Cantor indique par le signe + la somme de plusieurs ensembles, quand ils sont deux à deux sans connexion (n'ont aucun élément commun). C'est la *somme* logique telle que la concevait Boole; mais cette restriction est inutile et même fâcheuse, comme le montre M. Schröder (§ 18).

tion, et que, par suite de cette analogie formelle, on représentera respectivement par les chiffres 0 et 1.

En voici la définition formelle :

$$0 < x, \qquad x < 1,$$

quel que soit x ; c'est-à-dire que 0 est une classe contenue dans toutes les autres, et que 1 est une classe qui contient toutes les autres (§ 4). Il est aisé de voir que la classe 1 contient la totalité des objets dont il peut être question dans une étude ou une recherche déterminée : c'est ce que Boole appelait l'Univers du discours. M. Schröder montre que cette notion est trop large et trop vague, et il la précise par des considérations que nous ne pouvons résumer ici. Quant au 0, il résulte des mêmes considérations qu'il ne peut être qu'une classe vide de tout élément, le Néant (logique) (§§ 7, 9). On démontre alors aisément que les inclusions

$$x < 0, \qquad 1 < x,$$

équivalent respectivement aux égalités

$$x = 0, \qquad 1 = x,$$

c'est-à-dire qu'une classe contenue dans 0 est identiquement nulle, et qu'une classe qui contient 1 équivaut au Tout (§ 4).

De la définition de la somme et du produit résultent immédiatement les formules suivantes :

$a < a + b,$	$ab < a,$
$b < a + b,$	$ab < b,$

en vertu du principe d'identité (en remplaçant respectivement c par $a + b$ ou par ab dans cette définition). Ainsi une somme contient chacun de ses termes ; et, au contraire, un produit est contenu dans chacun de ses facteurs (§ 5).

On conçoit sans peine que les notions de somme et de produit s'étendent à un nombre quelconque de termes ou de facteurs.

On a dû remarquer, dans les définitions de la somme et du produit, et dans celles de 0 et de 1, une symétrie parfaite ; il est évident que cette symétrie devra persister dans toutes les conséquences qu'on en pourra déduire. Cette symétrie se ramène à

l'identité formelle, si l'on permute les signes + et ×, les chiffres 0 et 1, et si l'on renverse le signe < (ou si l'on intervertit les deux membres d'une inclusion). Par suite, de chaque formule on devra déduire une formule équivalente (c'est-à-dire également vraie ou également fausse) en effectuant sur elle cet ensemble de transformations. C'est en cela que consiste le *principe de dualité* en Logique [1]. Il permet, comme on voit, de se dispenser de démontrer une formule quand on a établi la formule corrélative par dualité (comme en Géométrie projective) (§ 14).

On prouve facilement que les deux opérations logiques vérifient la loi commutative et la loi associative. Elles jouissent en outre de propriétés spéciales fort remarquables, qui apportent une simplification notable dans les calculs. Ce sont :

1° La *loi de tautologie* (Boole, Jevons) :

$$a + a = a. \quad \Big| \quad aa = a.$$

2° La *loi d'absorption* (dont la précédente est un cas particulier) :

$$a + ab = a, \quad \Big| \quad a(a + b) = a.$$

On établit encore une relation fondamentale entre les deux copules < et =, qui permet de transformer une inclusion en une égalité (de deux manières corrélatives), et inversement :

« L'inclusion

$$a < b$$

équivaut à chacune des égalités

$$a = ab. \quad \Big| \quad a + b = b.$$

Cette proposition a des corollaires très importants, qui déterminent le rôle de 0 et de 1 dans le calcul. On a en effet, quel que soit x,

$$0 = 0 \times x, \quad \Big| \quad x + 1 = 1.$$

On a d'autre part

$$x + 0 = x, \quad \Big| \quad x \times 1 = x,$$

---

[1] Comme M. Schröder, nous écrirons les formules corrélatives par dualité sur la même ligne en les séparant par un trait vertical.

ce qui montre, comme nous l'avons dit, que o et 1 sont les modules de l'addition et de la multiplication (§§ 10, 11).

On peut enfin établir la loi distributive pour l'inclusion, dans le sens direct :

$$ab + ac < a(b + c), \qquad a + bc < (a + b)(a + c).$$

Mais on ne peut pas démontrer les inclusions inverses, ni par suite la loi distributive pour l'égalité

$$ab + ac = a(b + c), \qquad a + bc = (a + b)(a + c).$$

C'est ce que M. Schröder a prouvé, en montrant qu'un certain Calcul (le Calcul des groupes) vérifie tous les principes précédents et toutes les lois qui en dérivent, y compris la loi distributive directe, mais ne vérifie pas la loi distributive inverse [1].

On est donc obligé de postuler celle-ci, au moins dans un cas particulier, et de s'assurer intuitivement qu'elle est bien vérifiée par les concepts, d'une part, et par les classes, ensembles et domaines géométriques, d'autre part (§ 12).

On a dû remarquer que la loi distributive a deux formes corrélatives, c'est-à-dire que si la multiplication est distributive par rapport à l'addition (comme en Arithmétique et en Algèbre), l'addition est à son tour distributive par rapport à la multiplication. Cette réciprocité, conséquence du principe de dualité, introduit dans le Calcul logique une symétrie parfaite qui lui donne un grand avantage *esthétique* sur l'Algèbre ordinaire.

On définit enfin la troisième opération, propre au Calcul logique, la *négation :* elle ne porte que sur une classe x et la transforme en une autre classe, x_1 (non-x). Celle-ci se trouve définie d'une manière formelle par les relations suivantes :

$$xx_1 = 0, \qquad x + x_1 = 1,$$

qui traduisent respectivement le *principe de contradiction* et celui *du tiers exclu :* « Aucun objet n'est à la fois x et non-x;

(1) Voir les très intéressants *Appendices* IV, V et VI, où se trouve esquissé ce Calcul logique des groupes. *Cf.* les articles de M. Schröder dans *Math. Annalen*, t. XXIX, et dans Hoppe's *Archiv für Mathematik und Physik* (1887).

tout objet est ou x ou non-x ». On démontre que la classe x_1 ainsi définie est déterminée d'une manière unique. On prouve que x est la négation de x_1 comme x_1 est celle de x (ce qui est évident, du reste, en vertu de la symétrie des deux relations qui définissent x_1 par rapport à x), c'est-à-dire que

$$(x_1)_1 = x,$$

ce qui est la *loi de la double négation :* « Deux négations valent une affirmation ». On constate aisément que 0 et 1 sont la négation l'une de l'autre (§§ 13, 16).

On établit ensuite les *formules* fondamentales de *de Morgan :*

$$(ab)_1 = a_1 + b_1, \qquad (a + b)_1 = a_1 b_1,$$

qui montrent que la négation, appliquée à un produit, le transforme en une somme; appliquée à une somme, la transforme en produit; et qui permettent d'*effectuer* les négations complexes, en supprimant les parenthèses et en faisant porter la négation sur chaque terme ou facteur.

On démontre le *principe de la contraposition,* à savoir que l'inclusion et l'égalité

$$a < b, \qquad a = b,$$

équivalent respectivement à celles-ci :

$$b_1 < a_1, \qquad b_1 = a_1.$$

Ainsi, pour convertir par contraposition une proposition, il suffit de nier les deux membres et de les intervertir (ce qui n'a de sens, d'ailleurs, que pour la copule $<$, et non pour la copule symétrique $=$).

On peut alors établir une nouvelle relation fondamentale entre les deux copules, à savoir celle-ci :

« L'inclusion

$$a < b$$

équivaut à chacune des deux égalités

$$ab_1 = 0, \qquad a_1 + b = 1. »$$

Cette proposition (¹) a pour corollaire la suivante :

« L'égalité

$$a = b$$

équivaut à chacune des égalités suivantes :

$$ab_1 + a_1 b = 0, \qquad ab + a_1 b_1 = 1. \text{ »}$$

Cette relation permet donc de transformer une inclusion ou une égalité en une égalité à second membre 0 ou 1, c'est-à-dire de ramener les propositions à la forme normale des équations algébriques en faisant passer tous les termes dans un membre (§ 17).

Avant d'arriver à la théorie des équations logiques, signalons les formules du développement de 0 et de 1 par rapport à une, deux, ..., n classes données et à leurs négations. On a identiquement

$$0 = aa_1 + bb_1 + cc_1 + \ldots; \qquad 1 = (a + a_1)(b + b_1)(c + c_1)\ldots.$$

ce qui donne les développements corrélatifs suivants :

$$0 = (a + b)(a + b_1)(a_1 + b)(a_1 + b_1),$$
$$1 = ab + ab_1 + a_1 b + a_1 b_1,$$
$$0 = (a + b + c)(a + b + c_1)(a + b_1 + c)(a + b_1 + c_1)(a_1 + b + c)(a_1 + b + c_1)(a_1 + b_1 + c)(a_1 + b_1 + c_1),$$
$$1 = abc + abc_1 + ab_1 c + ab_1 c_1 + a_1 bc + a_1 bc_1 + a_1 b_1 c + a_1 b_1 c_1,$$

dont on aperçoit immédiatement la loi générale. Les formules du développement de 1 représentent les règles de la classification *dichotomique*, c'est-à-dire de la division d'une classe x par rapport à d'autres classes (sous-classes) a, b, ... Par exemple (§ 16) :

$$x = xab + xab_1 + xa_1 b + xa_1 b_1.$$

Nous n'avons pas besoin de dire ce que l'on entend par *fonction*

(¹) Elle a aussi pour corollaires les formules suivantes, dues à Peirce (§§ 17, 18) :

$$(ab < c) = (a < c + b_1),$$
$$(ab < c + d) = (ad_1 < c + b_1),$$

qui permettent de transporter un terme (ou facteur) d'un membre dans l'autre d'une inclusion.

(algébrique) d'une ou plusieurs classes variables ou inconnues x, y, z, ... Il suffit de remarquer que, en vertu de la loi de tautologie

$$xx = x,$$

toutes les fonctions (et équations) sont du premier degré par rapport à chacune des variables (ou des inconnues).

Voici la formule du développement d'une fonction $f(x)$ par rapport à la variable x

$$f(x) = f(1)x + f(0)x_1.$$

Pour la prouver, il suffit de poser

$$f(x) = Ax + Bx_1$$

et de faire dans cette égalité, successivement

$$x = 1, \qquad x_1 = 0,$$

et

$$x = 0, \qquad x_1 = 1.$$

On établit de même les formules analogues de développement (dues, comme la précédente, à Boole) par rapport à deux, trois, ..., n variables :

$$f(x, y) = f(1, 1)xy + f(1, 0)xy_1 + f(0, 1)x_1y + f(0, 0)x_1y_1,$$
$$\begin{aligned} f(x, y, z) = f(1, 1, 1)xyz &+ f(1, 1, 0)xyz_1 + f(1, 0, 1)xy_1z \\ &+ f(1, 0, 0)xy_1z_1 + f(0, 1, 1)x_1yz + f(0, 1, 0)x_1yz_1 \\ &+ f(0, 0, 1)x_1y_1z + f(0, 0, 0)x_1y_1z_1, \end{aligned}$$

dont on aperçoit sans peine la loi de formation ([1]).

Les fonctions ainsi développées ont cette propriété remarquable, que leur somme, leur produit et leur négation s'obtiennent en additionnant, en multipliant et en niant leurs coefficients (chacun à chacun) (§ 19).

La théorie des équations logiques se distingue de celle des équations algébriques par des caractères originaux. En premier lieu, tout système d'équations simultanées se réduit à une seule, qu'on obtient en les additionnant membre à membre : en effet,

---

([1]) Boole a remarqué l'analogie de ce développement avec la formule de Taylor, qui le lui a peut-être suggéré.

pour qu'un polynome s'annule, il faut et il suffit que tous ses termes soient nuls séparément. En second lieu, on peut éliminer d'une seule équation un nombre quelconque d'inconnues, toutes, si l'on veut. Enfin, on peut résoudre une seule équation par rapport à toutes les inconnues. Nous allons expliquer comment s'effectue la double opération de la résolution et de l'élimination.

Soit l'équation à une inconnue

$$f(x) = 0.$$

En développant le premier membre, on la met sous la forme

$$ax + bx_1 = 0.$$

Elle équivaut aux deux équations simultanées

$$ax = 0, \qquad bx_1 = 0,$$

c'est-à-dire aux deux inclusions équivalentes

$$x < a_1, \qquad b < x.$$

Ainsi l'équation donnée équivaut à la *double inclusion*

$$b < x < a_1$$

dont la conséquence nécessaire est (en vertu du principe du syllogisme)

$$b < a_1$$

ou

$$ab = 0.$$

Ainsi l'équation proposée est vérifiée par toutes les valeurs de x comprises entre b et a_1 (c'est-à-dire par toutes les classes qui contiennent b et qui sont contenues dans a_1), à la condition que b soit contenue dans a_1, ou que $ab = 0$. Cette égalité, qui exprime la condition nécessaire et suffisante de la résolubilité de l'équation, s'appelle la *résultante* de l'élimination de x. Elle formule la conséquence que l'on peut tirer, par rapport aux coefficients, de l'équation, supposée vérifiée.

D'autre part, quand la résultante est vérifiée, la solution générale de l'équation est donnée par la double inclusion

$$b < x < a_1$$

qui peut se mettre sous forme d'égalité

$$x = a_1 x + b x_1,$$

ou, en employant une indéterminée (¹) u,

$$x = a_1 u + b u_1 = b + a_1 u = a_1(b + u),$$

équivalences qui dérivent de la résultante supposée vérifiée (²).

On voit que la solution, dans le cas général, est relativement indéterminée, c'est-à-dire comprise entre deux limites connues. Elle n'est déterminée que dans le cas particulier où

$$b = a_1.$$

La solution devient alors

$$x = b = a_1.$$

Cela est évident par intuition : si l'on trace un cercle qui représente a_1 et un cercle intérieur qui représente b, toute aire contenant b et contenue dans a_1 est une solution; mais si les deux cercles b et a_1 deviennent égaux (coïncident), l'unique solution possible leur est nécessairement égale (identique) (§ 21).

Maintenant que l'on sait résoudre une équation à une inconnue et en éliminer cette inconnue, on peut résoudre une équation à plusieurs inconnues et en éliminer un nombre quelconque. On démontre aisément que l'élimination est une opération commutative et associative, de sorte que l'on peut, sans changer le résultat, intervertir l'ordre des inconnues à éliminer, et en éliminer plusieurs à la fois ou successivement. Pour éliminer toutes les inconnues ensemble, il suffit de développer le premier membre de l'équation par rapport à toutes les inconnues, et d'égaler à o le produit de tous les coefficients de ce développement (c'est là une

---

(¹) Susceptible de prendre *toutes* les valeurs, y compris o et 1.

(²) On peut définir, avec M. Voigt, la solution générale d'une équation comme l'expression qui, substituée à l'inconnue, réduit l'équation à la résultante de l'élimination de cette inconnue. Ainsi, en général, toutes les fois que la résultante est vérifiée, si l'on substitue à l'inconnue x la solution générale dans l'équation primitive, on réduit celle-ci à une identité, puisqu'elle sera vérifiée par toute valeur de l'indéterminée u. Pour employer le langage de M. Whitehead (*Universal Algebra*, n° 32) on transforme ainsi une équation *limitante* par rapport à x en une équation *illimitante* par rapport à u.

généralisation de la résultante de l'élimination d'*une* inconnue).

Pour résoudre l'équation par rapport à toutes les inconnues, on les élimine une à une, par exemple, dans l'ordre $t, \ldots, x, y, z$. On obtient ainsi une suite de *résultantes partielles* dont la dernière, ne contenant plus aucune inconnue, est identique à la *résultante totale* que nous venons de définir. Si cette dernière résultante est vérifiée, l'équation est résoluble. On résoudra donc l'avant-dernière résultante par rapport à z; on aura la valeur de cette inconnue en fonction d'une indéterminée v. On la portera dans la résultante antépénultième, qui deviendra une équation en y : on la résoudra, et on en tirera la valeur de y en fonction de v et d'une nouvelle indéterminée u. On la portera dans la résultante précédente, que l'on résoudra par rapport à x; et ainsi de suite. Enfin on remontera à l'équation proposée, où toutes les inconnues, sauf t, seront exprimées au moyen des classes connues (des coefficients) et d'un nombre égal d'indéterminées. On en tirera la valeur de t en fonction de n indéterminées.

Dans le cas où plusieurs inconnues s'éliminent en même temps, on remplace les résultantes qui manquent par des identités. C'est d'ailleurs signe que ces inconnues dépendent les unes des autres; on peut, par suite, les considérer toutes, moins une, comme des indéterminées (§ 22).

On voit quels avantages considérables la théorie des équations logiques possède sur la théorie des équations algébriques; toutes les équations sont du premier degré; tout système d'équations se réduit à une seule; enfin toute équation est résoluble par rapport à toutes ses inconnues, et l'on peut les en éliminer toutes.

Il reste toutefois un *desideratum*, au point de vue de l'élégance algébrique : les solutions générales d'une équation à plusieurs inconnues sont asymétriques, et leur forme dépend de l'ordre dans lequel les inconnues ont été éliminées, puisque la dernière éliminée ne contient qu'*une* indéterminée, tandis que la première en contient n. Il y a donc lieu de chercher des *solutions générales symétriques*. M. Schröder consacre à cette recherche un Chapitre spécial, trop technique pour qu'on puisse l'analyser ici [1] (§ 24).

On a pu remarquer qu'il n'est pas question des opérations

[1] Cf. WHITEHEAD, *Universal Algebra*, nos 35-37.

inverses (soustraction et division). On peut les considérer comme les solutions générales des équations

$$b - x = a, \qquad bx = a,$$

mais comme ces solutions sont, d'une part, soumises à des conditions restrictives exprimées par les résultantes

$$a_1 b = 0, \qquad ab_1 = 0$$

et d'autre part, indéterminées, ces opérations seraient incommodes et peu pratiques.

Si l'on veut *déterminer* les résultats, en prenant la différence *minimum* et le quotient *maximum*, on trouve que ces valeurs principales sont

$$a - b = ab_1, \qquad a : b = a - b_1,$$

de sorte que la soustraction et la division *déterminées* se ramènent à la multiplication et à l'addition combinées avec la négation [1]. Ainsi, ou bien ces opérations sont indéterminées, ou bien elles sont inutiles. De toute façon, il est préférable de s'en passer, d'autant plus qu'elles sont de peu d'usage au point de vue de la logique, et d'une interprétation difficile [2] (§ 23).

Le premier Volume contient de nombreux exercices et problèmes qui fournissent l'occasion d'appliquer les règles générales du calcul, et d'établir quelques règles spéciales de transformation et de simplification (§§ 18, 25). Il se termine par un exposé sommaire des diverses méthodes inventées pour résoudre les problèmes logiques, à savoir celle de Boole, celle de Jevons et de Venn, enfin celle de Peirce et de Mac Coll (§§ 26, 27).

Le second Volume est principalement consacré à appliquer la même Algèbre au Calcul des propositions. C'est un fait remarquable (découvert par Boole) que les mêmes formules et les mêmes règles de calcul soient applicables aux concepts et aux propositions. Pour cela, il suffit de représenter chaque proposition par son

---

(1) La principale réforme que M. Schröder ait fait subir au système de Boole a consisté précisément à remplacer la soustraction par la négation (Boole représentait la négation de x par $1 - x$).

(2) *Voir* John Venn, *Symbolic Logic*, Chap. III (2e éd. 1894; London, Macmillan).

domaine de valabilité, c'est-à-dire par l'ensemble des instants où elle est vraie. Dès lors, les relations entre propositions se traduisent par des relations entre leurs domaines de valabilité, c'est-à-dire entre des ensembles soumis au Calcul des classes [1]. L'inclusion

$$A < B$$

signifie que le domaine de valabilité de la proposition A est contenu dans celui de B; elle exprime donc le jugement hypothétique : « Si (ou quand) A est vraie, B est vraie », ou simplement « A implique B ». Le *produit* AB est la partie commune aux domaines de valabilité de A et de B, c'est-à-dire l'ensemble des instants où A et B sont vraies à la fois; il représente donc le domaine de valabilité de l'*affirmation simultanée* de A et de B. La *somme* A + B est l'ensemble des instants où l'une (au moins) des deux propositions A et B est vraie; elle représente donc le domaine de valabilité de l'*affirmation alternative* de A et de B : « ou A est vraie, ou B est vraie ».

L'égalité

$$A = B$$

équivaut toujours aux deux inclusions simultanées

$$A < B, \qquad B < A.$$

Elle signifie que les deux propositions A et B sont *équivalentes,* en ce sens qu'elles sont vraies (ou fausses) en même temps.

Le *zéro,* défini par la relation formelle

$$0 < X$$

(quel que soit X), représente une proposition qui n'est *jamais* vraie; il est donc le symbole de l'impossibilité ou de l'absurdité. Le *un* ou *tout,* défini de même par

$$X < 1,$$

(quel que soit X), représente une proposition qui est *toujours* vraie : c'est le symbole de l'évidence ou de la nécessité (par exemple, des propositions *identiques*) (§ 28).

---

[1] On représentera les propositions par des majuscules, pour les distinguer des concepts.

Reste à vérifier si, moyennant cette interprétation, les principes du calcul des classes sont encore valables pour les propositions. Le *principe d'identité*

$$A < A$$

signifie : « Si A est vraie, elle est vraie ». Le *principe du syllogisme*

$$(A < B)(B < C) < (A < C),$$

signifie : « Si A entraîne B, et si B entraîne C, alors A entraîne C ». L'un et l'autre sont encore évidents dans la nouvelle interprétation. Dès lors, toutes les conséquences formelles que l'on en a déduites sont également valables pour les propositions [1]. Par exemple, les *principes de contradiction* et *du tiers exclu*

$$XX_1 = 0, \qquad X + X_1 = 1.$$

vaudront pour les propositions ; ils ont alors le sens suivant : « Il est impossible qu'une même proposition soit vraie et fausse à la fois » et : « Ou bien une proposition est vraie, ou bien elle est fausse ».

Aux principes précédents, qui sont les mêmes que pour le Calcul des classes, M. Schröder joint un *axiome spécial* au Calcul des propositions

$$(A = 1) = A,$$

c'est-à-dire : « Affirmer qu'une proposition A est toujours vraie, c'est affirmer cette proposition elle-même ». Seulement, cet axiome ne vaut que pour les propositions *à sens constant* (jugements catégoriques) qui sont, en effet, toujours vraies ou toujours fausses ; mais non pour les propositions *à sens variable*, qui

---

(1) Il faut encore s'assurer que le postulat (loi distributive inverse)

$$(A + B)C < AC + BC$$

est vrai pour les propositions : « Affirmer que A ou B est vraie, et que C est vraie, c'est affirmer, ou bien que A et C sont vraies, ou bien que B et C sont vraies », ce qui semble évident. M. Schröder croit pouvoir déduire cette formule d'un résultat plus simple

$$(A + B = 1) = (A = 1) + (B = 1)$$

(qui résulte d'ailleurs de l'*axiome spécial*), ce qui ne nous paraît pas certain.

peuvent être tantôt vraies, tantôt fausses (exemple : il pleut) ([1]). M. Schröder exclut ainsi de son Algèbre les jugements conditionnels, généraux ou indéterminés, qui font précisément l'objet du Calcul des probabilités. Il rompt par là, ou du moins il néglige, la liaison si remarquable que Boole avait établie entre la Logique et le Calcul des probabilités ([2]).

Pour exprimer la négation d'une proposition, M. Schröder fait porter le signe de négation sur la copule, puisque c'est la relation exprimée par la copule qui est niée ([3]); ainsi il écrit

$$(a < b)_1 = (a \,|\!< b),$$
$$(a = b)_1 = (a \,|\!= b).$$

Cela posé, l'axiome spécial entraîne les équivalences suivantes :

$$A = (A = 1) = (A \,|\!= 0) = (A_1 = 0) = (A_1 \,|\!= 1),$$
$$A_1 = (A = 0) = (A \,|\!= 1) = (A_1 = 1) = (A_1 \,|\!= 0).$$

Plus généralement, on a

$$(A \,|\!= B) = (A = B_1) = (A_1 = B) = (A_1 \,|\!= B_1).$$

Ainsi, dans une proposition à sens constant, on peut transporter la négation de la copule sur l'un des deux membres; par suite, on peut transformer une proposition négative en une affirmative ([4]) (§ 31).

([1]) Le calcul des propositions à sens constant se réduit, en somme, à une Arithmétique où il n'y aurait que *deux* valeurs distinctes, 0 et 1.

([2]) Et que les recherches de M. Mac Coll ont contribué à préciser et à développer. *Voir* son *Calculus of Equivalent Statements*, ap. *Proceedings of the London Mathematical Society*, t. IX, X, XI, XXVIII, XXIX, XXX.

([3]) Le signe de négation est alors une barre verticale qui traverse le signe de copule en son milieu. Nous avons reporté cette barre à gauche du signe de copule.

([4]) L'auteur emprunte aux Mathématiques les signes Σ et Π, qui lui fournissent une notation très commode. Les propositions n'étant susceptibles que des valeurs 0 et 1, pour qu'une somme soit égale à 1, il faut et il suffit qu'*un* de ses termes soit égal à 1 (de même, pour qu'un produit soit égal à 0, il faut et il suffit qu'*un* de ses facteurs soit égal à 0). Pour qu'un produit soit égal à 1, il faut que *tous* ses termes soient égaux à 1 (de même, pour qu'une somme soit égale à 0, il faut et il suffit que tous ses termes soient égaux à 0). Soit donc P_x une proposition qui contient un élément variable x (lequel parcourt un ensemble déterminé de valeurs). $\Sigma_x P_x (= 1)$ signifiera que l'une au moins des propositions P_x est vraie, c'est-à-dire que « quelque x » vérifie la proposition P; et $\Pi_x P_x (= 1)$ signifiera que toutes les propositions P_x sont vraies, c'est-à-dire que « tout x » vérifie la proposition P. On interprète de même les sommes et produits relatifs à plusieurs variables Σ_{xy}, Π_{xyz}, ... (§ 30).

L'axiome spécial permet encore la transformation suivante d'une inclusion en une somme (c'est-à-dire en une alternative)

$$(A < B) = (AB_1 = 0) = (A_1 + B = 1) = A_1 + B.$$

« Dire que si A est vraie, B est vraie, c'est affirmer que, ou bien A est fausse, ou bien B est vraie. »

Et par conséquent

$$(A = B) = (A < B)(B < A) = (A_1 + B)(A + B_1) = AB + A_1 B_1.$$

« Dire que les propositions A et B sont équivalentes, c'est affirmer qu'elles sont ou toutes deux vraies, ou toutes deux fausses. »

Ces deux transformations permettent de réduire des propositions secondaires, c'est-à-dire dont les termes sont des propositions, à des propositions primaires, c'est-à-dire dont les termes sont des concepts (classes). Elles fournissent encore un moyen de vérifier des équivalences de propositions secondaires, en les réduisant à des propositions primaires dont l'identité est manifeste (§ 32).

L'auteur applique alors son Algèbre au problème de la Logique classique. Les quatre jugements traditionnels se traduisent ainsi :

1° L'*universelle affirmative* (A) : « Tout a est b » par

$$(a < b) = (ab_1 = 0);$$

2° L'*universelle négative* (E) : « Nul a n'est b » (c'est-à-dire : « tout a est non-b »), par

$$(a < b_1) = (ab = 0);$$

3° La *particulière affirmative* (I) : « Quelque a est b » (négation de E) par

$$(a \not< b_1) = (ab \neq 0);$$

4° La *particulière négative* (O) : « Quelque a n'est pas b » (négation de A) par

$$(a \not< b) = (ab_1 \neq 0) \; [1] \; (\S\ 33).$$

---

[1] Cette traduction algébrique des *particulières* a été trouvée pour la première fois par M. Mac Coll en 1878, ainsi que son application à la théorie du syllogisme. On voit que les propositions *universelles* se traduisent par une copule *affirmative*, et les propositions *particulières* par une copule *néga-*

M. Schröder applique ces notations précises à la théorie du syllogisme. Sur les dix-neuf modes concluants d'Aristote, il en trouve quatre non concluants, parce qu'ils reposent sur la conversion partielle de A en I, ce qui implique un jugement d'existence non compris dans les prémisses. Les syllogismes concluants dérivent tous d'une seule formule d'élimination trouvée par Miss Ladd. Ainsi est vérifiée la vue profonde de Boole, pour qui le syllogisme, et plus généralement la déduction, se ramenait à un processus d'élimination (des moyens termes) (§§ 42-44).

L'auteur cherche à généraliser la théorie du syllogisme en s'inspirant des idées de Gergonne [1]. Au lieu des quatre propositions classiques A, E, I, O, il distingue quatorze *relations fondamentales* entre deux classes ou leurs négations : ce sont les sept relations d'extension possibles entre deux domaines (figurés par deux cercles) et leurs négations. Il recherche leur traduction analytique (dans l'Algèbre de la Logique) et la possibilité de les réduire les unes aux autres, et notamment à l'égalité. Enfin il les ramène aux quatre relations primitives de de Morgan :

$$ab = 0, \qquad ab_1 = 0, \qquad a_1 b = 0, \qquad a_1 b_1 = 0,$$

et à leurs négations. Il retrouve ainsi un théorème de M. Peano, à savoir que le nombre des jugements que l'on peut énoncer sur n concepts (classes) est égal à

$$2^{2^{2^n}-1} - 1.$$

Ainsi sur deux concepts seulement on peut porter 32767 jugements différents. On devine par là quelle peut être la complication de la *syllogistique généralisée*, où l'on combine chaque jugement portant sur a et b avec chaque jugement portant sur b et c pour en tirer une conclusion touchant a et c (§§ 34-39, 48).

L'auteur revient au problème de l'élimination, dans le cas général où à une ou plusieurs équations viennent se joindre une ou plusieurs *inéquations*. Ce problème n'est pas encore complètement

---

tive. C'est que, dans les propositions négatives, la négation ne porte pas en réalité sur la copule, mais sur le prédicat. C'est là une des nombreuses illusions ou ambiguïtés du langage que la Logique algorithmique sert à dissiper.

[1] *Essai de dialectique rationnelle*, ap. *Annales de Mathématiques*, t. VIII (1816-1817).

résolu : la difficulté vient de ce que les inéquations simultanées ne se réduisent pas à une seule, comme les équations simultanées. On peut obtenir la résultante *complète* pour le système d'une équation et d'*une* inéquation

$$(ax + bx_1 = 0)(px + qx_1 \neq 0) < (ab = 0)(pa_1 + qb_1 \neq 0),$$

mais la même formule d'élimination, appliquée à un système de *plusieurs* inéquations, fournit une résultante qui n'est pas complète. Pour la compléter, il faut lui adjoindre une *clause* qui exclut certains cas (exceptionnels) où plusieurs classes connues (figurant comme coefficients) se réduiraient au même individu. Par exemple, pour que le système suivant de deux inégalités

$$(px \neq 0)(qx_1 \neq 0),$$

soit résoluble, faut-il non seulement que la résultante

$$(p \neq 0)(q \neq 0)$$

soit vérifiée, mais encore que les deux classes p et q ne se réduisent pas au même individu (§§ 40, 41, 49).

Pour exprimer analytiquement ces *clauses,* on a besoin d'une définition formelle de l'individu, ou, plus exactement, de la classe *singulière* (qui se réduit à un individu). C'est une classe i non nulle, et de plus telle qu'elle ne peut avoir des parties communes à la fois avec deux classes disjointes (sans connexion) quelconques

$$(i \neq 0)\,\Pi_{xy}[(xy = 0) < (ix \neq 0)(iy \neq 0)],$$

ou, en particulier, avec une classe quelconque x et sa négation (car $xx_1 = 0$)

$$(i \neq 0)\,\Pi_x[(ix \neq 0)(ix_1 \neq 0) = 0].$$

Cette formule exprime, en somme, ce fait que la classe singulière est indivisible. On en déduit la suivante (par contraposition)

$$(i \neq 0)\,\Pi_x[(ix = 0) + (ix_1 = 0) = 1],$$

ou encore la formule équivalente

$$(i \neq 0)\,\Pi_x[(i < x) + (i < x_1) = 1].$$

Celle-ci signifie que la classe i est tout entière contenue, soit dans x, soit dans non-x (quelle que soit x) (§ 48).

Cette définition de l'individu montre à quel degré de rigueur et de finesse la nouvelle Algèbre peut pousser l'analyse logique, et comment elle constitue un instrument de précision pour la pensée. Elle ne sert pas seulement à traduire les jugements sous une forme absolument claire et exempte des équivoques de langage (¹). Elle constitue un *algorithme*, c'est-à-dire permet de remplacer le raisonnement par un calcul formel, soumis à des règles fixes, qui fournit automatiquement, en quelque sorte, les conséquences de prémisses données ou la solution d'un problème posé. En un mot, c'est une machine à penser, le *Calculus ratiocinator* de Leibnitz, qui devait être aussi utile aux sciences déductives que le télescope ou le microscope aux sciences d'observation. Elle remplace et englobe (en la corrigeant parfois) la Logique classique, et en même temps elle a une portée incomparablement plus grande que la Syllogistique d'Aristote, et permet de traiter des problèmes bien plus compliqués. Elle fait enfin rentrer la Logique dans le cadre des sciences mathématiques, et, en lui prêtant leur méthode rigoureuse et formelle, elle lui apporte un perfectionnement considérable et lui assure un progrès indéfini (²). LOUIS COUTURAT.

MANSION (P.). — INTRODUCTION A LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS, AVEC DE NOMBREUX EXERCICES A L'USAGE DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MODERNE. 3ᵉ édition. Un vol. in-8°; 39 p. Gand, Hoste; 1899.

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS, AVEC DE NOMBREUX EXERCICES. 6ᵉ édition, revue et augmentée. Un vol. in-8°, IV-91 p. Paris, Gauthier-Villars; 1899.

Nous nous contentons de signaler ces nouvelles éditions de livres bien connus; l'exposition est très claire; les exemples sont nombreux et intéressants : outre les propriétés fondamentales des

(¹) Par exemple, elle a révélé les jugements d'existence que le langage ordinaire sous-entend habituellement dans les propositions universelles. « Tout a est b », « nul a n'est b » implique, dans l'usage de la conversation, quoique à tort, qu'il y a des a (que la classe a existe, n'est pas nulle).

(²) Sur les rapports de la Logique et de la Mathématique, tels qu'ils ressortent de l'étude des nouvelles Algèbres, *voir* notre article sur l'*Algèbre universelle de M. Whitehead*, ap. *Revue de Métaphysique et de Morale* de mai 1900.

déterminants, l'auteur développe dans ses *Éléments* la résolution des équations linéaires et la méthode d'élimination due à M. Sylvester; les propriétés générales des déterminants ne sont développées qu'après l'étude des déterminants du deuxième et du troisième degré : c'est là une méthode qui a des avantages incontestables, car l'expérience montre que les étudiants qui sont en possession des définitions et propriétés générales peuvent être parfaitement incapables de reconnaître, par exemple, les mineurs d'un déterminant du troisième degré quand ces mineurs sont écrits explicitement, et *a fortiori,* de tirer quelque parti des relations entre ces mineurs. Je me permettrai de signaler une légère lacune, qu'il sera facile de combler dans une prochaine édition : M. Mansion n'est pas de ceux qui craignent de multiplier les dénominations, et l'on trouvera, par exemple, dans ses *Éléments,* la plupart des noms que l'on a introduits pour désigner des déterminants spéciaux, ayant quelque propriété remarquable. Je regrette qu'il n'ait pas parlé de la notion de *rang* dont M. Frobenius et Kronecker ont montré l'importance capitale, qui s'introduit d'elle-même dans l'exposition, classique en France, de la théorie des équations linéaires que l'on doit à M. Rouché, comme aussi dans la théorie des formes quadratiques. J. T.

MÉLANGES.

FUNÉRAILLES DE M. JOSEPH BERTRAND,

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

DISCOURS DE M. MAURICE LÉVY,

Président de l'Académie.

MESSIEURS,

Les hommes comme Joseph Bertrand aiment à être loués par leurs œuvres et leurs disciples. Si tous ses élèves se trouvaient aujourd'hui à Paris, ils lui feraient, à eux seuls, un imposant cor-

tège. Car son nom n'a jamais éveillé chez eux, comme partout, qu'admiration, respect et sympathie profonde.

La grandeur même de ce nom dit mieux que de simples paroles ce que la mort de celui qui l'a porté et illustré fait perdre tout à la fois aux Sciences et aux Lettres, et ce n'est pas pour vous, ses confrères, collègues ou amis, qu'il serait utile d'y insister.

Mais ce que nous perdons plus particulièrement à l'Académie des Sciences, ceux qui en font partie sont seuls en état de le mesurer. Ce n'est pas seulement l'une de nos gloires qui s'en va; c'est l'âme même de notre Compagnie qui est atteinte. Car, par la vertu d'un long et mutuel amour, l'âme de notre Secrétaire perpétuel et celle de l'Académie étaient arrivées à une telle communion que, depuis longtemps, elles n'en faisaient plus qu'une.

Leur violente séparation aura un long et douloureux retentissement.

Depuis quarante-quatre ans que Joseph Bertrand siégeait à l'Académie, depuis vingt-six ans qu'il y exerçait la suprême dignité du secrétariat perpétuel, ses services se sont chaque jour renouvelés. Sa présence au bureau valait une encyclopédie, une encyclopédie toujours renseignée, toujours ouverte à la bonne page. Avec lui, jamais une question ne demeurait en suspens. Qu'elle fût de science ou de tradition académique, il savait toujours la résoudre ou la faire trancher sur l'heure.

Cette puissante faculté, qui a fini par faire de lui comme l'incarnation de notre Compagnie, ne tenait pas seulement à l'universalité de son génie, à la sûreté et à la spontanéité de sa mémoire, au charme de sa parole ailée et persuasive. Elle était la résultante de tout cela et, en plus, d'une vie éclose et cultivée en milieu savant.

Illustre en quelque sorte depuis son enfance, causeur recherché et partout écouté, il a connu tout ce qui a marqué dans la science des soixante, presque des soixante-dix dernières années. Quant aux savants du commencement du siècle, ou « l'enfant prodige », comme on l'appelait, avait été leur jeune ami, ou il en avait entendu parler par son père ou chez son oncle Duhamel, en telle sorte que l'on peut dire que si Joseph Bertrand n'a pas, comme Fontenelle, vécu cent ans, il a, du moins, au point de vue scientifique et académique, vécu tout notre grand dix-neuvième siècle. Quant au dix-huitième, il en était par sa culture première. Cette haute

science du siècle passé, si près et pourtant, à tant d'égards, si loin de nous, il aimait à la rappeler. C'est par elle qu'il commençait volontiers ses leçons du Collège de France, quand l'occasion lui en était offerte. Nul mieux que lui ne savait la ressusciter, la faire renaître de ses cendres et la montrer comme la préface nécessaire de la nôtre.

Il était ainsi la chaîne qui nous reliait solidement à tout le passé de la Science actuelle et à tout le passé de notre Académie elle-même, dont il a d'ailleurs écrit l'Histoire.

C'est cette chaîne qui se trouve aujourd'hui rompue et qui se remplacera très difficilement.

Vous parlerai-je de l'homme? Ce sera encore et presque toujours vous parler du savant. Les grandes natures sont simples, et Joseph Bertrand me paraît pouvoir être caractérisé d'un mot : il était vrai.

Il était aussi vrai dans la vie que dans les Mathématiques.

Lorsqu'il ne rencontrait pas les qualités de droiture et de sincérité qui étaient en lui, il se détournait discrètement, sans affectation et sans colère.

J'aime qu'avec douceur nous nous montrions sages.

Mais sa douceur était protégée par une riposte aussi fine que prompte.

Il était curieux de vérité en tout. Cette curiosité l'a naturellement engagé à tout aborder. Sa mémoire pouvait tout recevoir et tout retenir, et sa raison avant tout mathématique, mais d'admirable ordonnance générale, mettait chaque chose en place et savait découvrir, un peu partout, des doutes à éclaircir et des problèmes à résoudre. C'est ainsi qu'il a été un mathématicien original et fécond, un érudit de marque et un fin critique.

Le critique, chez lui, a bien souvent aidé le mathématicien, ce qui n'est pas extraordinaire. Car tout progrès résulte de la judicieuse critique de quelque coin du passé.

C'est en faisant la critique approfondie d'un théorème fameux de Poisson qu'il a été amené à ses belles découvertes sur les propriétés des intégrales des problèmes de la Dynamique et à une nouvelle méthode pour les aborder.

Le calcul des probabilités où il est si facile de se tromper, où

les plus grands se sont trompés, a naturellement dû attirer le maître critique, sûr de ses propres jugements. Cette science devait aussi sourire à son imagination enjouée et poétique par le singulier don qu'elle a de rendre l'homme un peu prophète. Il l'a toujours cultivée. Il l'a enseignée à diverses reprises au Collège de France et lui a fait une place aussi large que possible, même dans son enseignement moins élevé de l'École Polytechnique, en quoi il a d'autant mieux fait qu'elle n'est pas seulement d'une grande utilité en Astronomie et dans les autres sciences d'observation, mais aussi dans plusieurs branches de l'art de l'ingénieur civil ou militaire. Son Ouvrage sur cette matière ardue, résumé des leçons qu'il a faites au Collège de France, l'une des dernières années qu'il y a professé, est et restera un chef-d'œuvre.

Dans son *Traité de Calcul différentiel et intégral* dont le troisième Volume n'a malheureusement pas paru, le manuscrit ayant disparu dans un incendie, il ne se borne pas à exposer les découvertes des autres ; il donne aussi quelques-unes des siennes. Dans le premier Volume notamment, on trouve résumées un très grand nombre d'applications géométriques éparses dans ses divers Mémoires, et il convient de donner une mention toute spéciale à son exposition de la théorie des déterminants fonctionnels et au rapprochement si commode dans les applications, qu'il a su établir entre ces déterminants et la simple dérivée d'une fonction d'une variable.

Sa *Thermodynamique* était prête en 1870 et le manuscrit en a été brûlé en même temps que celui du dernier Volume du *Calcul intégral*. Il l'a refait en donnant le résumé de ses leçons d'une année au Collège de France. Il observe qu'il n'a pas entendu faire un Traité complet et qu'il n'expose que ce qu'il a compris. Mais, sur ce qu'il prétend n'avoir pas compris, notamment sur les phénomènes irréversibles et l'application du second principe aux corps à température non uniforme, il fait une série de remarques critiques très importantes et qui ont déjà porté des fruits.

Cet Ouvrage, comme d'ailleurs tous ceux qui sont sortis de sa main, se distingue par un ensemble d'exercices variés et toujours d'un tour original. Ici, quelques-uns, notamment ceux relatifs aux vapeurs saturées, dépassent de beaucoup le but purement spéculatif pour lequel ils ont été imaginés; ils peuvent être d'une

grande utilité à la Physique expérimentale et à l'art de l'ingénieur.

Parmi les innombrables Traités d'Électricité qui ont paru, le court Volume où il résume aussi ses leçons d'une année au Collège de France est peut-être le seul où l'on trouve la véritable origine et la raison d'être de cette notion du flux électrique due au génie divinateur de Faraday et passée dans la pratique, bien que Joseph Bertrand ne l'utilise pas systématiquement, étant trop mathématicien pour ne pas avoir préféré, aux procédés du grand physicien anglais, les méthodes rigoureuses d'Ampère, pour lequel il avait d'ailleurs une particulière admiration que justifiaient bien des qualités communes.

Son édition de la *Mécanique analytique* de Lagrange, avec les lumineuses Notes dont il l'a fait suivre, est venue à son heure. Bour, Massieu et bien d'autres y ont puisé le goût des hautes questions de la Mécanique et du Calcul intégral.

Ses Ouvrages élémentaires ne sont pas moins remarquables que les autres. C'est dans son *Arithmétique* que l'on trouve, pour la première fois, la claire définition de l'incommensurable. Elle est passée depuis dans les parties les plus élevées de la Science.

Ce n'est pas ici le lieu et il ne serait pas possible d'analyser ses nombreux Mémoires sur les diverses branches des Mathématiques pures ou appliquées à la Mécanique et à la Physique mathématique.

Qu'il me soit pourtant permis de citer, en raison des beaux travaux qu'il a inspirés, son célèbre théorème sur le nombre des valeurs d'une fonction dont on permute les lettres et, en ma qualité de mécanicien, de donner une mention à ce principe si simple et si utile de la similitude en Mécanique et en Physique. Il permet de deviner à l'avance les lois de certains phénomènes et toujours de circonscrire le champ de l'inconnu. Par l'emploi des modèles en petit, il est chaque jour appliqué en Architecture navale; il commence à l'être en Hydraulique fluviale et maritime, ainsi que dans les constructions civiles.

Je ne puis m'empêcher de rappeler aussi que la notion d'une intégrale commune à plusieurs problèmes de Mécanique, devenue si fondamentale, a été jetée par lui, il y a longtemps, dans l'un de ses Mémoires, ainsi que l'étude des intégrales algébriques qui a donné lieu également à de si remarquables développements.

Quand on réunira l'œuvre scientifique et l'œuvre littéraire de Joseph Bertrand, on sera étonné qu'une vie humaine ait pu suffire à tant de labeur et qu'un seul cerveau ait pu enfanter tant de pensées originales et en des genres si divers.

Il a été un semeur d'idées. Ses Ouvrages classiques, avec leurs nombreux exercices, ont déterminé bien des vocations, de même que les pensées imprévues, les inspirations soudaines qui lui échappaient au cours de ses leçons du Collège de France ont modifié bien des carrières dans le haut enseignement. Le nombre des thèses de doctorat sorties de là serait difficile à chiffrer.

S'il jetait la vérité en prodigue, par la plume et la parole, il savait aussi l'aimer et l'apprécier chez les autres. C'est pourquoi il a eu beaucoup d'amis.

Il la trouvait toujours bonne à dire. C'est pourquoi il a dû s'attirer aussi quelques inimitiés, peu j'imagine; car il la disait toujours pour elle-même, jamais dans le dessein de nuire et autant que possible de façon à ne pas nuire.

Il savait en inculquer l'amour à la jeunesse. C'est pourquoi il a été un vrai maître.

Aucune peine ne lui coûtait pour rechercher les jeunes talents et les mettre en lumière, et il n'a pas attendu d'être arrivé lui-même pour se donner cette tâche. Dès sa jeunesse, il l'a considérée comme de devoir étroit pour lui. C'était, sans doute, sa façon de reconnaissance pour les dons exceptionnels qu'il avait reçus de la nature et une façon de n'en pas garder le profit pour lui seul.

Si tous les riches se mettaient à suivre son exemple, le problème social aurait fait un grand pas.

Presque au début de sa carrière, alors qu'il n'était que simple professeur de lycée, il devina Foucault, s'attacha à lui, l'aida de sa science mathématique dont Foucault était dépourvu, contribua ainsi à ses découvertes sans se montrer; puis, à peine arrivé à l'Institut, à l'âge de trente-quatre ans, il soutint, contre les plus hautes personnalités de l'époque, une lutte restée célèbre, pour la candidature du grand physicien, alors peu connu ou méconnu.

La bataille ne fut pas sans péril, ni le triomphe sans gloire. Une voix de majorité! Mais l'Institut de France comptait un homme de génie de plus à son actif.

Il n'est pas de savant qui n'ait trouvé accueil auprès de Joseph

Bertrand. A ceux qui lui en paraissaient dignes, il donnait son amitié, ses conseils, son appui. Il s'inquiétait de leur carrière où qu'ils fussent, faisait des démarches en leur faveur sans le leur dire, et plus d'une fois il a mis toute son ingéniosité à trouver le moyen le plus délicat et le plus acceptable pour eux de leur venir en aide de sa bourse. Il est allé jusqu'à quitter provisoirement ou définitivement une partie de son enseignement pour permettre à tel savant de se mettre plus rapidement en évidence, et, en pareil cas, il se débattait contre les règlements pour abandonner la plus grande part possible de son traitement.

Il a vraiment montré, par l'esprit, par le cœur et par ses œuvres, des vertus qui n'appartiennent qu'aux grands hommes, ces vertus rares en tous les temps, plus rares, nous assure-t-on, dans le nôtre, dont, en tout cas, une nation a le droit d'être fière, mais dont elle a aussi le devoir de perpétuer la mémoire et l'exemple.

Ce n'est que quand ce devoir sera accompli que nous commencerons à nous consoler de l'avoir perdu, et je souhaite bien ardemment que sa famille, dont il était l'idole, qui lui a rendu en amour et en dévouement ce qu'il lui a donné en gloire et en tendresse, puisse un jour trouver là, elle aussi, un soulagement à sa profonde et si naturelle affliction.

C'est dans cette pensée, cher et vénéré Maître, que votre ancien suppléant au Collège de France vous offre l'hommage respectueux et attristé de cette autre famille qu'a été pour vous l'Académie des Sciences, et dans laquelle, après tant de succès personnels, l'une de vos dernières et plus grandes joies a été de voir entrer votre fils.

SUR LES DIVISEURS NUMÉRIQUES DES POLYNOMES;

PAR M. ÉMILE BOREL.

Étant donné un polynome *à coefficients entiers* (¹), dépendant d'une ou de plusieurs variables, il peut arriver que, pour toute valeur entière des variables, la valeur numérique du polynome soit

(¹) On reconnaîtra facilement que ce qui suit pourrait être étendu au cas où les coefficients seraient seulement rationnels.

divisible par un nombre d; ce nombre est ce que nous appellerons un *diviseur numérique du polynome*. Il est clair que, pour trouver tous les diviseurs numériques d'un polynome, il suffit de rechercher ceux qui sont égaux à une puissance d'un nombre premier; si l'on désigne par p^α, q^β, r^γ, ... les puissances les plus élevées des nombres premiers p, q, r, ... qui divisent le polynome proposé, le produit

$$D = p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$$

est visiblement *le plus grand diviseur numérique* du polynome et l'on obtient tous les diviseurs numériques en formant le tableau des diviseurs de D.

Tout revient donc à déterminer les exposants α, β, γ, ... qui conviennent aux divers nombres premiers p, q, r, ... J'y parviendrai en étendant au cas des polynomes à plusieurs variables une remarque que j'ai faite, il y a quelques années, pour le cas d'une seule variable [1] : *le théorème de Fermat pour le cas d'un module premier suffit pour résoudre la question qui nous occupe*.

I. Dans ce qui suit, nous considérerons des variables x, y, z, ... assujetties à prendre seulement des valeurs entières. Nous disons que ces valeurs sont *indépendantes suivant le module p* si, quels que soient les entiers donnés α, β, γ, ... il est possible de vérifier simultanément les congruences

$$\begin{aligned} x &\equiv \alpha \pmod p, \\ y &\equiv \beta \pmod p, \\ z &\equiv \gamma \pmod p, \\ \ldots & \quad \ldots\ldots \end{aligned}$$

Nous verrons que des variables peuvent être liées par des relations et être cependant *indépendantes suivant le module p*.

Une remarque évidente est la suivante : si les variables x, y, z, ... d'une part, x, x_1, x_2, ... d'autre part, sont indépendantes

(1) *Introduction à la Théorie des nombres et à l'Algèbre supérieure, d'après des leçons de M. J. Tannery;* par E. Borel et J. Drach. Note I. *Sur le théorème de Fermat.* Je profite de cette occasion pour dire que cette Note est la seule chose qui m'appartienne en propre dans ce Livre.

suivant le module p, il en est de même de l'ensemble des variables $x, x_1, x_2, \ldots, y, z, \ldots$.

Donnons encore une définition : nous appellerons *degré* d'un polynome à plusieurs variables l'exposant le plus élevé qui y figure; par exemple, le polynome $x^3y^2 + x^2y^3 + z^3y + x^3$ sera dit du *troisième* degré.

Nous pouvons maintenant démontrer les deux théorèmes qui servent de base à notre méthode.

THÉORÈME I. — *Un polynome de degré inférieur à p, à un nombre quelconque de variables, indépendantes suivant le module p, ne peut être divisible par p pour toutes les valeurs possibles* [1] *de ces variables, que si les coefficients sont tous divisibles par p.*

La proposition est bien connue dans le cas où le polynome ne renferme qu'une variable; il suffit donc de la démontrer pour le cas des polynomes à n variables, en la supposant vraie des polynomes à $n-1$ variables. Soit donc

$$\Pi = P_0x^q + P_1x^{q-1} + \ldots + P_{q-1}x + P_q = 0$$

un polynome à n variables de degré inférieur à p. Les coefficients P sont des polynomes à $n-1$ variables. Le polynome Π étant divisible par p quel que soit x, les coefficients $P_0, \ldots, P_q$ sont eux-mêmes divisibles par p pour toutes les valeurs possibles de $n-1$ variables, indépendantes suivant le module p. Tous leurs coefficients, c'est-à-dire tous les coefficients de Π, sont donc divisibles par p. C.Q.F.D.

THÉORÈME II. — *Si l'on pose*

$$x^p = x + px_1,$$

les variables x et x_1 sont indépendantes suivant le module p.

Il suffit de montrer que l'on peut vérifier simultanément les congruences

$$(1)\qquad \begin{cases} x \equiv \alpha & (\mathrm{mod}\, p), \\ x_1 \equiv \alpha_1 & (\mathrm{mod}\, p). \end{cases}$$

---

[1] Les *valeurs possibles* sont toutes celles que peuvent prendre les variables, eu égard aux relations auxquelles elles sont assujetties; mais on suppose ces relations telles que les variables soient indépendantes suivant le module p.

Posons

$$x = \alpha + p z,$$
$$\alpha^p - \alpha = pa.$$

On aura

$$x_1 = \frac{x^p - x}{p} = \frac{\alpha^p + p^2\alpha^{p-1}z + \ldots - (\alpha + pz)}{p} = a - z + p\mathrm{M},$$

M étant un nombre entier.

Il suffit donc de prendre

$$a - z \equiv \alpha_1 \pmod p,$$

c'est-à-dire

$$z \equiv a - \alpha_1 \pmod p$$

pour avoir simultanément les relations (1).

II. Nous possédons maintenant tous les éléments nécessaires pour résoudre la question suivante :

Étant donné un polynome à coefficients entiers $\mathrm{P}(x, y, z, \ldots)$, *trouver la puissance la plus élevée* p^α *du nombre premier* p, *qui divise le polynome pour toutes les valeurs entières des variables.*

Si le degré du polynome est inférieur à p, nous savons (théorème I), qu'il suffit de rechercher la plus haute puissance de p qui divise tous les coefficients.

Si le degré dépasse p, c'est que l'une au moins des variables, x par exemple, figure avec un exposant supérieur à p. On posera

$$x^p = x + p x_1,$$

et l'on se servira de cette relation pour rendre inférieurs à p tous les exposants de x. On obtiendra ainsi

$$\mathrm{P}(x, y, z, \ldots) = \mathrm{P}_1(x, x_1, y, z, \ldots),$$

le nouveau polynome P_1 renfermant une variable de plus ; mais cette nouvelle variable x_1 figure certainement avec un degré bien moins élevé que celui auquel figurait x dans P ; et x ne figure dans P_1 qu'au degré $p - 1$ au plus ; enfin les variables x, x_1, y, z, ... sont indépendantes suivant le module p.

Si le degré de P_1 dépasse p, on procédera de même, c'est-à-dire

que l'on posera

$$x_1^p = x_1 + p x_2,$$
$$x_2^p = x_2 + p x_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y^p = y + p y_1,$$
$$y_1^p = y_1 + p y_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$z^p = z + p z_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne un polynome

$$P_h(x, x_1, \ldots, y, y_1, \ldots, z, z_1, \ldots, z_k, \ldots),$$

dont le degré soit inférieur à p; le théorème I fera dès lors connaître immédiatement l'exposant α.

On voit combien est simple le principe de la méthode: elle ne fait intervenir que le théorème de Fermat pour un module premier et le théorème II qui en est une conséquence presque immédiate.

Si l'on veut chercher tous les diviseurs numériques d'un polynome donné, on devra donner successivement au nombre premier p toutes les valeurs inférieures ou égales au degré du polynome proposé; les calculs doivent être recommencés pour chaque valeur de p; c'est là un inconvénient de la méthode, mais on reconnaîtra sans peine qu'elle exige néanmoins des calculs bien plus courts que la méthode proposée par M. Hensel et basée sur la formule d'interpolation de Lagrange ([1]). Dans certains cas, il pourrait y avoir avantage pour les applications à combiner les deux méthodes.

III. Soit, par exemple,

$$P = x^9 - x^3 + 315.$$

Le polynome P n'admet pas de diviseur premier supérieur à 7. Posons donc d'abord

$$x^7 = x + 7 x_1.$$

([1]) *Journal de Crelle*, t. 117; 1896. Cet article de M. Hensel est postérieur à la Note citée plus haut; mais il est manifeste qu'il en est complètement indépendant.

Il vient

$$P = 7x^2x_1 - 315;$$

on trouve ainsi le diviseur 7, à la première puissance. En posant

$$x^5 = x + 5x_1$$

d'où

$$x^9 = x^5 + 5x^4x_1 = x + 5x_1 + 5x^4x_1,$$

on a

$$P = x - x^3 + 5x_1 + 5x^4x_1 - 315,$$

c'est-à-dire que P n'est pas divisible par 5.

Si l'on pose maintenant

$$x^3 = x + 3x_1,$$

il vient

$$x^9 = x^3 + 9x^2x_1 + 27x\,x_1^2 + 27x_1^3,$$

et avec

$$x_1^3 = x_1 + 3x_2,$$

on obtient

$$P = 9x^2x_1 + 27x\,x_1^2 + 27(x_1 + 3x_2) - 315,$$

et l'on voit que P admet le diviseur 9.

Enfin, il suffit de faire $x = 0$ pour constater que P n'est pas divisible par 2. Le plus grand diviseur numérique de P est donc

$$3^2 \times 7 = 63.$$

On constatera aisément que c'est la détermination de l'exposant du diviseur 2 qui exige en général les plus longs calculs, lorsqu'un artifice ne permet pas de le déterminer immédiatement.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

P. APPELL. — Les mouvements de roulement en Dynamique (collection *Scientia*). Un vol. in-8° de 70 p. Paris, Carré et Naud, 1899.

L'extension croissante qu'a prise, dans ces dernières années, l'usage de la bicyclette, a naturellement attiré l'attention des savants sur les problèmes de Mécanique qu'elle soulève. C'est ainsi que l'Académie des Sciences a mis la question au concours en 1898, et qu'en réponse à son appel, plusieurs auteurs, tels que MM. Bourlet et Carvallo, ont fait faire à cette théorie d'importants progrès. Il est arrivé là, comme à beaucoup d'autres étapes de l'histoire de la Science, que l'application a été, pour la théorie, un guide utile, que l'étude d'une question purement pratique a rappelé l'importance de remarques d'ordre général insuffisamment approfondies jusque-là.

Les mouvements de roulement, tels que la bicyclette les présente, offrent en effet, pour la Mécanique classique, un puissant intérêt. On n'a pas affaire ici, comme le plus souvent dans l'étude des machines, au cas particulièrement simple d'un système à liaisons complètes; et, d'autre part, s'il est vrai qu'il s'agit d'un problème de Dynamique classique, en ce sens que les déformations élastiques ne paraissent jusqu'ici jouer qu'un rôle insignifiant dans la question, on n'en est pas moins placé dans des conditions assez différentes de celles où se place généralement cette partie de la Science.

En Dynamique classique, en effet, on considère la position d'un système comme définie par les valeurs d'un certain nombre de paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Toute nouvelle liaison introduite dans le système s'exprime par une ou plusieurs équations entre ces paramètres et, en général, on peut, à son gré, soit garder tous les paramètres primitifs, en tenant compte des équations ainsi introduites, soit profiter de ces équations pour réduire le nombre des paramètres.

Or, lorsqu'il s'agit de corps solides roulant l'un sur l'autre, les choses se passent autrement. Les conditions de roulement intro-

duisent bien deux relations entre les paramètres définissant les positions des solides; mais ces relations sont des équations aux différentielles totales pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas vérifiées et qui, par conséquent, ne peuvent se remplacer par des équations en termes finis.

Le problème ainsi posé relève encore des méthodes générales de la Dynamique, mais exige certaines précautions dans leur emploi. La nécessité de ces précautions introduit un nouveau genre de difficulté et, d'autre part, leur oubli a occasionné quelques erreurs. Une étude d'ensemble sur ce sujet, telle que le Livre de M. Appell, était donc intéressante tant au point de vue théorique qu'au point de vue pratique.

Le plan de l'Ouvrage est très simple. D'abord sont rappelés les principes généraux de la Mécanique du solide. Puis quelques considérations de Cinématique sont nécessaires pour appliquer ces principes au roulement. Une série d'applications sont présentées, d'après l'*Advanced rigid Dynamics* de Routh et d'après le Mémoire de M. Carvallo.

C'est seulement ensuite que l'auteur étudie la question au point de vue de la Mécanique analytique. En se plaçant à ce point de vue, on constate que le procédé qui sert à former les équations de Lagrange est encore applicable, mais en ayant soin d'écrire l'expression de la force vive *comme si les relations aux différentielles totales n'existaient pas,* c'est-à-dire comme si les solides qui roulent étaient assujettis à la simple condition d'être tangents. C'est seulement après les différentiations faites, du moins les différentiations partielles, qu'il est permis de tenir compte des conditions de roulement.

Telle est la règle qu'il est nécessaire d'observer si l'on veut arriver à des résultats exacts. Toutefois cette règle est-elle toujours absolue? N'est-il aucune partie du calcul où l'on puisse utiliser les équations de roulement pour simplifier l'expression de la force vive? A cet égard, M. Appell démontre la proposition suivante : On peut se servir des relations aux différentielles totales pour former l'équation de Lagrange relative à l'un des paramètres, q_1 par exemple, si, lorsqu'on se sert de ces relations pour ne laisser subsister que les différentielles réellement indépendantes, les variations virtuelles des coordonnées des différents points prennent

chacune la forme d'une différentielle totale, augmentée d'une expression différentielle ne contenant pas q_1.

C'est ainsi que, dans ses recherches sur le cerceau, le monocycle et le bicycle, M. Carvallo a pu constater que l'équation de Lagrange, relative au paramètre qui détermine l'inclinaison du cerceau sur le plan, peut être formée sans qu'il soit nécessaire de suivre la règle indiquée tout à l'heure.

Les deux Notes ajoutées par M. Hadamard, à la fin du Volume, sont consacrées à une recherche analogue, mais non identique à celle dont nous venons de parler. Au lieu de se demander si, parmi les équations de Lagrange cherchées, il y en a que l'on puisse écrire en se servant de toutes les équations données, l'auteur se pose la question suivante, en quelque sorte inverse de la première : Parmi les relations différentielles qui expriment la liaison, ou parmi leurs combinaisons, en est-il que l'on puisse appliquer sans précaution au calcul de toutes les équations de Lagrange? La réponse, dans des cas assez généraux, est affirmative, et l'on constate que l'on peut former les combinaisons ainsi utilisables par un procédé qui revient (Note II) à la première série des opérations par lesquelles on complète un système d'équations linéaires aux dérivées partielles de premier ordre à une seule fonction inconnue.

L'application de ces principes montre, par exemple, que dans le roulement d'une courbe sur une surface, on peut utiliser l'équation qui exprime l'absence de glissement *longitudinal*, et que, dans le roulement sans pivotement de deux surfaces l'une sur l'autre, on peut employer sans précaution les équations qui expriment le roulement simple.

ERNST SCHRÖDER. — ALGEBRA UND LOGIK DER RELATIVE, t. III des *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, 1re Partie, VIII-649 p. Leipzig, Teubner, 1895.

Dans son *Algebra der Logik*, M. Schröder avait traité la *Logique des termes absolus*, c'est-à-dire la théorie des jugements de prédication (dont la copule est le verbe *être* unissant deux concepts). Dans le présent Volume, qui forme à lui seul un nouvel

Ouvrage, il expose une science incomparablement plus vaste et plus complexe, la *Logique des termes relatifs*, fondée par Ch.-S. Peirce [1]. Celle-ci étudie toutes les relations que peuvent exprimer les jugements possibles (au moyen des copules autres que le verbe *être*), ainsi que leurs diverses combinaisons. L'auteur se borne aux relations *binaires*, c'est-à-dire à deux termes. Voici comment on définit ces relations, considérées à un point de vue purement formel [2].

Soit un ensemble 1_1 d'individus A, B, C, ... On désignera par i, j, h, k, ... des éléments *généraux* ou *indéterminés*, dont chacun peut représenter un individu quelconque de cet ensemble.

Cela posé, soit une certaine relation générale a. Si elle existe entre A et B, on dira qu'on a la relation (binaire) individuelle A:B. Une relation binaire est considérée comme la somme des relations binaires individuelles qui peuvent exister entre tous les individus de l'ensemble 1_1. On pose donc, par définition

$$a = \Sigma_{i,j} a_{ij} (i:j),$$

en convenant de donner au coefficient a_{ij} la valeur 1, si la relation individuelle $(i:j)$ existe, et la valeur 0, si cette relation n'existe pas. Chacune des variables i et j parcourt tout l'ensemble 1_1. Si $i = j$, $(i:j)$ est une *sibirelation* individuelle; si $i \mid= j$, $(i:j)$ est une *aliorelation* individuelle.

Ainsi une relation binaire est définie par l'ensemble de ses coefficients a_{ij}, qui forme une table à double entrée (chaque entrée étant constituée par l'ensemble 1_1). L'ensemble des couples $(i:j)$, c'est-à-dire de toutes les relations individuelles possibles dans le domaine du premier ordre 1_1, forme le domaine du second ordre 1_2 (§§ 1-3).

---

(1) Fils de Benjamin Peirce, l'auteur de *Linear associative Algebra*, ap. *American Journal of Mathematics*, t. IV. Ses principaux Articles se trouvent dans les *Memoirs of the American Academy*, t. IX; 1870, et dans l'*American Journal of Mathematics*, t. III; 1880, et t. VII; 1884.

(2) *Cf.* deux Notes de M. Schröder : *Note über die Algebra der binären Relative*, ap. *Mathematische Annalen*, t. XLVI, p. 144-158; et *Ueber Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand, und die pasigraphische Bewegung in Italien*, ap. *Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Congresses in Zürich* (1897); p. 147-162. Leipzig, Teubner, 1898.

Dans ce domaine à deux dimensions, chaque relation sera définie par le tableau de ses coefficients (tous égaux à 1 ou à 0), qu'on nomme sa *matrice*. On peut la figurer géométriquement par un réseau quadrillé dont les lignes, tant horizontales que verticales, correspondent aux divers individus A, B, C, ... Si deux individus sont en relation, on met un point (un *œil*) à l'intersection de leurs lignes; sinon, on la laisse vide [1]. La figure formée par les points ainsi marqués caractérise la relation donnée au point de vue de sa *forme* (§ 4).

On définit certaines relations spéciales qui jouent le rôle de modules dans les opérations. Voici d'abord les *modules absolus* 0 et 1, définis par leurs coefficients

$$0_{ij} = 0, \qquad\qquad 1_{ij} = 1.$$

Cela signifie que tous les coefficients de 0 sont 0, et que tous les coefficients de 1 sont 1; en d'autres termes, la matrice de 0 est entièrement vide (ne contient aucun point), et celle de 1 est entièrement pleine (contient tous les points de l'ensemble 1_2).

On définit encore les *modules relatifs* 0' et 1' par leurs coefficients

$$0'_{ij} = (i \neq j), \qquad 1'_{ij} = (i = j).$$

Cela veut dire que le coefficient de 0' qui correspond au couple $(i:j)$ est égal à 0 quand i et j sont identiques, et à 1 dans le cas contraire; et que le coefficient de 1' qui correspond au couple $(i:j)$ est égal à 1 quand i et j sont identiques, et à 0 dans le cas contraire. Si l'on suppose les individus de l'ensemble 1_1 rangés dans le même ordre sur les deux entrées du tableau, la matrice de 1' se composera uniquement de tous les points de la *diagonale principale* [2], et la matrice de 0' aura au contraire tous ses points pleins, sauf ceux de cette diagonale. Ainsi 1' est la somme des sibi-relations individuelles, et 0' celles des aliorelations individuelles [3].

---

[1] Chaque relation individuelle impliquant un ordre entre ses deux termes, on prendra le premier terme dans la colonne de gauche, c'est-à-dire parmi les lignes horizontales, et le deuxième terme dans la ligne supérieure, c'est-à-dire parmi les colonnes verticales.

[2] Définie comme dans les déterminants.

[3] 1' est la relation d'identité (i est identique à j); 0' est la relation d'*altérité* (i est autre que j).

On définit ensuite les *six* opérations fondamentales : les trois premières sont les mêmes qu'en Logique : *multiplication, addition* et *négation*. Voici leurs formules, appliquées aux coefficients :

$$(ab)_{ij} = a_{ij} b_{ij}, \qquad (a+b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

$$\bar{a}_{ij} = \overline{(a_{ij})} \quad (^1).$$

Les coefficients n'étant susceptibles que des valeurs 0 et 1, cela veut dire que le produit ab a un 1 partout où les deux facteurs a et b ont à la fois un 1, et un 0 partout ailleurs; et que la somme $(a+b)$ a un 1 partout où l'un au moins des termes a et b a un 1, et un 0 partout ailleurs [2]. Enfin, la négation $\bar{a}$ de a a un 1 partout où a a un 0, et un 0 partout où a a un 1. Les deux matrices a et $\bar{a}$ sont complémentaires, et l'on a les deux relations

$$a\bar{a} = 0, \qquad a + \bar{a} = 1.$$

Voici maintenant comment se définissent les trois opérations propres à l'Algèbre des relations : la *multiplication* et l'*addition relatives*, et la *conversion :*

$$(a\,;b)_{ij} = \Sigma_h a_{ih} b_{hj}, \qquad (a \dagger b)_{ij} = \Pi_h (a_{ih} + b_{hj}) \quad (^3),$$

$$\breve{a}_{iy} = a_{ji}.$$

Cela signifie, en somme, que la relation $a\,;b$ existe entre les deux individus i et j, s'il y a au moins un individu h tel que la relation a existe entre i et h, et (en même temps) la relation b entre h et j; et que la relation $a \dagger b$ existe entre les individus i et j, si, pour tout individu h, il existe, ou bien la relation a entre i et h, ou bien la relation b entre h et j. Ces deux définitions fournissent le moyen de construire la matrice de $a\,;b$ ou de $a \dagger b$ connaissant celles de a et de b, et, par suite, de déterminer (d'une

---

(1) Le signe de la négation est désormais la barre supérieure (employée par Boole, Venn et Peirce).

(2) La *somme* et le *produit logiques* ont toujours la même interprétation géométrique; la somme $(a+b)$ est l'ensemble des points contenus dans les deux matrices a et b; le produit ab est l'ensemble de leurs points communs.

(3) Le signe employé par M. Schröder pour l'addition relative est une croix dont la branche verticale porte un crochet inférieur (à gauche), afin d'accuser l'asymétrie de l'opération (qui n'est pas commutative) comme le fait le signe ; de la multiplication relative.

manière univoque) la *somme* et le *produit relatifs* de deux relations données quelconques.

Nous nous bornerons à interpréter la *multiplication relative :* on dira que i est l'$(a; b)$ de j, si i est l'a de h, et h le b de j; par exemple : si $a =$ père et $b =$ père, $(a; b) =$ grand-père; si $a =$ frère et $b =$ père, $(a; b) =$ oncle paternel, etc. On lira $(a; b)$: « a de b » (1).

Quant à la *conversion*, elle est aisée à comprendre : la relation $\breve{a}$ (converse de a) existe entre i et j, si la relation a existe entre j et i (dans l'ordre inverse). Si $a =$ frère, $\breve{a} =$ frère; si $a =$ père, $\breve{a} =$ fils ou fille, etc. Géométriquement, la conversion se traduit par un retournement de la matrice autour de la diagonale principale. Il est clair que, pour que $a = \breve{a}$, il faut et il suffit que la relation a soit *symétrique*, ou que sa matrice soit symétrique par rapport à la diagonale principale, c'est-à-dire que, pour tout couple $(i:j)$, l'on ait

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Nous venons d'invoquer tacitement le criterium de l'*égalité* de deux relations, à savoir que tous leurs coefficients correspondants

---

(1) La notion de *produit de relations* coïncide avec celle de *fonction de fonction*. En effet, le *produit relatif* des deux équations

$$y = f(x), \qquad y = \varphi(x)$$

est

$$y = f[\varphi(x)],$$

c'est-à-dire le résultat de l'élimination de h entre les deux équations

$$y = f(h), \qquad h = \varphi(x).$$

Plus généralement, soient deux fonctions implicites déterminées par les équations

$$F(x, y) = 0, \qquad \Phi(x, y) = 0,$$

leur produit sera le résultat de l'élimination de h entre les équations

$$F(x, h) = 0, \qquad \Phi(h, y) = 0.$$

Ainsi le produit de deux courbes est une courbe. Le produit de deux courbes planes situées respectivement dans le plan des xz et dans celui des yz est la projection sur le plan des xy de l'intersection des deux cylindres droits qui ont ces courbes pour directrices (§ 4).

soient égaux (que leurs matrices soient superposables). On le formule algébriquement ainsi :

$$(a = b) = \Pi_{ij}(a_{ij} = b_{ij}).$$

De même, on définit l'*inclusion* ou subordination de deux relations binaires par la formule

$$(a < b) = \Pi_{ij}(a_{ij} < b_{ij}).$$

Or, comme $0 < 0$, $0 < 1$, $1 < 1$, mais $1 \not< 0$, cela veut dire que la relation a est contenue dans la relation b, si tous les points de la matrice de a correspondent à des points de la matrice de b (ou si la matrice de b contient tous les points de la matrice de a) (§ 3).

Toutes les règles du Calcul logique sont encore valables dans l'Algèbre des relations pour les opérations logiques. Mais les opérations *relatives* ont des règles de calcul spéciales, soit par elles-mêmes, soit combinées avec les opérations logiques, ce qui produit une grande complication. Par exemple, la multiplication et l'addition relatives sont bien associatives, mais non commutatives (comme on peut s'en rendre compte par la forme même de leur définition). Elles sont en outre distributives, chacune par rapport aux deux opérations logiques, mais non l'une par rapport à l'autre. La négation les transforme l'une en l'autre, suivant des formules analogues à celles de De Morgan :

$$\overline{a;b} = \bar{a} \dagger \bar{b}, \qquad \overline{a \dagger b} = \bar{a} ; \bar{b}.$$

Quant à la conversion, elle n'a pas d'effet sur les opérations logiques

$$\breve{\overline{ab}} = \breve{a}\breve{b}, \qquad \breve{\overline{a+b}} = \breve{a} + \breve{b},$$

et elle renverse simplement les opérations relatives

$$\breve{\overline{a;b}} = \breve{b} ; \breve{a}, \qquad \breve{\overline{a \dagger b}} = \breve{b} \dagger \breve{a}.$$

Enfin la négation et la conversion sont commutatives entre elles

$$\breve{\bar{a}} = \bar{\breve{a}}, \qquad \bar{\bar{a}} = a, \qquad \breve{\breve{a}} = a,$$

de sorte que les quatre classes a, $\breve{a}$, $\bar{a}$ et $\breve{\bar{a}}$ forment un *groupe* par rapport à ces deux opérations.

Le *principe de dualité* règne encore dans la nouvelle Algèbre. Étant donnée une formule, on obtient la formule *corrélative* (par dualité) en la contraposant, c'est-à-dire en niant les deux membres et en les intervertissant, puis en effectuant la négation sur les termes simples; cela revient à permuter entre eux les signes de la multiplication et de l'addition logiques, et à renverser le signe $<$.

A ce principe s'en joint un autre, propre à l'Algèbre des relations, qui est le *principe de conjugaison*. Étant donnée une formule, on obtient la formule *conjuguée* en convertissant les deux membres, et en effectuant la conversion sur les termes simples. Cela revient à intervertir l'ordre des opérations relatives ($;$ et $\dagger$), c'est-à-dire à renverser tous les termes, et à lire en quelque sorte la formule à rebours (en conservant les parenthèses).

Ainsi la négation, d'une part, et la conversion, d'autre part, fournissent deux moyens de transformer une formule en une autre équivalente. De plus, ces deux opérations sont commutatives; la corrélative de la conjuguée est identique à la conjuguée de la corrélative. Une seule formule en engendre donc, en général, trois autres, et il suffit, en vertu des *principes de dualité* et *de conjugaison,* d'en démontrer une seule pour établir toutes celles qui appartiennent au même *quadrige* (suivant l'expression pittoresque de l'auteur) (§§ 6, 7).

Pour compléter les règles du calcul, on établit celles du calcul des quatre modules 1, 0, 1', 0'.

Les *modules absolus* 0 et 1 sont, comme on sait, les modules respectifs de l'addition et de la multiplication logiques; de même les *modules relatifs* 0' et 1' sont les modules respectifs de l'addition et de la multiplication relatives. De même qu'on a, dans le calcul logique,

$$a\bar{a} < 0, \qquad\qquad 1 < a + \bar{a},$$

on a les formules analogues

$$a\breve{a} < 0', \qquad\qquad 1' < a + \breve{a}.$$

$$a ; \breve{a} < 0', \qquad\qquad 1' < a \dagger \breve{a}.$$

Combinés entre eux, les quatre modules forment un *groupe* par rapport aux six opérations fondamentales. De même que

o et 1, o' et 1' sont la négation l'un de l'autre (1); la conversion transforme chacun des quatre modules en lui-même (2).

On a les formules suivantes (analogues à des formules de Calcul logique), qui permettent de transformer une inclusion en lui donnant 1' pour premier membre ou o' pour second :

$$(1' < \bar{\breve{a}} + b) = (a < b) = (a\,;\bar{\breve{b}} < 0') \quad (\S\, 8).$$

Une relation quelconque a forme, avec les quatre modules, seize combinaisons irréductibles. Par exemple, 1'a comprend toutes les sibirelations individuelles, et o'a, toutes les aliorelations individuelles de a. La relation a forme, avec le module 1', un *groupe* de 64 combinaisons par rapport aux six opérations fondamentales. Par exemple, $a\breve{a}$ ne contient que les yeux pairs (symétriques) de a; $a\bar{\breve{a}}$ ne contient que ses yeux impairs (sans symétriques); $a\bar{\breve{a}} + \bar{a}\breve{a}$ transforme les yeux impairs de a en pairs, et exclut les autres; $a\breve{a} + \bar{a}\bar{\breve{a}}$ contient tous les éléments pairs (yeux ou vides) de a; et ainsi de suite. Mais les combinaisons *modulaires* les plus importantes sont les suivantes (3) :

I. $a\,;1$ transforme toutes les lignes *occupées* de a en lignes *pleines,* et conserve les lignes vides;

II. $a + 0$ transforme toutes les lignes *lacunaires* de a en lignes *vides,* et conserve les lignes pleines;

III. $a\,;0'$ transforme toutes les lignes *plurioccupées* de a en lignes pleines, et les lignes *unioccupées* en leurs négations (lignes unilacunaires);

---

(1) En effet, ils vérifient les deux relations

$$0'.1' = 0, \qquad 0' + 1' = 1,$$

comme on le constate intuitivement par leurs matrices.

(2) En effet, leurs matrices sont symétriques par rapport à la diagonale principale.

(3) Une ligne (de la matrice) de a est dite *occupée* quand elle contient au moins un 1; *unioccupée,* quand elle n'en contient qu'un; *plurioccupée,* quand elle en contient plusieurs; *vide,* quand elle n'en contient aucun. De même, elle est dite *lacunaire,* quand elle contient au moins un 0; *unilacunaire,* quand elle n'en contient qu'un; *plurilacunaire,* quand elle en contient plusieurs; *pleine,* quand elle n'en contient aucun.

IV. $a \dagger 1'$ transforme toutes les lignes *plurilacunaires* de a en lignes vides, et les lignes *unilacunaires* en leurs négations (lignes unioccupées).

Si, dans les quatre définitions précédentes, on intervertit les termes, on devra remplacer le mot *ligne* par le mot *colonne* (ligne verticale) (§ 9).

M. Schröder adopte un schématisme commode pour représenter la composition *linéaire* d'une relation : 1 figure les lignes pleines; α, les lignes unilacunaires ; β, les lignes plurilacunaires et plurioccupées; γ, les lignes unioccupées; et o les lignes vides. Ainsi chaque relation a pour schéma un nombre symbolique de cinq chiffres $1\alpha\beta\gamma 0$. Cela posé, l'auteur appelle *transformation linéaire* d'une relation toute transformation qui change le caractère de ses lignes, c'est-à-dire la composition du nombre qui les symbolise; il y en a 256 pour une relation générale.

Il traite alors le problème suivant : Représenter toutes les transformations linéaires d'une relation au moyen des quatre modules et des six opérations fondamentales. Les quatre théorèmes précédents donnent la clef de ces transformations. Chacune d'elles sera figurée par une altération du nombre symbolique $1\alpha\beta\gamma 0$. On comprend que les transformations linéaires deviennent, par simple conversion, des transformations *colonnaires,* qui consistent à changer les colonnes pleines ou vides, uni- ou plurilacunaires, uni- ou plurioccupées les unes dans les autres (§§ 15, 16).

On est ainsi amené à définir les *relations quadrillées*. Ainsi $c = (a \dagger 0)(0 \dagger b)$ est l'ensemble des points d'intersection des lignes pleines de a avec les colonnes pleines de b. De même, $d = a ; 1 + 1 ; b$ se compose de toutes les lignes occupées de a et de toutes les colonnes occupées de b, devenues pleines; de sorte que ses seuls vides sont les intersections des lignes vides de a et des colonnes vides de b. On dit alors que c est une relation quadrillée d'yeux, et d une relation quadrillée de vides, parce que les yeux de l'une et les vides de l'autre sont disposés en rectangle.

La forme générale de la première est $c ; 1 ; c$, celle de la seconde, $d \dagger 0 \dagger d$, de sorte que leurs équations caractéristiques sont

$$x = x ; 1 ; x, \qquad x = x \dagger 0 \dagger x \quad (\S\ 20).$$

On appelle *relations distinguées* des combinaisons modulaires irréductibles qui ne peuvent prendre que les deux valeurs 0 et 1 (comme des propositions). Voici quelques-unes des plus simples, avec la signification d'une de leurs valeurs (la signification de l'autre s'en déduit par négation) :

$$(1 ; a ; 1 = 0) = (a = 0), \qquad (0 \dagger a \dagger 0 = 1) = (a = 1),$$
$$[1 ; (a \dagger 0) = 0] = (a \dagger 0 = 0) = a \text{ n'a pas de ligne pleine},$$
$$(0 \dagger a ; 1 = 1) = (a ; 1 = 1) = a \text{ n'a pas de ligne vide}.$$

Inversement, on peut mettre toute proposition sous la forme d'une relation distinguée; car toute proposition consiste à égaler une certaine relation x à 0 ou à 1, ce qui peut s'exprimer en égalant à 1 une certaine relation distinguée, fonction de x, c'est-à-dire en l'écrivant simplement [1] (§ 10).

Parmi les relations spéciales qu'on peut encore définir, il faut citer l'*unilinéaire* et l'*unicolonnaire* (dont les matrices sont composées d'une seule ligne pleine ou d'une seule colonne pleine). Ils sont définis respectivement comme suit :

$$i_{hk} = 1'_{ih}, \qquad j_{hk} = 1'_{kj},$$

ce qui veut dire que leurs seuls coefficients 1 (yeux) sont ceux pour lesquels on a

$$h = i, \qquad k = j,$$

c'est-à-dire ceux de la ligne i ou de la colonne j. Ainsi i représente un élément de l'entrée de gauche et j un élément de l'entrée du haut; tous deux représentent un individu du domaine du premier ordre 1_1.

L'équation caractéristique de l'individu est

$$1' \dagger \bar{i} ; 1 = i.$$

On a l'équivalence fondamentale

$$(a_{ij} = 1) = (i < a ; j) = (j < \breve{a} ; i)$$

qui est évidente dans son interprétation verbale : car, dire que le coefficient a_{ij} est égal à 1, c'est dire que i est dans la relation a

---

(1) En vertu de l'*axiome spécial* $(X = 1) = X$.

avec j (est un a de j) ou que j est dans la relation (inverse) a avec i [1].

On a aussi l'équivalence suivante :

$$i : j = i : \breve{j} = i\breve{j}$$

qui permet de représenter la relation individuelle $(i : j)$ au moyen des six opérations fondamentales. Il est évident, géométriquement, que le point (i, j) est l'intersection de la ligne i et de la colonne $\breve{j}$ (que cette intersection existe ou non) (§ 25).

On arrive ainsi à définir l'individu du domaine du deuxième ordre 1_2, c'est-à-dire la relation individuelle dont la matrice a un seul *œil* et qu'on appelle pour cette raison l'*unioculaire* [2]. Pour avoir son équation caractéristique, il suffit d'éliminer i et j entre les trois équations suivantes :

$$z = i\breve{j},$$

$$1' \dagger \bar{i} ; 1 = i, \qquad 1' \dagger \bar{j} ; 1 = j.$$

Réduite à sa plus simple expression, elle s'écrit

$$1' \dagger \bar{z} \dagger 1' = z : 1 - 1 ; z.$$

On trouve comme résultantes partielles, d'une part,

$$(z \neq 0) = (1 ; z ; 1 = 1)$$

qui signifie que z n'est pas nulle, c'est-à-dire a au moins *un* œil ; et, d'autre part,

$$z ; 1 ; z = z$$

qui signifie que z a au plus *un* œil. On constate que l'équation caractéristique équivaut à la définition de l'individu du domaine du premier ordre donnée en Logique, c'est-à-dire à

$$(z \neq 0)\,\Pi_u\left[(z < u) + (z < \bar{u})\right] \qquad (\S\ 26).$$

---

(1) En général, on a

$$a_{ij} = \breve{i} ; a : j,$$

le second membre prenant les valeurs 0 et 1 en même temps que le premier, c'est-à-dire suivant que la relation a existe ou n'existe pas entre les individus i et j (c'est une relation distinguée).

(2) Nous rappelons que *monocle* est un barbarisme, de même que *bicycle*, *automobile*, etc.

On peut enfin passer du domaine du premier ordre au domaine du deuxième ordre et, par suite, faire rentrer le Calcul logique (et la Théorie des ensembles) dans l'Algèbre des relations, en définissant les ensembles ou *systèmes* comme des relations spéciales. On sait que, quelle que soit la relation a, les relations $a\,;\,1$ et $a \dagger 0$ se composent uniquement de lignes pleines et de lignes vides. Or chaque ligne pleine représente un individu du premier domaine; donc ces relations représentent des ensembles ou classes d'individus, c'est-à-dire des *systèmes*. L'équation caractéristique du système est donc

$$a\,;\,1 = a, \qquad \text{ou} \qquad a \dagger 0 = a.$$

On retrouve, dans l'Algèbre des relations, toutes les propriétés des classes établies dans le Calcul logique; la somme et le produit de deux systèmes et la négation d'un système sont encore des systèmes. Un système peut se représenter comme une somme d'individus

$$a = \Sigma_i a_i i,$$

le coefficient a_i étant égal à 1 ou à 0 suivant que l'individu i fait ou ne fait pas partie de l'ensemble a, ce qu'on exprime en posant

$$a_i = (a\,;\,1)_{ij},$$

valeur indépendante de j, puisqu'elle est la même sur toute la ligne i de la relation $a\,;\,1$ (pleine ou vide).

On voit que l'opération (; 1) effectuée sur une relation quelconque la transforme en un *système*. Au point de vue logique, elle transforme un terme *relatif* en un terme *absolu*. Au lieu de dire : « i est un a de j », on dit simplement : « i est un a » (¹) (§ 27).

L'auteur expose, d'autre part, la méthode générale pour résoudre les problèmes de l'Algèbre des relations. Les données du problème sont des égalités et des inégalités; mais on peut ramener les inégalités à des égalités et réduire une somme ou un produit d'égalités à une seule égalité au moyen des relations

(¹) On peut remplacer a par « multiple », « père », frère », « époux », etc. Par exemple, au lieu de dire : « x est le mari de y », on dira simplement : « x est marié ».

distinguées; on peut donc considérer tout problème comme exprimé par une équation unique. Comme dans le Calcul logique, la résolution d'une équation et l'élimination des inconnues marchent ensemble et pour ainsi dire parallèlement. On éliminera les inconnues une à une, et l'on aura des résultantes successives, dont la dernière devra être vérifiée identiquement pour que l'équation soit résoluble. Puis on résoudra les résultantes dans l'ordre inverse, en reportant dans les précédentes les expressions des inconnues tirées des suivantes. En somme, tout revient à savoir éliminer une inconnue d'une équation et résoudre celle-ci par rapport à cette inconnue (§ 11).

Soit une équation résoluble sans condition (c'est-à-dire dont la résultante est une identité)

$$\text{(1)} \qquad F(x) = 0.$$

On établit les trois propositions suivantes :

1° La solution générale de cette équation peut se mettre sous la forme

$$x = f(u),$$

u étant une relation entièrement arbitraire.

2° Toute solution générale est caractérisée par l'égalité

$$[F(x) = 0] = \Sigma_u [x = f(u)],$$

la somme Σ étant étendue à toutes les relations u possibles, c'est-à-dire à toutes les classes du domaine 1_2.

3° La solution générale peut toujours vérifier la condition complémentaire suivante

$$[F(x) = 0] = [f(x) = x],$$

c'est-à-dire que la fonction f doit être telle que les racines soient caractérisées par l'équation

$$\text{(2)} \qquad f(x) = x.$$

Si l'on connaît *une* racine a de l'équation (1), on peut la résoudre *à la rigueur* en prenant pour solution générale la fonction

$$f(u) = a[1; F(u); 1] + u[0 \div \overline{F(u)} \div 0].$$

En effet, on prouve que, si $F(u) = 0$,

$$f(u) = u,$$

et que, si $F(u) \neq 0$,

$$f(u) = a.$$

Donc, dans tous les cas, $f(u)$ fournit une racine de (1).

Mais cette solution *à la rigueur* n'est pas satisfaisante ; il faut encore que la fonction $f(u)$ permette de reconnaître les racines au moyen de l'équation (2), c'est-à-dire les reproduise identiquement.

Inversement, si l'on veut éliminer u d'une équation

$$f(u) = x,$$

la résultante aura la forme

$$F(x) = 0.$$

Ainsi le problème de l'élimination est l'inverse du problème de la résolution. En Logique, le problème de l'élimination consiste à tirer de prémisses données une conclusion en faisant abstraction des termes inconnus, c'est-à-dire auxiliaires. Le problème de la résolution, au contraire, consiste à trouver de quelles prémisses on peut déduire telle conclusion donnée, en introduisant des éléments nouveaux représentés par les paramètres indéterminés (§ 12) [1].

Voici la solution générale du problème de l'élimination :

Étant donnée l'équation (1), la résultante complète de l'élimination de x peut se mettre sous les deux formes corrélatives

$$\Pi_u [1 ; F(u) : 1] = 0, \qquad \Sigma_u [0 \dagger \overline{F(u)} \dagger 0] = 1.$$

En effet, en vertu des propriétés des relations distinguées, si

$$F(x) = 0,$$

on a

$$1 : F(x) ; 1 = 0, \qquad 0 \dagger \overline{F(x)} \dagger 0 = 1,$$

et réciproquement (§ 28).

M. Schröder traite dans un ordre méthodique les divers problèmes que présente l'Algèbre des relations, c'est-à-dire toutes les

(1) Ce processus est analogue à l'intégration, qui introduit des constantes arbitraires.

équations que l'on peut construire avec un ou plusieurs termes combinés avec les modules. Nous ne pouvons entrer dans le détail de la résolution, souvent très compliquée, de ces équations. Nous nous bornerons à mentionner les problèmes les plus intéressants.

Tels sont, par exemple, les *problèmes d'inversion,* dont les types sont les équations

$$x ; b < a, \qquad a < x ; b, \qquad x ; b = a,$$

que l'on résout à l'aide des *théorèmes d'inversion*

$$(a ; b < \breve{c}) = (b ; c < \breve{a}) = (c ; a < \breve{b}),$$

et de l'équivalence fondamentale suivante [1]

$$(a ; b < c) = (a < c \dotplus \bar{\breve{b}}),$$

qui permet de faire passer un terme (ou facteur) d'un membre dans l'autre d'une inclusion (§§ 17-19).

Parmi les problèmes en deux lettres, signalons les deux inclusions suivantes et leurs solutions

1° $$(x < \breve{x}) = \Sigma(x = u\breve{u}) = \Sigma(x = u \dotplus \breve{u}).$$

Cette inclusion exprime que x est une relation *symétrique* ou *réciproque,* car elle équivaut à l'équation

$$x = \breve{x}.$$

2° $$(x < \bar{\breve{x}}) = \Sigma(x = u\bar{\breve{u}}).$$

Cette inclusion exprime que x est une relation *impaire* ou *asymétrique,* car elle équivaut à l'équation

$$x\breve{x} = 0 \qquad (§ 21).$$

Parmi les problèmes en trois lettres, on remarque celui-ci .

$$x ; x < x$$

qui exprime que la relation x est *transitive :* « Tout x de x est encore un x », ou plus explicitement : « Si i est un x de h, et h

---

[1] Analogue à la formule de Peirce en Logique :

$$(ab < c) = (a < c + b_1).$$

un x de j, i est aussi un x de j ». Telles sont, par exemple, les relations d'égalité (arithmétique), de congruence (géométrique), qui sont aussi symétriques. Comme exemples de relations *symétriques non transitives* on peut citer : « inégal à », « premier avec », etc., et comme exemples de relations *transitives non symétriques :* « plus grand que », « plus petit que », « multiple de », « diviseur de », etc.

La solution générale de cette inclusion (c'est-à-dire la formule générale des relations transitives) peut se mettre sous trois formes différentes *finies :*

$$x = (u \dotplus u)u = u(u \dotplus \breve{u}) = (\breve{u} \dotplus u)u(u \dotplus \breve{u})$$

et sous forme d'une série *infinie :*

$$x = u + u^2 + u^3 + \ldots \qquad (\S\ 22).$$

Cela nous amène à dire quelques mots des séries, de leur convergence, de leurs limites, et de l'itération des fonctions dans l'Algèbre des relations.

Étant donnée une suite simplement infinie de relations

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

on dit que son terme général u_n est *convergent,* si à chaque place (i, j) de la matrice correspond un nombre k tel que, pour tout $n > k$, u_n y ait toujours un œil (un point) ou un vide.

On dit qu'une place (i, j) est *définitivement pleine* ou *vide,* si elle est pleine ou vide dans toutes les relations u_n à partir d'un certain rang k.

La *limite* u_∞ de la suite convergente u_n est la relation qui a pour places pleines les places définitivement pleines, et pour places vides les places définitivement vides. On démontre aisément que toute suite convergente a une limite bien déterminée qu'elle définit complètement.

Toute suite infinie n'est évidemment pas convergente; mais toute série (somme infinie) et tout produit infini est convergent *sans condition* (1).

---

(1) Inutile de faire ressortir l'immense avantage que cette propriété confère à l'Algèbre des relations sur l'Analyse ordinaire, au point de vue de la simplicité et de la généralité.

D'autre part, on peut définir la *puissance $n^{ième}$* d'une relation u comme le produit relatif de n facteurs égaux à u, que l'on désignera par $(u\,;)^n$ ou simplement u^n (¹).

De même, on définira une *somme itérative* (que l'on pourrait aussi appeler un *multiple*) de u, comme la somme relative de n termes égaux à u, que l'on désignera par $(u \dagger)^n$.

La puissance x^n est convergente, si x vérifie l'une des inclusions

$$x < x\,;x \qquad x\,;x < x.$$

Mais on n'a pas de criterium général de la convergence d'une puissance. En général, une puissance est divergente; néanmoins, d'après ce qui vient d'être dit, toute série de puissances $\Sigma_1^\infty u^n$ est convergente.

On définit une fonction *itérée* de la manière suivante (par récurrence) :

$$f^0(u) = u, \qquad f^1(u) = f(u), \qquad f^{n+1}(u) = f[f^n(u)].$$

Si la fonction itérée $f^n(u)$ est convergente, elle a une limite bien déterminée qui sera, par définition,

$$f^\infty(u) \qquad (\S\ 13).$$

Revenons aux problèmes en trois lettres. On voit que la solution générale de l'inclusion

$$x\,;x < x$$

mise sous la forme d'une série de puissances

$$x = u + u^2 + u^3 + \ldots$$

a toujours un sens déterminé, quelle que soit l'indéterminée u. Un autre problème, à savoir :

$$(x\,;a < x) = (x < x \dagger \breve{a}) = (a < \breve{x} \dagger x)$$

a pour solution générale la limite d'une fonction itérée

$$x = f^\infty(u),$$

où

$$f(u) = u + u\,;a.$$

(¹) Il n'y a pas d'ambiguïté à craindre, puisque la multiplication logique ne comporte pas de puissances.

et par suite

$$f^{\infty}(u) = u + u ; a + u ; a^2 + u ; a^3 + \ldots .$$

On est ainsi amené à définir la *chaîne* de a

$$a_0 = 1' + a + a^2 + a^3 + \ldots = (1' + a)^{\infty}$$

[ce qui permet d'écrire la solution précédente

$$x = f^{\infty}(u) = u ; a_0]$$

et la *chaîne-image* de a

$$a_{00} = a ; a_0 = a_0 ; a = a + a^2 + a^3 + \ldots .$$

Les fonctions itérées à l'infini, et les chaînes en particulier, fournissent la solution d'une certain nombre de problèmes (§ 22). Mais leur application la plus intéressante est celle que M. Schröder en fait en traduisant et en justifiant dans l'Algèbre des relations la *théorie des chaînes* de M. Dedekind ([1]). Il retrouve ainsi un des résultats les plus importants de cette théorie, à savoir la démonstration analytique rigoureuse du *principe de l'induction complète* (§§ 23, 24).

L'auteur emploie enfin l'Algèbre des relations à définir les concepts les plus importants de la Théorie des fonctions. Il appelle *représentation* une relation binaire telle qu'elle-même ou sa converse soit *au moins univoque* (jamais nullivoque) ou *au plus univoque* (jamais plurivoque), et il formule analytiquement les conditions auxquelles elles possèdent chacun de ces caractères. (Une représentation *au moins univoque* est une relation qui n'a pas de colonne *vide;* une représentation *au plus univoque* est une relation qui n'a pas de colonne *plurioccupée.*) Une représentation *univoque* (au moins et au plus) s'appelle une *fonction* (toutes ses colonnes sont unioccupées) ([2]). La relation inverse s'appelle un *argument* (toutes ses lignes sont unioccupées). Enfin une représentation univoque et réciproque ([3]) s'appelle

---

([1]) *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig, Vieweg, 1887.

([2]) Une fonction $y = f(x)$ s'écrit dans l'Algèbre des relations :

$$i = f ; j.$$

Une fonction constante est une relation *unilinéaire* qui correspond à sa valeur unique.

([3]) C'est-à-dire dont la convergence est aussi univoque. Exactement : « fonction *uniforme* d'*une* variable ».

une *substitution*. L'inversion d'une fonction équivaut à la *conversion* de la relation qui lui correspond. Une fonction de fonction est, comme on l'a déjà vu, le produit *relatif* des deux fonctions. Dans la théorie des substitutions, le module relatif 1' représente la substitution *identique;* la relation $\breve{s}$, converse de s, représente la substitution inverse de s. Le produit de deux substitutions est leur produit relatif. Les puissances successives d'une substitution sont ses puissances relatives. On voit que la Logique des relations donne une définition et une expression analytiques à toutes les notions fondamentales de la Théorie des substitutions, et fournit pour les calculer un algorithme approprié (§ 30).

Enfin M. Schröder trouve, dans l'Algèbre des relations, *six* définitions formelles de la *représentation semblable* d'un système par un autre; il en tire la définition des ensembles *semblables* ou *équivalents* (d'égale puissance) et, par suite, celle de la *puissance* (nombre cardinal) et celle de l'ensemble *infini* (semblable à une partie intégrante de lui-même) (§ 31).

Depuis que ce Volume est paru, l'auteur, poursuivant ses recherches, a employé son Algèbre à démontrer plusieurs théorèmes de M. Cantor sur les ensembles, à établir l'équivalence de deux définitions de l'ensemble fini, données respectivement par Peirce et par M. Cantor, à définir la notion d'ordre linéaire (comme une relation entre les éléments d'un même ensemble), enfin à définir analytiquement les premiers nombres cardinaux ([1]). Ces essais donnent une idée de la portée de cette Algèbre et de ses applications aux Mathématiques, que contiendra probablement la suite de l'Ouvrage que nous venons d'analyser.

En résumé, l'œuvre de M. Schröder, encore inachevée, forme déjà un corps de doctrine vaste et imposant; c'est toute une

---

([1]) *Ueber zwei Definitionen der Endlichkeit, und G. Cantor'sche Sätze; die selbständige Definition der Mächtigkeiten* 0, 1, 2, 3, *und die explizite Gleichzahligkeitsbedingung*, ap. *Abhandlungen der Kaiserl. Leop.-Carol. Akademie der Naturforscher*, t. LXXI (Halle, 1898). *Cf.* l'article déjà cité : *Ueber Pasigraphie*, etc. Nous avons cru devoir faire des réserves, au point de vue philosophique, sur ces prétendues définitions *analytiques* du nombre entier, ainsi que sur la définition *logique* de l'individu : *Sur une définition logique du nombre*, ap. *Revue de Métaphysique et de Morale*, janvier 1900 (t. VIII, p. 23-36).

Science nouvelle que l'auteur a, sinon créée, du moins fondée à nouveau, développée dans un enchaînement rigoureux et exposée dans un ordre systématique. D'une part, la Logique des relations est définitivement constituée sous la forme d'une Science mathématique, et dotée d'une méthode purement analytique. D'autre part, l'Algèbre des relations rejoint et enveloppe les branches proprement logiques des Mathématiques (théories des ensembles, des substitutions, des fonctions). Elle comble donc la lacune qui existait entre la Logique et la Mathématique; elle retrouve et justifie les fondements logiques de celle-ci, et elle en fait une branche ou un prolongement de la Logique elle-même. Elle rattache les principes propres des Mathématiques aux lois générales de la pensée, et contribue ainsi à réaliser l'unité philosophique de la Science. LOUIS COUTURAT.

MÉLANGES.

REMARQUE SUR LA SÉRIE DE FOURIER;

PAR M. LERCH.

1. Soit $f(x)$ une fonction finie et intégrable dans l'intervalle de zéro à un, et développable par la série de Fourier

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos 2\nu x\pi + b_\nu \sin 2\nu x\pi).$$

En introduisant les quantités a_ν et b_ν avec des indices négatifs par les équations $a_{-\nu} = a_\nu$, $b_{-\nu} = -b_\nu$, $b_0 = 0$, cette formule pourra s'écrire comme il suit

$$(1^a) \qquad f(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{2\nu x\pi i}, \qquad \text{où} \qquad c_\nu = \frac{a_\nu - b_\nu i}{2}.$$

Il n'en résulte pas que ce résultat puisse s'écrire de la manière

suivante :

$$(2)\qquad f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{2\nu x\pi i}, \qquad (0 \leqq x < 1);$$

car l'existence de cette série implique la convergence des deux suivantes :

$$\sum_{0}^{\infty} c_\nu e^{2\nu x\pi i}, \qquad \sum_{-\infty}^{-1} c_\nu e^{2\nu x\pi i};$$

la partie réelle de la première revient, à une constante près, à la moitié de la série (1), mais elle présente aussi une partie imaginaire

$$(3)\qquad \frac{i}{2}\sum_{0}^{\infty}(a_\nu \sin 2\nu x\pi - b_\nu \cos 2\nu x\pi)$$

qui est étrangère à la série de Fourier et dont il n'est jamais question dans les recherches de la convergence de la série (1).

La série (2), dont les coefficients sont donnés par la formule

$$(4)\qquad c_\nu = \int_0^1 f(z)\, e^{-2\nu z\pi i}\, dz,$$

est donc une chose de nouveau, différente de la série de Fourier, et on peut l'appeler la *série de Laurent* relative à des fonctions d'une variable réelle. Nous verrons que l'existence de la série de Laurent impose à la fonction $f(x)$ des conditions plus spéciales que celle de la série de Fourier, de sorte que, logiquement, il faut admettre l'existence de fonctions développables par la série de Fourier et non plus par la série de Laurent; il serait du plus haut intérêt de posséder des exemples de telles fonctions. Mais si la série de Laurent converge, ses parties imaginaires se détruisent, et elle devient égale à la série de Fourier.

Pour établir la convergence de la série (2), dont les coefficients sont donnés par la formule (4), il suffit d'établir la convergence de la série suivante :

$$\sum_{0}^{\infty} c_\nu e^{2\nu x\pi i}.$$

car, à une constante près, le reste est une quantité conjuguée de celle-ci.

Considérons à cet effet l'expression

$$(5)\qquad S_n = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu e^{2\nu x\pi i},$$

on trouvé

$$(5^a)\quad \begin{cases} S_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(z)\,\dfrac{\sin(2n+1)(z-x)\pi + \sin(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}\,dz \\ \qquad -\dfrac{i}{2}\displaystyle\int_0^1 f(z)\,\dfrac{\cos(2n+1)(z-x)\pi - \cos(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}\,dz. \end{cases}$$

La limite de la partie réelle du second membre pour n infini a été l'objet de recherches importantes, mais à notre connaissance l'étude de la partie imaginaire n'a pas été abordée jusqu'ici.

Je veux d'abord établir que cette partie imaginaire n'aura une limite que lorsque la fonction $f(z)$ sera continue au point x. Soit, en effet, $x = c$ une quantité contenue entre zéro et un, et prenons pour $f(z)$ la valeur zéro, lorsque $0 < z < c$, et la valeur un lorsque $c < z < 1$. Alors l'intégrale qui multiplie $\frac{i}{2}$ dans notre formule deviendra

$$\int_c^1 \frac{\cos(2n+1)(z-c)\pi - \cos(z-c)\pi}{\sin(z-c)\pi}\,dz$$
$$= \int_0^{1-c} \frac{\cos(2n+1)z\pi - \cos z\pi}{\sin z\pi}\,dz$$

et l'identité facile à vérifier

$$\frac{\cos(2n+1)z\pi - \cos z\pi}{\sin z\pi} = -2\sum_{\nu=1}^{n} \sin 2\nu z\pi$$

donne

$$\int_0^a \frac{\cos(2n+1)z\pi - \cos z\pi}{\sin z\pi}\,dz = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos 2\nu a\pi - 1}{\nu\pi},$$

quantité qui, pour $n = \infty$, tend vers moins infini.

2. Posons maintenant, pour abréger le langage,

$$(6)\quad \begin{cases} T = \displaystyle\int_0^1 f(z)\frac{\sin(2n+1)(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}\,dz, \\ U = \displaystyle\int_0^1 f(z)\frac{\cos(2n+1)(z-x)\pi - \cos(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}\,dz, \end{cases}$$

et commençons par évaluer ces intégrales dans le cas de $f(x) = 1$. Dans ce cas la formule (2) subsiste, car on a $c_0 = 1$, $c_\nu = 0$ pour $\nu \gtrless 0$, et en séparant dans la formule (5^a) les parties réelles des parties imaginaires, il s'ensuit

$$\int_0^1 \frac{\sin(2n+1)(z-x)\pi + \sin(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}\,dz = 2,$$

$$\int_0^1 \frac{\cos(2n+1)(z-x)\pi - \cos(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}\,dz = 0,$$

d'où l'on a

$$(6^a)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(2n+1)(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}\,dz = 1, \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(2n+1)(z-x)\pi - \cos(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}\,dz = 0. \end{cases}$$

Écrivons maintenant les formules (6) sous la forme

$$(6^*)\quad \begin{cases} T = \displaystyle\int_{-x}^{1-x} f(x+z)\frac{\sin(2n+1)z\pi}{\sin z\pi}\,dz, \\ U = \displaystyle\int_{-x}^{1-x} f(x+z)\frac{\cos(2n+1)z\pi - \cos z\pi}{\sin z\pi}\,dz, \end{cases}$$

posons $f(x+z) - f(x) = \varphi(z)$ et employons les formules (6^a); il vient

$$(7)\qquad T = \overline{T} + f(x), \qquad U = \overline{U},$$

en posant pour abréger

$$(7^a)\quad \begin{cases} \overline{T} = \displaystyle\int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\frac{\sin(2n+1)z\pi}{\sin z\pi}\,dz, \\ \overline{U} = \displaystyle\int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\frac{\cos(2n+1)z\pi - \cos z\pi}{\sin z\pi}\,dz. \end{cases}$$

Si la fonction $f(z)$ était continue au point x, la fonction $\varphi(z)$ sera continue au point $z = 0$ et y aura la valeur nulle.

J'écrirai maintenant w au lieu de $2n+1$, et je ferai usage de la circonstance que l'on a

$$\frac{1}{\sin z\pi} = \frac{1}{z\pi} + \mathfrak{P}(z),$$

en désignant par $\mathfrak{P}(z)$ une fonction qui reste finie et continue dans chaque intervalle de la forme $(-1+\varepsilon \ldots 1-\varepsilon)$; on a évidemment

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{U}} &= \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\frac{\cos wz\pi - 1}{\sin z\pi}\,dz + \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\frac{1-\cos z\pi}{\sin z\pi}\,dz \\ &= \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\frac{\cos wz\pi - 1}{z\pi}\,dz + \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)(\cos wz\pi - 1)\,\mathfrak{P}(z)\,dz \\ &\qquad + \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\frac{1-\cos z\pi}{\sin z\pi}\,dz,\end{aligned}$$

de sorte que nos équations (7^a) deviennent

$$(7^b)\quad \left\{\begin{aligned}\overline{\mathrm{T}} &= \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\frac{\sin wz\pi}{z\pi}\,dz + \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\,\mathfrak{P}(z)\sin wz\pi\,dz, \\ \overline{\mathrm{U}} &= \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\frac{\cos wz\pi - 1}{z\pi}\,dz + \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\left(\frac{1}{z\pi} - \cot z\pi\right)dz \\ &\qquad + \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\,\mathfrak{P}(z)\cos wz\pi\,dz.\end{aligned}\right.$$

Pour trouver les limites de ces expressions pour w infini, nous allons considérer d'abord les quantités

$$(8)\qquad \mathrm{X} = \int_0^a \varphi(z)\frac{\sin wz\pi}{z}\,dz, \qquad \mathrm{Y} = \int_0^a \varphi(z)\frac{\cos wz\pi - 1}{z}\,dz,$$

sous l'hypothèse de $0 < a < 1$ et que $\varphi(z)$ soit finie et intégrable entre zéro et a, et que l'on ait $\lim_{z=0} \varphi(z) = 0$; en même temps nous nous libérons de l'hypothèse que w soit de la forme particulière $2n+1$, en admettant que w tende vers l'infini positif d'une manière quelconque.

Après avoir mis ces intégrales sous la forme

$$(8^a)\qquad X=\int_0^{aw}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{\sin z\pi}{z}\,dz,\qquad Y=\int_0^{aw}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{\cos z\pi-1}{z}\,dz,$$

je représenterai par n un entier positif tel que la différence $aw-n-\frac{1}{2}$ soit positive et inférieure à une limite constante, puis par m un entier positif fixe. En observant que les intégrales

$$\int_0^{m}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{\sin z\pi}{z}\,dz,\qquad \int_n^{aw}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{\sin z\pi}{z}\,dz,$$

$$\int_0^{m+\frac{1}{2}}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{\cos z\pi-1}{z}\,dz,\qquad \int_{n+\frac{1}{2}}^{aw}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{\cos z\pi-1}{z}\,dz$$

tendent vers zéro pour w infini, il s'ensuit que l'on pourra remplacer les quantités X et Y par les suivantes :

$$(8^b)\qquad X_1=\int_m^{n}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{\sin z\pi}{z}\,dz,\qquad Y_0=\int_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{\cos z\pi-1}{z}\,dz,$$

et en posant

$$(8^c)\qquad Z=\int_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{\cos z\pi}{z}\,dz,$$

et puis

$$(8^d)\qquad I=\int_r^{aw}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{dz}{z}=\int_{\frac{r}{w}}^{a}\varphi(z)\frac{dz}{z},$$

où r signifie une constante positive, il est clair que la quantité Y_0 aura la même limite que la quantité

$$(8^e)\qquad Y_1=Z-I.$$

L'intégrale Z pouvant s'écrire

$$(8^{c'})\qquad Z=-\int_m^{n}\varphi\left(\frac{z+\frac{1}{2}}{w}\right)\frac{\sin z\pi}{z+\frac{1}{2}}\,dz.$$

on peut la mettre sous la forme

$$Z = -\int_m^n \varphi\left(\frac{z + \frac{1}{2}}{w}\right) \frac{\sin z\pi}{z}\, dz + \frac{1}{2}\int_m^n \varphi\left(\frac{z + \frac{1}{2}}{w}\right) \frac{\sin z\pi}{z\left(z + \frac{1}{2}\right)}\, dz.$$

A cause de la convergence *absolue* de l'intégrale

$$\int_m^\infty \frac{\sin z\pi}{z\left(z + \frac{1}{2}\right)}\, dz$$

et à cause de l'hypothèse $\lim \varphi\left(\frac{z}{w}\right) = 0$ pour $w = \infty$, on aura

$$\lim \int_m^n \varphi\left(\frac{z + \frac{1}{2}}{w}\right) \frac{\sin z\pi}{z\left(z + \frac{1}{2}\right)}\, dz = 0,$$

et l'intégrale Z pourra être remplacée par la suivante :

$$Z_1 = -\int_m^n \varphi\left(\frac{z + \frac{1}{2}}{w}\right) \frac{\sin z\pi}{z}\, dz,$$

qui donne

(9) $$X_1 + Z_1 = \int_m^n \left[\varphi\left(\frac{z}{w}\right) - \varphi\left(\frac{z}{w} + \frac{1}{2w}\right)\right] \frac{\sin z\pi}{z}\, dz;$$

cette intégrale a évidemment la même limite pour w infini que la suivante :

(9^a) $$A = \int_0^a \left[\varphi(z) - \varphi\left(z + \frac{1}{2w}\right)\right] \frac{\sin wz\pi}{z}\, dz.$$

Dans beaucoup de cas on peut conclure de l'une ou l'autre des deux formules (9) et (9^a) que l'on a

$$\lim_{w=\infty} (X_1 + Z_1) = 0.$$

Supposons, par exemple, que la fonction $\varphi(t)$ soit continue entre zéro et a inclusivement les limites, et représentons par $\Delta\varphi(t)$ la quantité $\varphi\left(t + \frac{1}{2w}\right) - \varphi(t)$; l'intégrale (9) sera infé-

rieure en valeur absolue à la quantité

$$\int_m^n \left|\Delta\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\right|\frac{dz}{z} \leq \delta \log\frac{n}{m},$$

supposé que δ représente le maximum de $|\Delta\varphi(t)|$.

Or, puisque $\lim\frac{n}{w} = 1$, on aura

$$\lim_{w=\infty} \delta \log\frac{n}{m} = 0,$$

si la différence $\Delta\varphi(t)$ remplit la condition

$$\lim_{w=\infty} \Delta\varphi(t)\log w = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\lim_{\Delta t=0} [\Delta\varphi(t)\log\Delta t] = 0.$$

Observons que la convergence de la série de Fourier exige que l'on ait

$$\lim_{w=\infty} X_1 = 0,$$

et si l'intégrale (9) doit tendre vers zéro, on devrait donc avoir en même temps

$$\lim_{w=\infty} Z_1 = 0,$$

et la quantité Y_1 ne pourrait avoir une limite déterminée que si l'intégrale J, donnée par la formule (8^d), tend vers une limite finie. Or l'existence de la limite

$$\lim_{w=\infty}\int_{\frac{r}{w}}^a \varphi(z)\frac{dz}{z}$$

suppose que la fonction $\frac{\varphi(z)}{z}$ soit intégrable à partir du point $z=0$.

Cette circonstance vérifie ce que nous avons annoncé, à savoir que la convergence de la série de Fourier a lieu sous beaucoup moins de restrictions que celle de la série de Laurent.

Supposons maintenant que l'intégrale

$$(10)\qquad \int_0^{a'} \varphi(z)\frac{dz}{z} \qquad (a' \leq a)$$

soit finie et déterminée, et revenons sur les intégrales X_1 et Z.

En employant l'identité

$$\int_m^n = \sum_m^{n-1} \int_\nu^{\nu+1}$$

et en changeant, dans le terme général du deuxième membre, z en $\nu + z$, il vient, d'après (8^b),

$$X_1 = \int_0^1 \sin z\pi\, dz \sum_{\nu\ m}^{n-1} (-1)^\nu \frac{\varphi\left(\frac{z+\nu}{w}\right)}{z+\nu},$$

ce que l'on peut écrire

$$X_1 = \int_0^1 \sin z\pi\, dz \left[\frac{1}{w} \sum_{\frac{m}{2} \leqq \mu < \frac{n}{2}} \frac{\varphi\left(\frac{z+2\mu}{w}\right)}{\frac{z+2\mu}{w}} - \frac{1}{w} \sum_{\frac{m}{2} < \mu \leqq \frac{n}{2}} \frac{\varphi\left(\frac{z+2\mu-1}{w}\right)}{\frac{z+2\mu-1}{w}} \right].$$

Chacune des deux sommes dont se compose la parenthèse est la valeur approximative de l'intégrale

$$\frac{1}{2} \int_0^a \frac{\varphi(z)}{z}\, dz,$$

d'où il suit que l'on a

$$\lim X_1 = 0 \qquad \text{pour} \qquad w = \infty.$$

On prouve de la même manière que $\lim Z = 0$ et que, par conséquent,

$$\lim Y_1 = -\int_0^a \varphi(z) \frac{dz}{z}.$$

En changeant, dans ce qui précède, $\varphi(z)$ en $z\varphi(z)\,\mathfrak{P}(z)$, on voit tout de suite que l'on a

$$\lim \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\,\mathfrak{P}(z) \sin w z\pi\, dz = 0,$$

$$\lim \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\,\mathfrak{P}(z) \cos w z\pi\, dz = 0,$$

et les équations (7^b) nous fourniront les résultats

$$\lim \overline{T} = 0, \qquad \lim \overline{U} = -\int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\frac{dz}{z\pi} + \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\left(\frac{1}{z\pi} - \cot z\pi\right)dz,$$

ou bien

$$\lim \overline{U} = -\int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\cot z\pi\, dz,$$

où l'on a introduit l'hypothèse qu'aussi la fonction $\frac{\varphi(-z)}{z}$ soit intégrable à partir du point $z = 0$.

On a, par conséquent, d'après les formules (6) et (7),

(11) $$\lim_{n=\infty} \int_0^1 f(z)\frac{\sin(2n+1)(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}dz = f(x),$$

(12) $$\left\{\begin{aligned} &\lim_{n=\infty} \int_0^1 f(z)\frac{\cos(2n+1)(z-x)\pi - \cos(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}dz \\ &\quad = -\int_0^1 [f(z)-f(x)]\cot(z-x)\pi\, dz. \end{aligned}\right.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Soit $f(z)$ une fonction finie et intégrable dans l'intervalle (0, ..., 1), *et supposons que dans certains points x cette fonction soit continue de telle mesure que les deux fonctions*

$$\frac{f(x+t)-f(x)}{t}, \qquad \frac{f(x-t)-f(x)}{t}$$

soient intégrables à partir de la valeur de $t = 0$; alors, en posant

$$c_\nu = \int_0^1 f(z)\, e^{-2\nu z\pi i}\, dz,$$

la série

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu\, e^{2\nu x\pi i} \qquad (0 < x < 1)$$

correspondant à ces valeurs-là de x sera convergente et aura pour somme $f(x)$, et la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\, e^{2\nu x\pi i},$$

qui n'en contient que la moitié de termes, aura pour valeur l'expression

$$\frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}f(x) - \frac{i}{2}\int_0^1 [f(z) - f(x)] \cot(z - x)\pi \, dz.$$

Ce théorème subsiste aussi pour $x = 0$, si les deux quantités $f(0)$ et $f(1)$ sont égales, et si les deux fonctions

$$\frac{f(t) - f(0)}{t}, \quad \frac{f(1 - t) - f(0)}{t}$$

sont intégrables à partir de $t = 0$. On peut l'employer pour mettre certaines séries sous forme d'intégrales définies.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CAHEN (E.). — Éléments de la Théorie des nombres. Congruences. — Formes quadratiques. — Nombres incommensurables. — Questions diverses. Un vol. in-8°, VIII-403 p. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Qu'il n'y ait, dans notre pays, aucun livre classique moderne sur la théorie des nombres, cela est d'autant plus étonnant que cette théorie n'a pas cessé d'être cultivée et enrichie soit par des maîtres très illustres, soit par des travailleurs modestes. Sauf le premier volume de la *Théorie des nombres* de Lucas, je ne sais s'il a paru en France aucun livre spécial sur cette matière depuis la Traité de Legendre et la traduction des *Disquisitiones*. Les auteurs de Traités d'Arithmétique font, d'ordinaire, une petite place à cette belle théorie; ils essayent d'éveiller chez leurs lecteurs un goût que ceux-ci ne trouvent guère le moyen de développer, s'ils ignorent les langues étrangères. Ils peuvent, sans doute, trouver dans l'*Algèbre supérieure* de J.-A. Serret, d'excellents renseignements sur les congruences; mais la théorie des formes quadratiques n'y est pas touchée, non plus que dans l'unique volume qu'il ait été donné à Lucas de publier. Si intéressant que soit ce volume, que l'on continuera de lire pour les faits curieux et les ingénieux aperçus qu'il contient, on peut regretter que son auteur se soit trop souvent arrêté sur des problèmes particuliers, et se soit détourné de la grande et large voie ouverte et suivie par Fermat, Euler, Lagrange, Legendre, Gauss, Lejeune-Dirichlet.... C'est les résultats essentiels obtenus dans cette voie qu'il importe de faire connaître, non seulement à cause de leur intérêt propre, mais parce que la valeur même de ces résultats est prouvée par la place qu'ils occupent dans d'autres parties de la Science.

Il faut donc féliciter M. Cahen d'avoir voulu écrire ces *Éléments* et de les avoir écrits avec cette clarté et cette élégance que l'on est presque en droit d'exiger dans une science dont on ne sait s'il faut plus admirer les énoncés que les démonstrations, perfectionnées par les plus grands mathématiciens. Le titre est d'ailleurs bien justifié, et c'est bien la partie élémentaire du sujet que l'au-

teur a traitée, celle que doivent connaître tous ceux qui étudient les Mathématiques.

M. Cahen a cru, avec raison, devoir reprendre les principes, ceux même qui sont exposés dans les Traités d'Arithmétique, afin de fixer nettement le sens et la portée des mots et des opérations. En cela, il s'autorise de l'exemple de Lejeune-Dirichlet. Il insiste donc sur les définitions fondamentales des opérations relatives aux nombres entiers, fractionnaires et incommensurables; il a laissé de côté, en les supposant connues, les opérations sur les nombres négatifs, dont l'exposition aurait alourdi inutilement son livre, et n'offrait, à son point de vue, aucun intérêt.

Son livre contient six Chapitres et huit Notes.

Les deux premiers Chapitres contiennent le rappel des notions élémentaires sur les nombres entiers et les nombres premiers, la théorie de l'*indicateur* et des fractions continues limitées. Notons l'introduction de l'indicateur du $p^{\text{ième}}$ ordre d'un nombre entier n, comme nombre des groupes de p nombres dont le plus grand commun diviseur est premier à n. Le Chapitre suivant contient les propositions générales sur les congruences, l'étude spéciale des congruences de module premier, et plus particulièrement des congruences binomes, la théorie des racines primitives et des indices; enfin, l'auteur montre comment la résolution des congruences suivant un module quelconque se ramène à la résolution de congruences suivant un module premier. C'est dans ce Chapitre que se trouvent démontrés, de plusieurs points de vue, les théorèmes de Fermat, d'Euler et de Wilson. A propos des congruences suivant un module premier, l'auteur a introduit, pour les polynomes, la notion de divisibilité suivant un module premier. Signalons aussi les détails donnés pour la recherche effective des racines primitives. Le Chapitre IV se rapporte à la théorie des restes quadratiques, des symboles de Legendre et de Jacobi : M. Cahen donne deux belles démonstrations de la loi de réciprocité, fondées sur le caractère qui se tire de la considération des restes minima de la suite

$$a, 2a, 3a, \ldots, \frac{p-1}{2}a$$

par rapport au module premier p; l'une est due au pasteur Zeller, l'autre à Kronecker.

Le Chapitre V est consacré, pour la plus grande partie, aux fractions continues illimitées; après avoir établi les propositions classiques, l'auteur y montre comment on peut transformer une fraction continue qui présente quelque irrégularité dans ses premiers termes (quotients incomplets nuls ou négatifs) en une fraction continue régulière, de manière que tous les éléments, à partir d'un certain rang, soient les mêmes; il en déduit la condition pour que les fractions continues qui représentent deux nombres soient identiques à partir d'un certain quotient incomplet. Il traite ensuite de la recherche des racines commensurables d'une équation algébrique, donne les notions fondamentales sur l'irréductibilité, sur les nombres algébriques, sur la recherche des facteurs irréductibles. La réduction en fraction continue des racines d'une équation algébrique est traitée avec ampleur : l'auteur établit une limitation des coefficients de l'équation algébrique que vérifie le $n^{\text{ième}}$ quotient complet d'une telle fraction continue, limitation qui donne en particulier, d'une part, le théorème de Lagrange sur la périodicité des fractions continues qui représentent un nombre algébrique du second degré, d'autre part, une proposition bien connue, due à Liouville, sur l'approximation des irrationnelles algébriques, et d'où résulte l'existence de nombres transcendants. L'étude des nombres algébriques du second degré et des fractions continues qui les représentent est d'ailleurs reprise directement et faite avec détails : les résultats en seront utilisés dans le Chapitre suivant, pour l'équation de Pell et la réduction des formes quadratiques.

L'étude des formes quadratiques binaires est précédée d'un important paragraphe sur les substitutions linéaires, où M. Cahen introduit la notion du groupe modulaire, des substitutions congrues ou incongrues suivant un module. Il s'occupe ensuite des problèmes fondamentaux relatifs aux formes quadratiques : Étant données deux formes de même discriminant, reconnaître si elles appartiennent ou non à la même classe; déterminer, dans le dernier cas, les substitutions qui permettent de passer de l'une à l'autre; déterminer les classes de formes qui ont le même discriminant. C'est, comme on le sait, dans l'étude de ces trois problèmes, dont les solutions sont essentiellement différentes suivant qu'il s'agit de formes définies ou indéfinies, que s'introduit l'équation de

Pell. Le problème de la représentation d'un nombre donné par une forme donnée, l'analyse indéterminée du second degré ne comportent ensuite aucunes difficultés essentielles. L'étude des formes linéaires qui contiennent les nombres susceptibles d'être représentés par une forme quadratique donnée termine cet important Chapitre.

Parmi les Notes, nous signalerons les suivantes :

La Note B contient la démonstration de l'identité d'Euler

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\cdots\times\zeta(s)=1,$$

et diverses conséquences, en particulier l'infinité du nombre de nombres premiers. C'est une fenêtre entr'ouverte du côté de la théorie analytique de la Science des nombres; jusqu'à présent, les recherches personnelles de M. Cahen ont été surtout dirigées de ce côté, et il est permis de souhaiter qu'il nous donne bientôt un livre sur ce sujet; c'est la suite indispensable des *Éléments* qu'il vient de publier, et ce livre-là manque peut-être encore plus, dans notre pays, que ne manquaient les *Éléments*.

La Note H, sur les fonctions numériques, appartient à une autre branche de la même théorie.

Dans la Note C, l'auteur montre le parti qu'on peut tirer de la représentation d'un nombre par une forme quadratique pour la décomposition en facteurs premiers, et signale quelques résultats curieux. La Note E se rapporte à la recherche effective des racines primitives des nombres premiers : on y trouve établie l'existence d'une racine primitive égale à 2 ou 3 pour certains types de nombres premiers. Enfin, la Note I, sur les nombres entiers imaginaires, peut être regardée comme une amorce à cette théorie des nombres algébriques qu'ont fondée les travaux de Kummer, de M. Dedekind et de Kronecker. Sur ce sujet-là encore, il y a un beau livre à faire. C'est peut-être le cas de répéter, avec les anciens, que le beau est difficile; mais cet antique adage n'est assurément pas pour décourager M. Cahen.

Dans tout le cours de ses *Éléments*, M. Cahen a insisté comme il convenait sur les exemples numériques, sur la façon dont doivent être conduits les calculs. Il a reproduit, à la fin, quatre Tables données par Tchebyscheff dans sa *Théorie des congruences :*

Table des nombres premiers de 1 à 10 000. Table des racines primitives et des indices pour les nombres premiers de 1 à 200. Table des formes linéaires des facteurs impairs des formes quadratiques $x^2 + Dy^2$, ou $x^2 - \Delta y^2$ de $D = 1$ à $D = 101$, et de $\Delta = 2$ à $\Delta = 101$. J. T.

A. REBIÈRE. — PAGES CHOISIES DES SAVANTS MODERNES, EXTRAITES DE LEURS ŒUVRES. 1 vol. Gr. in-8°, VIII-618 p. Paris, Nony et Cie, 1900.

Ce nouvel Ouvrage de M. Rebière vient heureusement compléter celui qu'il avait fait paraître il y a un an : *Les Savants modernes, leur vie et leurs travaux*.

Après nous avoir donné jadis les biographies et les titres des Œuvres principales des savants du dix-huitième et du commencement du dix-neuvième siècle, voici qu'aujourd'hui il nous présente des extraits de leurs travaux pour, ainsi, nous les mieux faire connaître et apprécier.

Cette nouvelle entreprise était peut-être plus périlleuse que les précédentes et son exécution plus délicate; il faut louer, sans réserves, M. Rebière d'avoir su la mener à bien.

Il s'agissait de faire un Livre qui pût être lu par tout le monde et qui, cependant, intéressât les spécialistes. Tâche ingrate s'il en fut; car combien y a-t-il de mathématiciens, parmi les plus illustres, qui n'ont pas écrit dix lignes qui ne soient entremêlées de calculs et de formules! Comment alors trouver une page point banale, accessible à tous les lecteurs?

L'Auteur dut souvent recourir aux Préfaces, parfois compulser les rapports officiels et même quelquefois fouiller les correspondances privées.

Pour les uns, à la fois lettrés et savants, tels que Descartes, Pascal ou Helmholtz, M. Rebière n'eut que l'embarras du choix et son mérite fut de retenir les pages les plus belles de leurs Œuvres, celles qui caractérisent le mieux l'homme et son génie.

Pour d'autres, qui ont peu écrit, tel Watt, il lui a fallu se contenter de quelques notes brèves, de celles qu'un homme d'action, qui n'a pas le temps d'écrire, jette au hasard sur son carnet.

Le plan de ce Volume est exactement le même que celui du précédent. Nous retrouvons les mêmes subdivisions et, dans chacune d'elles, les mêmes noms dans le même ordre. Ainsi ces deux Ouvrages sur les Savants modernes se correspondent et se complètent l'un l'autre.

Pour parfaire son œuvre d'historien, il ne restait plus à M. Rebière, comme il le constatait lui-même dans sa Préface, qu'à écrire deux autres Volumes, l'un consacré aux savants de l'antiquité et du moyen âge, et l'autre aux savants contemporains. Nous souhaitions ardemment, pour notre instruction et notre plaisir, qu'il eût le loisir et le courage de terminer cette série de livres historiques du plus haut intérêt et de la plus grande utilité; et voici qu'une mort inattendue, qui l'a frappé en pleine vigueur de corps et d'esprit, nous prive hélas, à jamais, de cet espoir.

C. BOURLET.

URKUNDEN ZUR GESCHICHTE DER NICHT EUKLIDISCHEN GEOMETRIE, herausgegeben von Friedrich Engel und Paul Stäckel. I. NIKOLAJ IWANOWITCH LOBATSCHEFSKIJ. NIKOLAJ IWANOWITSCH LOBATSCHEFSKIJ. ZWEI GEOMETRISCHE ABHANDLUNGEN aus dem Russischen uebersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von FRIEDRICH ENGEL. ERSTER THEIL : DIE UEBERSETZUNG mit einem Bildnisse Lobatschefskijs und mit 194 Figuren im Text. ZWEITER THEIL: ANMERKUNGEN' LOBATSCHEFSKIJS LEBEN UND SCHRIFTEN. Register mit 67 Figuren im Text. Leipzig, Teubner, in-8°, XIV-476 p.: 1899.

Nous avons rendu compte en 1896 (*Bulletin*, I, t. XX, p. 279) de l'Ouvrage important que MM. Stäckel et Engel avaient publié ensemble sur la théorie des parallèles depuis Euclide jusqu'à Gauss. Après s'être occupés des précurseurs de la Géométrie non euclidienne, il était naturel que MM. Engel et Stäckel eussent le désir de compléter leur œuvre, de nous faire connaître dans leur ensemble, dans leurs traits caractéristiques, les travaux des fondateurs de cette théorie, et notamment ceux de Lobatschefsky et de Bolyai. On peut être assuré d'avance que leur travail rendra les plus grands services et que le succès sera la récompense méritée de leurs efforts persévérants. Il y a trente ans, deux ou trois géomètres à peine s'occupaient de la Géométrie non euclidienne; nous nous rappelons

encore le temps où Houël, l'un des fondateurs de notre *Bulletin*, était à peu près le seul en France à appeler l'attention sur l'intérêt et la haute valeur de cette théorie. Aujourd'hui tous sont avertis; personne n'ignore plus que les recherches entreprises sur ce beau sujet sont de nature à nous donner les idées les plus nettes sur l'origine et le mode de formation de nos connaissances. Par là elles intéressent les philosophes aussi bien que les géomètres; mais il importe grandement, à notre avis, que les géomètres de professsion en conservent la direction effective et s'efforcent de leur donner, à l'aide de l'analyse mathématique, toute la précision dont elles sont susceptibles.

Pendant que M. Stäckel s'occupait de Bolyai, M. Engel étudiait plus spécialement les écrits de Lobatschefsky; et le volume qu'il nous présente aujourd'hui représente le résultat de ses études. Il se divise en deux Parties. La première contient la traduction allemande de deux écrits de Lobatschefsky, écrits en langue russe, et qui étaient, pour ainsi dire, restés inconnus. Ces Mémoires sont le travail *Sur les fondements de la Géométrie* paru en 1829-1830 dans le *Messager de Kasan* et le second travail *Nouveaux fondements de la Géométrie* imprimé en 1835 et dans le *Recueil scientifique de l'Université de Kasan*. Il est certain que ces deux Mémoires forment un ensemble infiniment plus complet que tout ce que nous connaissions et nous permettent pour la première fois de nous faire une idée nette de ce que la Géométrie non euclidienne doit à Lobatschefsky. Ils forment en réalité un Traité complet de Géométrie non euclidienne systématiquement développé et accompagné d'exemples pour le calcul des longueurs, des surfaces et des volumes.

La deuxième Partie constitue un commentaire aussi complet et aussi savant qu'on peut le désirer, des écrits dont nous venons de parler.

Des notes détaillées et précises, dont quelques-unes ont une assez grande étendue, complètent heureusement le texte de Lobatschefsky et éclairent ou développent tous les points qui présentent des difficultés ou méritent d'attirer l'attention.

L'Ouvrage se termine par une biographie de Lobatschefsky que l'on peut regarder comme définitive. M. Engel y a mis à profit toutes les pièces déjà publiées et, en particulier, la Notice bien

connue de M. Wassilief à qui nous devons, comme l'auteur lui-même, adresser tous nos remerciements pour l'appui qu'il a prêté à M. Engel et pour tous les renseignements inédits qu'il s'est empressé de lui fournir. G. D.

BOREL (E.). — Leçons sur les fonctions entières. Un vol. in-8°. VI-124 p. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

M. Borel nous donne, comme l'an dernier, un petit Livre où il résume les leçons faites par lui à l'École Normale, aux élèves de seconde année : il nous en promet d'autres, qui seront les bienvenus, comme les deux premiers. M. Borel est, pour les élèves de cette École, un maître précieux, qui sait les conduire, par des chemins attrayants, jusqu'aux limites mêmes de la Science actuelle; ceux qui ne peuvent assister à ses leçons se réjouiront de retrouver dans ses Livres la matière de son enseignement.

Il s'agit cette fois de cette théorie des fonctions entières qu'il a, avec M. Hadamard, tant contribué à développer. J'essaye, dans ce qui suit, d'indiquer brièvement les sujets qu'il traite; mais je renonce à dire combien sont suggestives les vues qu'il indique, à l'occasion des théorèmes qu'il établit, et la façon dont il critique les méthodes.

M. Borel s'occupe d'abord de la formation, d'après Weierstrass, d'une fonction entière comme produit de facteurs primaires. L'exposition du théorème fondamental est précédée de quelques remarques simples dues à M. Hadamard, sur les relations entre les modes de croissance de la fonction entière, des coefficients de la série qui la représente, de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.

Ces remarques amènent naturellement à parler du célèbre théorème de M. Picard sur la non-existence d'une fonction entière $F(z)$ telle que les équations

$$F(z) = a, \qquad F(z) = b, \qquad (a \neq b)$$

n'aient pas de racines, théorème dont l'étude occupera la fin du Livre; pour le moment, M. Borel se contente de rappeler la dé-

monstration de M. Picard, fondée sur la considération de la fonction modulaire. La démonstration même du théorème de Weierstrass, présentée de manière à faire pressentir au lecteur la classification ultérieure des fonctions entières, conduit l'auteur à introduire, relativement aux suites $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, formées de nombres positifs croissants qui, dans la suite du Livre, désigneront les valeurs absolues des zéros de la fonction entière $F(z)$, la notion importante de l'*exposant de convergence :* c'est la limite commune ρ des deux ensembles de nombres positifs α, β tels que des séries

$$\sum \frac{1}{r_n^\alpha}, \quad \sum \frac{1}{r_n^\beta},$$

la première soit divergente et la seconde convergente. L'expression *exposant de convergence* a été introduite, avec une signification un peu différente, par M. von Schaper, dans sa Dissertation inaugurale. En désignant par λ l'inverse de ρ, on a pour toutes les valeurs de l'entier n qui dépassent une certaine limite

$$r_n > n^{\lambda-\varepsilon},$$

et, pour une infinité de valeurs de n,

$$r_n < n^{\lambda+\varepsilon},$$

quel que soit le nombre positif ε. A cette notion se rattache celle de l'ordre d'infinitude de r_n; posant

$$r_n = n^{\lambda_n},$$

et désignant par λ', λ'' les limites supérieure et inférieure de l'ensemble dérivé de l'ensemble des nombres λ_n, limites qui appartiennent nécessairement à cet ensemble dérivé, M. Borel dit que l'ordre d'infinitude de r_n est déterminé lorsqu'on a $\lambda' = \lambda''$ et qu'il est alors égal à leur valeur commune, qui est aussi la limite de λ_n. Les recherches de MM. Paul du Bois-Reymond et Hadamard ont fait ressortir le rôle des deux limites d'indétermination λ', λ''.

Passant ensuite aux recherches de Laguerre, M. Borel introduit la notion de genre d'une fonction entière

$$F(z) = e^{Q(z)} \prod P_k\left(\frac{z}{a_n}\right),$$

où $P_k\left(\frac{z}{a_n}\right)$ est le facteur primaire

$$\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{z^2}{2a_n^2}+\ldots+\frac{z^k}{ka_n^k}},$$

relatif au zéro a_n; les valeurs absolues $r_1, r_2, r_3, \ldots$ des zéros $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sont supposées croissantes. Si $Q(z)$ est un polynome de degré q et si k est le plus petit nombre entier tel que la série

$$\sum \frac{1}{r_n^{k+1}}$$

soit convergente, le genre de $F(z)$ est, comme on sait, le plus grand des nombres q et k. Si ρ est l'exposant de convergence de la suite $r_1, r_2, r_3, \ldots$, on a $k \leq \rho \leq k+1$; ρ est ce que M. Borel appelle l'*ordre réel* de la fonction $F(z)$. Si $F(z)$ est de genre fini p, la fonction entière

$$F(z)F(\omega z)\ldots F(\omega^{m-1}z),$$

où m est un entier au moins égal à $p+1$, et où ω est une racine primitive de l'équation binome

$$\omega^m = 1,$$

est une fonction entière de genre zéro et d'ordre $\frac{\rho}{m}$ de la variable $Z = z^m$.

Après avoir établi les propositions bien connues de Laguerre sur les fonctions réelles de genre zéro ou un, dont toutes les racines sont réelles, M. Borel reprend, pour la compléter et en faire nettement ressortir le principe, la démonstration d'une proposition due aussi à Laguerre, et que voici : Étant donnée une fonction entière $F(z)$ de genre p, ayant un nombre fini q de racines imaginaires : 1° la fonction dérivée $F'(z)$ est de genre p; 2° l'équation $F'(z) = 0$ a, comme on sait, d'après le théorème de Rolle, une racine au moins dans l'intervalle de deux racines consécutives de l'équation $F(z) = 0$; on peut affirmer de plus que, en dehors de ces racines dont l'existence est décelée par le théorème de Rolle, il y a au plus $p+q$ autres racines, d'ailleurs réelles ou imaginaires.

M. Poincaré a montré (¹) qu'il y avait une relation, d'une part, entre l'ordre de grandeur d'une fonction entière et son genre supposé fini, d'autre part, entre l'ordre de grandeur de la fonction et l'ordre de grandeur de ses coefficients. M. Hadamard, outre qu'il a complété sur quelques points les résultats de M. Poincaré, a, en démontrant la réciproque de ces propositions, apporté une importante contribution à la théorie des fonctions entières; c'est le sujet qui va maintenant occuper M. Borel.

Il établit sous la forme suivante les inégalités de M. Poincaré. Désignant par $M(r)$ le maximum de la valeur absolue de la fonction entière $F(z)$, de genre p, lorsque la valeur absolue de z est égale à r, on a

$$M(r) < e^{\alpha r^{p+1}},$$

quel que soit le nombre positif α, pourvu que r soit suffisamment grand. Si A_μ est le $(\mu+1)^{\text{ième}}$ coefficient de la série qui représente $F(z)$, le produit

$$A_\mu (1.2\ldots\mu)^{\frac{1}{p+1}},$$

tend vers zéro lorsque μ augmente indéfiniment. L'auteur obtient des résultats plus précis en substituant à la notion de genre la notion d'ordre.

Il considère, à cet effet, une fonction de genre p

$$F(z) = \prod \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{\frac{x}{a_n} + \frac{x^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{x^p}{p a_n^p}}$$

qui soit un produit de facteurs primaires, non précédé d'un facteur exponentiel $e^{G(z)}$, c'est ce qu'il appelle un *produit canonique de facteurs primaires;* soit ρ l'exposant de convergence de la suite croissante $r_1, r_2, r_3, \ldots$ des valeurs absolues des zéros, il y a lieu de distinguer deux cas :

1° La série $\sum \frac{1}{r_n^\rho}$ est divergente : ρ est alors l'*ordre par défaut;*

2° Cette même série est convergente, ρ est l'*ordre par excès.*

On a toujours, ε étant un nombre positif arbitrairement choisi,

$$F(z) < e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

(¹) *Bulletin de la Société mathématique,* 1883.

pourvu que r soit suffisamment grand; si ρ est l'ordre par excès, on a, dans les mêmes conditions,

$$|F(z)| < e^{\varepsilon r^{\rho}}.$$

Ces résultats conduisent à d'importantes relations d'inégalité pour les coefficients de la série

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$$

qui représente une fonction entière $F(x)$, d'ordre ρ; il est, en effet, assez facile de montrer que si $M(r)$ désigne le maximum de la valeur absolue de $F(z)$ quand on suppose que la valeur absolue de z est r, la supposition

$$M(r) < e^{r^{\sigma}}$$

entraîne une inégalité de la forme

$$\frac{1}{\sqrt[m]{|A_m|}} > K m^{\frac{1}{\sigma}},$$

K étant fixe. Une discussion très intéressante qui nous renseigne en particulier sur le mode de croissance de la partie réelle de $F(z)$ et de la partie imaginaire, montre la valeur de la limitation ainsi obtenue pour $|A_m|$.

Inversement, M. Hadamard, dans son Mémoire couronné en 1892, a montré comment, étant donnée une limite supérieure de la croissance d'une fonction entière, on peut déterminer une limite supérieure de l'exposant de convergence de la suite de ses zéros.

M. Borel n'expose pas la méthode de M. Hadamard, mais bien une méthode plus élémentaire due à M. Schou, méthode qui donne des résultats équivalents, dans le cas où le genre de la fonction est fini, mais non pour les fonctions de genre infini.

Si la fonction $F(z)$ satisfait, pour les grandes valeurs de r, à l'inégalité

$$M(r) < e^{r^{\rho'+\varepsilon}},$$

et cela, quel que soit le nombre positif ε, M. Borel dit qu'elle est *d'ordre apparent* ρ'; M. Hadamard a montré, d'une part, que l'exposant de convergence de la suite r_1, r_2, r_3, ... est au plus égal à ρ', d'autre part que, si l'on considère un produit cano-

nique $G(z)$ de facteurs primaires d'ordre ρ et un nombre positif arbitraire ε, on peut trouver une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants, sur chacun desquels on ait l'inégalité

$$|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Il en résulte que l'ordre réel ρ d'une fonction entière est au plus égal à son ordre apparent ρ'; il lui est égal quand ρ' n'est pas entier. La démonstration même du second théorème de M. Hadamard fournit quelques renseignements utiles sur les rayons possibles des cercles auxquels il s'applique. M. Borel signale d'ailleurs l'importante application que M. Hadamard a faite de cette théorie à la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.

Le théorème de M. Picard est susceptible d'une suite de généralisations : les premières que développe M. Borel sont dues à M. Hadamard.

Si la fonction entière $F(z)$ est de genre fini, les deux équations

$$F(z) - P(z) = 0, \qquad F(z) - Q(z) = 0,$$

où $P(z)$, $Q(z)$ sont des polynomes distincts, ne peuvent avoir chacune un nombre fini de racines, sans que $F(z)$ soit un polynome. Cela résulte simplement de ce que les premiers membres des équations sont de la forme $A(z)e^{H(z)}$, où $H(z)$ est un polynome. Cette proposition étant établie, on en déduit d'une façon élémentaire le théorème relatif à l'impossibilité de deux équations $F(z) = a$, $F(z) = b$ sans racines, pour les fonctions $F(z)$ vérifiant l'inégalité

$$|F(z)| < e^{c r^m},$$

pour des valeurs suffisamment grandes de $r = |z|$. Le théorème s'étend ensuite aux fonctions qui vérifient des inégalités analogues, où les exposants s'échelonnent aussi haut qu'on le veut; mais on n'épuise pas ainsi tous les modes de croissance.

M. Borel établit ensuite les belles propositions que voici :

Soit $F(z)$ une fonction entière d'ordre apparent égal à p. Considérons les équations de la forme

$$F(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi(z)},$$

où $\varphi_1(z)$, $\varphi(z)$ sont des fonctions entières d'ordre apparent infé-

rieur à p; parmi ces équations, il ne peut s'en trouver qu'une seule pour laquelle l'exposant de convergence de la suite des zéros ne soit pas égal à p : dans le cas d'exception, on peut seulement affirmer que l'exposant de convergence est inférieur à p. On peut donc, lorsque l'on n'est pas dans le cas d'exception, appliquer aux valeurs absolues des racines les limitations que l'on a signalées plus haut et qui traduisent la notion même d'exposant de convergence.

Si $F(z)$ est de genre infini, il peut exister au plus une équation

$$F(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi(z)},$$

où $\varphi_1(z)$, $\varphi(z)$ sont des fonctions entières de genre fini, telle que la suite de ses racines ait un exposant de convergence fini.

Le Livre de M. Borel se termine par trois Notes : la première reproduit une Note des *Comptes rendus* dans laquelle il établit le théorème de M. Picard sans se servir des propriétés de la fonction modulaire. La seconde Note se rapporte aux fonctions à *croissance régulière*. En conservant les notations antérieures, M. Borel dit que la fonction entière $F(z)$ et la fonction $M(r)$ qui s'en déduit, comme on l'a expliqué plus haut, sont à croissance régulière quand l'expression

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r}$$

tend vers une limite lorsque r croît indéfiniment. Supposant ensuite que l'exposant de convergence ρ de la suite des r_n ne soit pas un nombre entier et que l'ordre apparent de $F(z)$ soit (comme son ordre réel) égal à ρ, il montre que : la fonction $F(z)$ est à croissance régulière si l'ordre d'infinitude de r_n est déterminé et que réciproquement, l'ordre d'infinitude de r_n est déterminé quand la fonction $F(z)$ est régulière. La troisième Note, enfin, concerne les fonctions à *croissance irrégulière ;* l'auteur y indique comment on peut construire une fonction $\varpi(z)$ dont le module maximum $M(r)$ est, dans une infinité d'intervalles d'étendue aussi grande qu'on veut, très voisin de e^r et, dans une infinité d'intervalles d'étendue aussi grande qu'on veut, très voisin de e^{r^2}.

J. T.

JOHN WILLIAM STRUTT, Baron RAYLEIGH, Honorary Fellow of Trinity College, Cambridge, Professor of Natural Philosophy in the Royal Institution. — SCIENTIFIC PAPERS (1). Vol. I, 1869-1881. Cambridge University Press: 1899.

Il y a exactement trente ans, le *Philosophical Magazine* publiait une étude sur les phénomènes électromagnétiques : c'était le premier Mémoire scientifique de Lord Rayleigh. Il s'agissait d'*illustrer* les phénomènes de l'Électromagnétisme par ceux de la Mécanique qui présentent avec eux cette analogie de satisfaire aux mêmes équations. L'auteur, établissant une exacte comparaison entre les lois de l'induction et celles du mouvement des liquides, montrait, par exemple, comment la théorie des bobines d'induction correspond à celle des béliers hydrauliques. Il n'est pas jusqu'à la rupture éventuelle du bélier qui ne puisse représenter la production d'une étincelle disruptive.

N'y a-t-il pas, dès ce premier travail, l'indication de ce que devait être l'œuvre de Lord Rayleigh : ingénieuse, touchant parfois à l'Analyse mathématique, avec quelque préférence pour la Mécanique analytique, mais serrant toujours de très près la matière expérimentale?

C'est, en restant dans les mêmes voies que l'auteur donne, dès l'année suivante (1870), un intéressant Mémoire sur la théorie de la résonance. Bien d'autres l'ont suivi, et plus de la moitié du Livre que nous présentons aux lecteurs du *Bulletin* est consacrée à des Mémoires portant sur la dynamique des systèmes; sur ses applications au mouvement des fluides et, surtout, à la théorie du son. Plusieurs de ces Mémoires, du reste, font partie de la *Theory of Sound,* deux Volumes publiés en 1873, devenus tout de suite classiques, et auxquels l'auteur renvoie fréquemment.

C'est encore au même ordre d'idées que se rattachent le peu de Mathématiques pures que contient cet Ouvrage; quelques Notes sur le calcul des fonctions de Bessel, une démonstration originale du théorème de la moyenne sphérique dans la théorie du potentiel

(1) In-4°, 562 pages.

newtonien... et les questions posées au concours de 1876 pour le *Tripos examination* (agrégation).

Très peu d'Électricité puisque ce premier Volume s'arrête à 1881, c'est-à-dire à la veille des célèbres expériences de Lord Rayleigh sur les unités électriques. Par contre, une vingtaine de Mémoires d'Optique témoignent des progrès que Lord Rayleigh a fait faire à l'étude de la diffraction.

Il y a, dans ce Livre, mieux qu'une simple réimpression. Ces travaux, déjà anciens, sont pourtant au courant des développements de la Science, grâce à des notes personnelles de l'auteur, nettement séparées du texte, qui donnent aux sujets traités une physionomie plus intéressante en les plaçant tour à tour dans leur milieu scientifique naturel.

Certains de ces sujets paraissent, du reste, définitivement épuisés. Ainsi, après avoir lu ce Livre, nous savons pourquoi le joueur de tennis peut tromper son adversaire en lançant la balle hors de sa trajectoire parabolique. Nous savons aussi comment il se fait que la voix de femme renvoyée par l'écho d'un bouquet d'arbres monte en général d'un octave et paraît, au contraire, baisser de la même quantité quand la lisière du bois est normale au rayon sonore. Et l'explication de ces singulières apparences est fournie par la théorie même qui explique le bleu du ciel.

Nous sommes moins nettement fixés, par contre, sur la question de savoir quel avantage aurait un joueur de *pile ou face* à s'arroger le droit d'arrêter à son gré la partie.

L'ensemble n'est donc pas trop sévère, car ces travaux, peu austères, viennent créer une diversion sur l'intention de laquelle nous ne pouvons nous méprendre puisque l'auteur a eu soin de nous la signaler dans une très courte Préface.

Tel est ce premier Volume de Mémoires, remarquablement édité d'ailleurs, et que Lord Rayleigh a eu l'intraduisible pensée d'offrir au public sous l'invocation de ce verset :

The works of the Lord are great,
Sought out of all them that have pleasure therein.

H. Abraham.

RUDIO (F.). — VERHANDLUNGEN DES ERSTEN INTERNATIONALEN MATHEMATIKER-KONGRESSES IN ZURICH VOM 9. BIS 11. AUGUST 1897. Un vol. in-8°, VIII-397 p. Leipzig, Teubner, 1898.

Les mathématiciens qui ont eu la bonne fortune d'assister au Congrès international qui s'est tenu à Zurich en 1897 en ont rapporté un excellent souvenir, et, à leur retour, se sont plu à redoubler les regrets de ceux qui n'avaient pu accepter les aimables invitations des organisateurs du Congrès : cela n'est pas étonnant. La grande autorité scientifique dont jouissent bon nombre des maîtres qui enseignent dans les Universités ou dans les Écoles suisses assurait d'avance la réussite du Congrès; puis la Suisse est un pays vraiment hospitalier, où chacun, au moins pour quelques jours, se trouve mieux que chez lui et se laisse volontiers pénétrer par cette franche et simple cordialité que l'on respire avec le bon air. Ce pays-là semble désigné pour le commencement de toutes les bonnes œuvres internationales.

Il faut savoir gré à M. Ferdinand Rudio du soin qu'il a apporté à la publication du Volume où sont réunies les Communications adressées au Congrès, où sont retracées la préparation et l'histoire de ce Congrès; M. Rudio a d'ailleurs pris une large part à l'organisation et il a prononcé d'excellentes paroles sur l'utilité de ces réunions, sur le profit qui doit en résulter pour les Mathématiques et les mathématiciens, sur le genre de travaux qui doivent y être entrepris, en particulier sur la constitution d'un Répertoire mathématique. Il est bien certain que la question bibliographique est une de celles qui s'imposent aux Congrès. Elle a été traitée à Zurich, par M. Eneström, dont la compétence est connue de tous. Quoi qu'il en soit, grâce à M. Rudio, personne ne sera privé ni des intéressantes Communications scientifiques qui ont été faites à Zurich, ni des choses profondes ou charmantes qui y ont été dites, par des maîtres qui ne séparent la Science ni de l'Art, ni de la Philosophie.

Voici la liste des Lectures qui ont été faites au Congrès, et que l'on retrouvera dans le Volume de M. Rudio :

Poincaré. — Sur les rapports de l'Analyse pure et de la Physique mathématique.

Hürwitz. — Sur le développement de la théorie générale des fonctions analytiques dans les temps récents.

Weber (*H.*). — Sur les genres dans les corps algébriques.

Reuschle. — Théorie des constituants : une méthode nouvelle, fondamentale et génétique pour la théorie des invariants.

Stéphanos. — Sur les systèmes associatifs de nombres symboliques.

Gordan. — Résultants de formes ternaires.

Enriques. — Sur les problèmes qui se rapportent à la résolution des équations algébriques renfermant plusieurs inconnues.

Schröder. — La Pasigraphie; son état actuel et le mouvement pasigraphique en Italie.

Bados. — Pour la théorie des formes quadratiques adjointes.

Pervouchine. — Formules pour la détermination approximative des nombres premiers, de leur somme et de leur différence d'après le numéro de ces nombres.

Meyer (*W.-F.*). — Sur l'algorithme des fractions continues.

Stickelberger. — Sur une nouvelle propriété des discriminants des corps algébriques.

De la Vallée-Poussin. — Sur la théorie des nombres premiers.

Brioschi. — Sur une classe d'équations du cinquième degré résolubles algébriquement et la transformation du onzième ordre des fonctions elliptiques.

Picard. — Sur les fonctions de plusieurs variables et en particulier les fonctions algébriques.

Hadamard. — Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles.

Pincherle. — Remarque relative à la Communication de M. Hadamard.

Borel. — Remarque relative à la Communication de M. Hadamard.

Bougaïew. — Les Mathématiques et la conception du monde au point de vue de la Philosophie scientifique.

Autonne. — Sur les pôles des fonctions uniformes à plusieurs variables indépendantes.

De Galdeano. — L'unification des concepts dans les Mathématiques.

Reye. — Quelques nouvelles propriétés des complexes quadratiques.

Gerbaldi. — Sur le groupe simple de 360 collinéations planes.

Burali-Forti. — Les postulats pour la Géométrie d'Euclide et de Lobatschewsky.

Andrade. — Statique non-euclidienne.

Fano. — Sur les groupes, en particulier sur les groupes continus de transformations de Cremona du plan et de l'espace.

Brunn. — Sur les courbes à nœuds.

Stodola. — Sur les relations de la Technique et de la Mathématique.

Joukowsky. — Un nouvel appareil gyroscopique.

Zeuthen. — Isaac Barrow et la méthode inverse des tangentes.

Eneström. — Sur les nouvelles entreprises de Bibliographie mathématique.

Loria. — Aperçu sur le développement historique de la théorie des courbes planes.

Peano. — Logique mathématique.

Klein. — L'enseignement des hautes Mathématiques.

On voit combien les sujets traités sont variés, comment les diverses parties de la Science se trouvent représentées ; l'Histoire

même n'a pas été oubliée et les Communications de M. Zeuthen et de M. Loria sont très intéressantes. Il convient de remarquer qu'un grand nombre de ces Lectures ont un caractère général; parmi celles-là même, la plupart ne regardent que les mathématiciens; telles sont, par exemple, le magistral exposé qu'a fait M. Hürwitz du développement de la théorie des fonctions analytiques, ou les vues que M. Klein a développées sur l'enseignement des Mathématiques. D'autres méritent d'être méditées par les philosophes. Qui ne serait émerveillé par les pages exquises et profondes que M. Poincaré a écrites sur les rapports de l'Analyse pure et de la Physique mathématique? Qui ne ressentirait l'émotion de M. Bougaïew réclamant la place de l'individu et les droits de la personne humaine dans cet écoulement de phénomènes dont nous avons les oreilles rebattues depuis Héraclite, que l'Analyse mathématique prétend aujourd'hui expliquer, prévoir et soumettre entièrement à ses lois? Je me suis figuré, en le lisant, que le géomètre russe regarde volontiers la continuité comme une apparence, comparable à ces lois asymptotiques des nombres entiers, qui recouvrent des discontinuités irréductibles, et qu'il a si souvent maniées. Cette façon dont les mathématiciens modernes regardent du côté des idées générales est extrêmement remarquable. Il est fort naturel que M. É. Picard, qui a pris la parole dans le banquet final, ait voulu y faire allusion. Par la largeur et l'acuité de son esprit, M. Émile Picard est assurément fait pour s'associer à cette tendance; dans un toast plein d'humour et d'excellents conseils, il a proclamé que cette *coquetterie* entre la Science et la Philosophie était pour le mieux. J. T.

JACQUES BOYER. — HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES. Paris, Carré et Naud (Bibliothèque de la Revue générale des Sciences). In-8°, XII-260 p.; 1900.

Étant posé le problème de librairie d'écrire une Histoire des Mathématiques en 250 pages, depuis l'origine jusqu'à nos jours, on ne peut naturellement attendre, comme solution, que la vulgarisation, plus ou moins heureuse, de ce qu'il y a de surtout saillant dans les Ouvrages appuyés sur des recherches originales. Le

mince Volume de M. Boyer a l'avantage incontestable de la clarté dans la disposition et dans le style; il se recommande également par son illustration intéressante (19 portraits tirés de sources authentiques, depuis Napier jusqu'à Weierstrass; fac-similés de manuscrits, d'anciennes gravures d'instruments, etc.). Constater qu'il n'est pas exempt d'erreurs de détails, est assez inutile, alors qu'il y en a dans les travaux de première main les plus justement renommés, et qu'elles se propagent beaucoup plus facilement que leurs corrections; il suffit que ces erreurs ne soient pas graves et qu'elles ne soient pas plus fréquentes que dans les Abrégés analogues (toutefois plus étendus) de Rouse-Ball et de Cajori.

M. Boyer a mis d'ailleurs sa marque personnelle dans son *Histoire* et s'est efforcé de lui donner un caractère particulier en la laissant très élémentaire et en la destinant à ceux qui apprennent les Mathématiques, non ceux qui les savent. On ne peut que lui souhaiter d'atteindre son but, et d'exciter au moins, dans les générations des élèves, un intérêt pour des questions auxquelles malheureusement trop peu de professeurs sont aujourd'hui capables de répondre.

Mais j'avouerai que, pour mon compte, je ne puis voir bien clairement à quel public s'adresse un Abrégé de ce genre; pour un candidat à la licence, il y a déjà bien des sujets qui paraîtront trop écourtés; pour les élèves des lycées, je ne vois point quel sens peut avoir un Chapitre sur la Mathématique moderne. Et si l'on veut, d'après le système actuellement en vogue, continuer à pousser jusqu'à nos jours, l'Histoire des Sciences comme du reste, il y aurait, je crois, beaucoup mieux à faire.

Prendre, par exemple, le programme actuel des lycées pour l'Arithmétique, et faire, à part, et successivement, l'histoire de chaque question : numération parlée, numération écrite, calcul des quatre règles, etc.; suivre l'évolution de la pratique et de la théorie jusqu'à leur forme présente; voilà un plan dont l'exécution devrait, ce me semble, tenter un travailleur; il répondrait à une idée claire, et aboutirait à un enseignement méthodique dont l'utilité ne serait pas négligeable, même au point de vue strictement mathématique.

Un petit Volume de la sorte pour l'Arithmétique, trois autres pour l'Algèbre, la Géométrie élémentaire et la Géométrie analy-

tique, joints à un Résumé général chronologique, tel que l'Abrégé de M. Boyer, contribueraient beaucoup à élargir les idées des élèves, sans parler du rappel de nombre de questions curieuses, qui sont passées de mode, mais dont l'oubli n'est pas mérité. Pour les Mathématiques supérieures, l'intérêt de leur histoire est beaucoup moins actuel; M. Cantor l'a très bien compris en s'arrêtant à Lagrange; son œuvre sera continuée, mais les savants dont on étudie encore les écrits n'appartiennent point véritablement à l'Histoire, et pendant un siècle, les Monographies suffiront pour assembler les matériaux que l'avenir mettra en œuvre.

Paul Tannery.

NETTO (E.). — Vorlesungen über Algebra. Zweiter Band. Un vol. in-8°, XII-519 p. Erste Lieferung; 1898. Zweite Lieferung; 1900. Leipzig, Teubner.

Le premier fascicule de cet important Volume est consacré à la théorie des fonctions entières de plusieurs variables. Après avoir montré comment on calcule le nombre de coefficients d'une fonction du $n^{\text{ième}}$ degré à m variables, ou le nombre de ces coefficients qui satisfont à certaines conditions, l'auteur traite les questions générales relatives à la divisibilité de pareilles fonctions (réductibilité, plus grand commun diviseur, etc.). Il introduit ensuite la notion de *racine* d'une équation ou d'un système d'équations; le mot *racine* (ou point-racine) est entendu dans le sens de système de valeurs des variables qui vérifient l'équation, ou le système d'équations; pour une équation, la distinction entre les racines simples et les racines multiples ne comporte aucune difficulté. Cette distinction, et la solution d'autres questions qui se présentent naturellement, ne peut se faire en général avant d'avoir traité de l'élimination : l'auteur s'occupe d'abord du cas de deux équations à deux inconnues.

Dans le précédent Volume, on a donné la notion de *résultant* pour deux polynomes f, g à une variable z_1, notion fondée sur la théorie des fonctions symétriques; c'est une fonction entière $R_{f,g}$, parfaitement déterminée, des coefficients de ces polynomes.

Lorsque ces coefficients sont eux-mêmes des polynomes par rapport à une seconde variable z_2, le résultant, après la substitution, devient une fonction de cette seconde variable, c'est l'*éliminant* des deux équations à deux inconnues obtenues en égalant à zéro les deux polynomes à deux variables.

L'utilité de la transformation linéaire qui permet de *préparer* ces deux équations supposées de degrés respectifs m, n, de manière que les inconnues y figurent effectivement à ces degrés, apparaît immédiatement. L'auteur montre sous quelle condition le résultant est effectivement de degré mn; il introduit ensuite cette transformation due à Liouville (¹) et dont Kronecker a tiré si grand parti, qui consiste à prendre pour inconnue auxiliaire

$$x = \varkappa z_1 + \lambda z_2,$$

où $\varkappa$, λ sont des indéterminées. L'équation finale en x permet de définir le degré de multiplicité d'une racine, et, quand elle est résolue, d'associer les éléments z_1, z_2 qui constituent cette racine. Après s'être occupé des racines infinies, il développe les règles de Minding et de Labatie pour la détermination du nombre exact de racines finies.

L'exposition de la méthode d'élimination de Poisson exige un Chapitre préliminaire sur les fonctions symétriques entières de systèmes de variables indépendantes, en particulier sur l'expression de ces fonctions symétriques au moyen de fonctions symétriques élémentaires qui, toutefois, ne sont plus indépendantes, comme dans le cas classique où chaque système ne comporte qu'une variable. Considérant ensuite m équations générales à m variables z_1, z_2, ..., z_m, de degrés n_1, n_2, ..., n_m, les propositions fondamentales relatives au nombre de racines, à la façon de les faire dépendre d'une seule équation de degré $k = n_1 n_2 \ldots n_m$ par la transformation de Liouville, etc., propositions établies dans le cas de deux équations, s'obtiennent par induction, et la théorie des fonctions symétriques conduit ensuite à la notion de *résultant* entre $m+1$ équations à m inconnues ainsi qu'aux propriétés essentielles de ce résultant. Revenant ensuite à la résolution de m équations à m inconnues, qu'il ne suppose plus

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XII, p. 68-72; 1847.

à coefficients indéterminés, l'auteur traite des racines infinies et des racines multiples; celles-ci lui donnent (dans le cas des racines doubles) l'occasion d'introduire la notion du jacobien; il développe une méthode simple pour déterminer, dans le cas général, le degré de multiplicité d'une racine; il examine enfin le cas où les équations ont une infinité de racines, et définissent ainsi une multiplicité d'une dimension supérieure à o, dimension qu'il apprend à déterminer.

La méthode de Bézout, fondée sur la détermination de polynomes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ tels que l'expression

$$\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 + \ldots + \varphi_m f_m,$$

où $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sont des polynomes donnés en $z_1, z_2, \ldots, z_m$, ne contienne plus qu'une de ces variables, l'étude des propriétés des éliminants et des résultants donnent lieu à d'intéressants développements dont plusieurs sont d'une importance capitale pour l'étude des courbes et des surfaces algébriques. Signalons, par exemple, la démonstration de la proposition suivante : Si les racines du système

$$f_\alpha(z_1, z_2, \ldots z_m) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

sont en nombre fini et si toutes ses racines annulent le polynome Φ, il existe une relation de la forme

$$\Phi^\mu = f_1 Q_1 + f_2 Q_2 + \ldots + f_m Q_m,$$

où les Q sont des polynomes en z, dont les coefficients s'expriment rationnellement au moyen des coefficients des polynomes f_α, Φ, et où μ est le plus haut degré de multiplicité d'une racine.

M. Hilbert (¹) a montré comment on peut étendre cette proposition au cas où le système d'équations admet une infinité de racines.

Dans la méthode de Kronecker, c'est la substitution de Liouville qui joue le rôle essentiel. Étant donné un nombre quelconque d'équations en $z_1, z_2, \ldots, z_m$

(1) $$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_q = 0,$$

(¹) *Ueber die vollen Invariantensysteme* (*Math. Ann.*, t. XLII).

on peut, en posant

$$x = u_1 z_1 + u_2 z_2 + \ldots + u_{m-1} z_{m-1} + z_m,$$

en déduire une suite d'équations en x,

$$R_\alpha(x; z_1, z_2, \ldots, z_{m-\alpha}) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

dont les racines sont linéaires en $u_1, u_2, \ldots$, et qui fournissent toutes les racines des équations (1). Les racines fournies par l'équation $R_\alpha = 0$ forment une multiplicité de la dimension $m - \alpha$: $z_{m-\alpha+1}, \ldots, z_m$ s'expriment algébriquement au moyen de $z_1, z_2, \ldots, z_{m-\alpha}$ qui restent arbitraires. Les quantités R_α sont les éliminants partiels et le produit $R_1 R_2 \ldots R_m$, l'éliminant total. A la notion de l'éliminant total se rattache celle de la réductibilité et de l'irréductibilité d'un système, de la divisibilité d'un système par un autre système, dont l'éliminant total divise l'éliminant total du premier. La méthode donne ainsi une véritable connaissance de la nature des restrictions apportées par les équations (1) à la multiplicité m^{uple} des variables z. On en déduit encore que $m + 1$ équations (au plus) suffisent toujours à définir complètement l'ensemble des racines de ces q équations, ou si l'on veut la figure, dans l'espace à m dimensions, telle que les coordonnées $z_1, z_2, \ldots, z_m$ d'un quelconque de ses points vérifient ces q équations.

L'étude de la dépendance entre des équations données peut se faire soit par la théorie de l'élimination, soit par la considération du jacobien, et la comparaison des deux méthodes conduit à des propositions intéressantes.

Des trois méthodes d'élimination que M. Netto a développées, il ne semble pas qu'aucune puisse être négligée, puisque chacune se trouve éclairer naturellement une face du problème; les méthodes de Cayley et de Sylvester, auxquelles il consacre une leçon, sont moins essentielles : la première consiste à multiplier les équations en $z_1, z_2, \ldots, z_n$ par $1, z_1, \ldots, z_n, z_1^2; z, z_2, \ldots, z_u^2, z_u^3, \ldots$, de manière à obtenir un nombre d'équations suffisant pour éliminer tous les monomes, regardés comme les inconnues d'équations du premier degré; M. Netto montre que quelques-unes des assertions de Cayley sont inexactes. La méthode de Sylvester, qui permet d'obtenir, sous forme de déterminant, le résultat de l'élimination de deux inconnues entre trois équations, mérite assuré-

ment une citation, comme celle de Cayley, quoiqu'elle soit aussi insuffisamment appuyée.

La notion de *discriminant* acquise pour les fonctions d'une variable peut être étendue dans deux sens très différents. Le discriminant d'un système de m équations $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_m = 0$ à m inconnues peut être défini comme la fonction symétrique des racines de ce système obtenu en multipliant les valeurs que prend le jacobien des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_m$ quand on y substitue ces racines. D'un autre côté, le discriminant d'une fonction homogène $\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ peut être défini comme le résultant des dérivées partielles du premier ordre.

Une leçon est consacrée à l'extension, d'après Jacobi, au cas de plusieurs variables, du théorème classique d'Euler qu'exprime l'égalité

$$\sum \frac{M(z_\alpha)}{f'(z_\alpha)} = 0,$$

où $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont les racines supposées simples du polynome $f(x)$ et où $M(z)$ est une fonction entière de degré $n - 2$ au plus.

Enfin une exposition rapide de la théorie des caractéristiques de Kronecker et des relations qu'elle présente avec les formes quadratiques de M. Hermite, puis une leçon où sont résumées toutes les propositions essentielles de la théorie des équations linéaires, terminent ce premier fascicule.

Le second fascicule contient une belle exposition de la théorie des équations algébriques, où les idées essentielles sont mises peu à peu en pleine lumière, et dans un ordre où elles semblent naturelles.

Pour ne pas interrompre cette exposition, M. Netto débute par établir, d'après M. Hilbert, la proposition que voici : Si une fonction entière des variables $x, y, z, \ldots, w$; $q, r, \ldots, t$ à coefficients entiers, est irréductible dans le domaine des nombres rationnels, on peut donner aux variables $q, r, \ldots, t$ des valeurs entières telles que la fonction des variables $x, y, z, \ldots, w$ ainsi obtenue soit elle-même irréductible dans le même domaine. La démonstration de cet important théorème, où interviennent quelques propositions élémentaires de la théorie des fonctions, est d'un tout autre ordre d'idées que ce qui suit.

Si la théorie des équations cycliques et des équation abéliennes résulte aisément de la théorie de Galois, on peut dire aussi qu'elle prépare admirablement à l'étude de cette théorie, comme, aussi bien, elle en a préparé historiquement la naissance. L'ordre adopté par M. Netto se justifie pleinement. Les équations abéliennes conduisent naturellement à parler des groupes abéliens, dont l'auteur développe les propriétés essentielles d'après les travaux de Schering et Kronecker, de MM. Frobenius, Stickelberger, Zeigmondy (invariants du groupe, représentation du groupe au moyen d'une base, indépendance des invariants et de la base choisie, rang du groupe, décomposition du groupe en facteurs, etc.). Ces propriétés sont établies d'une façon abstraite, indépendamment de la nature des éléments qui constituent le groupe abélien. L'auteur introduit maintenant la notion de substitution

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_n \\ z_{i_1} & z_{i_2} & \ldots & z_{i_n} \end{pmatrix}$$

relative à n variables indépendantes $z_1, z_2, \ldots, z_n$, en se bornant aux propriétés nécessaires pour acquérir les notions de groupe symétrique, alterné, cyclique et les notions correspondantes de genre (*Gattung*) symétrique, alterné, cyclique. Toutefois, la notion de groupe ou de fonction cyclique est étendue (d'après Kronecker) au cas de $n_1 n_2 \ldots n_\nu$ variables $z_{h_1, h_2, \ldots, k_\nu}$, en considérant les substitutions qui consistent à remplacer $z_{h_1, h_2, \ldots, h_\nu}$ par

$$z_{h_1+\alpha_1, h_2+\alpha_2, \ldots h_\nu+\alpha_\nu},$$

où les indices $h_1+\alpha_1$, $h_2+\alpha_2$, ..., $h_\nu+\alpha_\nu$ doivent être réduits respectivement suivant les modules $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$; ce sont les substitutions que Cauchy nommait *substitutions arithmétiques*. Ces notions s'appliquent naturellement aux équations abéliennes. En faisant un pas de plus, on passe aux substitutions géométriques de Cauchy, qui consistent à remplacer, dans chaque variable $z_{h_1, k_2, \ldots, h_\nu}$, l'indice h_x par le nombre $a_x h_1 + b_x h_2 + \ldots + c_x h_\nu$ réduit suivant le module n_x; on arrive ainsi à la notion de groupe géométrique, puis, en combinant les substitutions arithmétiques et géométriques, à la notion de groupe linéaire (homo-

gène ou non), et, plus particulièrement, de groupe métacyclique, de fonction et d'équation métacyclique.

La notion de genre (*Gattung*) se trouve déjà en partie introduite : deux leçons sont consacrées à la mettre en pleine lumière. Voici, tout d'abord, le genre de Galois : on remarquera le soin et la rigueur qu'a apportés M. Netto à montrer l'existence de fonctions qui changent de valeur par toute autre substitution que la substitution identique; puis viennent la formation d'une fonction appartenant à un groupe donné, les fonctions conjuguées, la décomposition du groupe correspondant en « complexes conjugués » (*Nebengruppen,* de M. Weber), l'examen du cas où les genres conjugués appartiennent au même groupe, la démonstration du fait que, pour $n > 4$, il n'y a pas de genre pour lequel il y ait plus de deux et moins de n valeurs conjuguées, etc., puis, dans une autre leçon, les propositions fondamentales relatives à la composition et à l'isomorphisme. Notons l'épithète d' « autojugué » par laquelle M. Netto propose de distinguer ces sous-groupes que l'on a appelés *propres, distingués, invariants, normaux, monotypiques, caractéristiques,* etc.

Il arrive enfin à la théorie du groupe de Galois d'une équation donnée. Signalons, en dehors des propositions classiques, la démonstration, d'après M. Hilbert, de ce théorème : Si les coefficients d'une équation appartiennent à un domaine de rationalité constitué par les nombres rationnels et les paramètres $t, r, \ldots, q$, on peut donner, et d'une infinité de manières, des valeurs entières à ces paramètres, telles que le groupe de Galois de l'équation particulière ainsi obtenue, dans le domaine des nombres rationnels, soit le même que le groupe de Galois de l'équation proposée dans le premier domaine. En particulier, il y a une infinité d'équations à coefficients entiers qui n'ont aucune affection (*Affeckt*). Les propriétés d'une équation se traduisent dans les caractères de son groupe, tout d'abord dans sa transitivité ou son intransitivité, dans sa primitivité ou dans son imprimitivité, puis dans la possibilité de le réduire par l'adjonction de fonctions rationnelles des racines de l'équation (*résolvantes*).

Dans le premier Volume de ses *Leçons,* M. Netto avait traité de la réductibilité dans un domaine *naturel* (formé au moyen de nombres rationnels et de paramètres variables quelconques). Il

est maintenant nécessaire de traiter la même question dans un domaine *algébrique* formé par l'adjonction à un domaine naturel d'une racine d'une équation irréductible dans ce domaine, c'est ce que permettent les recherches de Kronecker et de M. Kneser. Parmi les nombres algébriques, les nombres *radicaux*, obtenus par l'extraction de racines portant sur un nombre rationnel, par l'adjonction de ces racines au domaine des nombres rationnels, l'extraction de nouvelles racines portant sur des nombres appartenant à ce nouveau domaine, etc., méritent une étude approfondie, en vue de la théorie de la résolution des équations, théorie que l'auteur expose en utilisant principalement les recherches de Kronecker; après avoir exposé les propositions générales sur la résolution des équations par radicaux, celle, en particulier, qui concerne la composition de leur groupe, l'auteur traite des équations résolubles de degré premier p, pour établir, d'après Kronecker et M. Weber, la composition de leurs racines au moyen de racines d'une équation cyclique de degré $p-1$; il passe ensuite aux équations primitives dont le degré est une puissance d'un nombre premier; il montre, en particulier, d'après M. Jordan, comment on peut former les types généraux des équations primitives résolubles de degré p^2.

Les recherches de MM. Hölder et Gegenbauer sur le *cas irréductible* forment une courte et intéressante digression, après laquelle l'auteur traite avec détail de la recherche des points d'inflexion d'une courbe du troisième degré.

Les deux dernières leçons se rapportent aux équations du cinquième degré, d'abord aux équations résolubles, pour lesquelles les fonctions métacycliques appartiennent au domaine de rationalité, à la formation d'une équation du sixième degré qui doit avoir une racine rationnelle pour que l'équation du cinquième degré soit résoluble, aux recherches de MM. Selivanof et Mc Clintock, puis à l'équation générale du cinquième degré, aux diverses équations à un paramètre auxquelles on peut la ramener (Bring-Jerrard, Brioschi, Klein-Gordan, etc.), au théorème de Galois sur le groupe de l'équation modulaire relative à la transformation d'ordre premier n, lorsqu'on adjoint l'irrationnelle $\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}n}$, au théorème de Jacobi sur les équations au multi-

plicateur, à la méthode de résolution de M. Hermite, à celles de Kronecker et de Brioschi. Enfin, dans les dernières pages, M. Netto montre, d'après M. Gordan, que les équations de degré supérieur au quatrième n'ont pas de résolvante à un paramètre. La démonstration même lui donne l'occasion d'établir le théorème bien connu de M. Lüroth sur les courbes unicursales.

Nous n'avons pu, dans la brève analyse qui précède, que donner une idée imparfaite de la richesse des matières traitées par M. Netto. La publication de son Livre rendra assurément les meilleurs services : elle a suivi de près la publication du beau Traité de M. Weber; ces deux Ouvrages, conçus à des points de vue très différents, ne font nullement double emploi, et ils contribueront, l'un et l'autre, à développer le goût de l'Algèbre.

MÉLANGES.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DE LAPLACE;

PAR M. G. TZITZÉICA.

1. Lorsqu'il s'agit de trouver des solutions $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de l'équation

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y},$$

de manière que $z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2$ en soit aussi une solution, on est conduit à chercher des fonctions c de x et de y, telles que les équations (1) et

$$(2)\qquad \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = c,$$

aient une solution commune.

Il y a un cas particulièrement intéressant, c'est quand le système des équations (1) et (2) est complet. Soit alors

$$(3)\qquad z = f(x, y, m) + m',$$

la solution commune, m et m' étant des constantes; les fonctions

$$z_i = \sqrt{\alpha_i}\, f(x, y, \beta_i) + \gamma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et $z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2$ sont des solutions de (1), β et γ étant des constantes quelconques et les α des constantes dont la somme est nulle.

Dans ce cas on a, entre les coefficients de (1), les relations

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial y} + 2a\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x} + 2b\right) = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + 4ab,$$

et c est donné, à un facteur constant près, par

$$\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x} + 2b, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial y} + 2a.$$

2. On tire de (4)

$$\frac{\partial^2 \log ab}{\partial x\, \partial y} = 8ab,$$

d'où l'on conclut que, par un choix convenable des variables indépendantes, l'on peut écrire

$$ab = -\frac{1}{4(x-y)^2}.$$

En posant ensuite

$$a = \frac{e^{\lambda}}{2(x-y)}, \qquad b = -\frac{e^{-\lambda}}{2(x-y)},$$

on aura, pour λ, l'équation

$$2\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{\lambda}}{x-y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{-\lambda}}{x-y}\right) = 0,$$

qui entre dans la classe de celles qui ont été étudiées par M. Cosserat (*Leçons* de M. Darboux, Vol. IV, note III).

3. La solution (3) du système complet se trouve à l'aide de quadratures. En effet, il est aisé de voir que pour toute solution R commune à (1) et à (2) on a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{b}{c}\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{a}{c}\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2\right].$$

On peut donc poser

$$(5) \qquad \frac{a}{c}\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial r}{\partial x}, \qquad \frac{b}{c}\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial r}{\partial y},$$

et l'on aura, pour la nouvelle fonction r, les équations

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y} = \frac{-1}{2(x-y)^2}, \qquad \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{1}{4(x-y)^2},$$

qu'on intègre immédiatement

$$r = \log\sqrt{\frac{(x+m)(y+m)}{x-y}} + m_1,$$

m et m_1 étant des constantes. On aura ensuite de (5) R par des quadratures.

4. R étant toujours une solution du système complet, posons

$$u = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

On sait que u satisfera à une équation de Laplace, si z satisfait à (1). Dans le cas particulier qui nous occupe, il est facile de vérifier que cette équation en u sera à invariants égaux

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + h_1 u,$$

en posant $u = hv$ et en faisant tous les calculs on trouvera

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \frac{v}{4(x-y)^2}.$$

Réciproquement, à une solution de cette dernière équation, on pourra faire correspondre une solution de (1).

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BURKHARDT (H.). — Elliptiche Functionen. Un vol. in-8°; XVI-372 p., Leipzig, Veit et Cie; 1899.

Dans un court Volume, de moins de quatre cents pages, M. Burkhardt a réussi à exposer les propriétés fondamentales de la théorie des fonctions elliptiques, de façon que le lecteur soit en mesure de manier ces fonctions, qu'il en connaisse les propriétés essentielles et ait acquis des vues étendues sur les développements indéfinis que comporte leur théorie. Dans un Volume antérieur, *Functionentheoretische Vorlesungen*, il avait d'ailleurs très bien préparé le terrain, de manière à ne plus avoir qu'à appliquer les propositions générales de la théorie des fonctions. La concision qu'il a su observer, sans nuire en aucune façon à la clarté, n'en est pas moins très remarquable. Nul doute que le Livre de M. Burkhardt ne contribue à développer la connaissance et le goût d'une théorie, dont les applications ne peuvent manquer de devenir de plus en plus nombreuses et intéressantes.

Le point de départ de l'auteur est dans la représentation sur une surface à deux feuillets de la racine carrée

$$\sqrt{f(z)} = s$$

d'un polynome du quatrième degré $f(z)$, à racines inégales; après avoir montré comment cette surface peut être ramenée à un tore, et transformée par un système convenable de coupures en une surface simplement connexe, il introduit la notion des *intégrales elliptiques*, et, en particulier, de l'intégrale de première espèce

$$u = \int^z \frac{dz}{\sqrt{f(z)}};$$

il établit, à peu près comme Briot et Bouquet, que si l'intégrale a la valeur u_0 pour $z = z_0$, la limite supérieure z est une fonction régulière de u dans le voisinage de u_0. Il est clair que cette condition est nécessaire pour prouver que z peut être regardé comme une fonction univoque de u; mais elle n'est pas suffisante, ainsi

que M. Picard l'a fait observer ici même, en donnant un moyen facile de combler la lacune de la démonstration de Briot et Bouquet. C'est ce que fait aussi M. Burkhardt en suivant une tout autre voie; il se borne, pour le moment, au cas où les quatre racines de $f(z)$ sont réelles, et montre alors comment la considération de l'intégrale de première espèce permet la représentation conforme du demi-plan des z sur un rectangle; on acquiert du même coup la notion des modules de périodicité et l'exemple d'une fonction doublement périodique, avec des périodes spéciales, l'une réelle, l'autre purement imaginaire; l'auteur explique pourquoi le mode de démonstration, fondé sur la symétrie de la figure, ne s'étend pas aux intégrales de première espèce relatives à un polynome quelconque du quatrième degré; dans ce cas général, le problème de l'inversion des intégrales de première espèce ne sera complètement résolu qu'après l'étude des fonctions elliptiques à périodes quelconques, fonctions dont l'introduction est toutefois légitimée par ce qui précède.

Après avoir exposé les notions primordiales relatives aux périodes, au parallélogramme des périodes, à la non-existence de fonctions analytiques uniformes ayant plus de deux périodes, M. Burkhardt expose les théorèmes de Liouville sur la non-existence de fonctions doublement périodiques entières, sur la somme des résidus, le nombre des pôles et des zéros, la relation entre leurs affixes; c'est du premier de ces théorèmes que sera déduit un peu plus tard le théorème de M. Hermite sur la décomposition en éléments simples; il est nécessaire auparavant d'introduire la fonction qui fournira l'élément simple, la fonction ζu, par exemple. La fonction pu est définie par son développement en série à double entrée, qui met les pôles en évidence; la fonction ζu s'obtient par intégration; l'équation différentielle que vérifie pu est déduite du premier théorème de Liouville. La fonction σu est obtenue sous forme de produit doublement infini, en partant de la définition

$$\frac{d \log \sigma u}{du} = \zeta u, \qquad \sigma'(o) = 1.$$

Le produit doublement infini est transformé, au moyen de la formule d'Euler, en produit simplement infini.

M. Burkhardt traite ensuite de la représentation d'une fonction doublement périodique comme quotient de produit de fonctions σ; le cas particulier qu'exprime la formule

$$pu - pa = \frac{\sigma(u-a)\sigma(a-u)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 a},$$

fournit les théorèmes d'addition relatifs aux fonctions pu, $p'u$, σu, les propositions fondamentales concernant la multiplication.

Après avoir établi les notations relatives aux fonctions $\sigma_\alpha u$ et les formules qui résultent de leur introduction, en particulier les expressions des quantités (1) $\sqrt{e_\alpha - e_\beta}$, le caractère des fonctions $\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma_\beta u}$, les équations différentielles qu'elles vérifient, après avoir défini, comme cas particulier, les fonctions sn, cn, dn, et démontré les théorèmes d'addition relatifs à ces fonctions, M. Burkhardt passe au théorème capital de M. Hermite sur la formation des fonctions entières doublement périodiques de troisième espèce, en partant des équations fonctionnelles qui les définissent. Avant l'exposition de ce théorème, les relations avec le nombre des zéros, la somme des affixes des zéros et les constantes qui définissent les multiplicateurs sont obtenues par la considération des intégrales

$$\int \frac{\Phi'(u)}{\Phi(u)}\,du, \qquad \int u\,\frac{\Phi'(u)}{\Phi(u)}\,du,$$

prises le long du parallélogramme des périodes.

L'importance et le rôle du théorème de M. Hermite pour l'introduction des fonctions $\mathfrak{S}$ et la déduction de leurs propriétés, sont mis en pleine lumière. Les formules de passage des fonctions σ aux fonctions $\mathfrak{S}$ sous la forme

$$\sigma u = \frac{2\omega_1 e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\mathfrak{S}_1(v)}{\mathfrak{S}'_1(o)}, \qquad \sigma_\alpha u = \frac{e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\mathfrak{S}_{\alpha+1}(v)}{\mathfrak{S}_{\alpha+1}(o)}$$

(1) M. Burkhardt, de même que M. Study, adopte, comme je l'ai fait avec M. Molk, la notation ω_1, ω_3, $\omega_2 = -\omega_1 - \omega_3$ pour désigner les demi-périodes, et les notations correspondantes pour les racines carrées des différences des racines. Il avait toutefois pensé que nous avions changé, pour les quantités k, k', les notations de Jacobi, que nous avons scrupuleusement respectées, comme lui-même. Avec la meilleure grâce du monde, M. Burkhardt a reconnu que l'étonnement qu'il manifeste à cet égard dans sa préface n'est pas justifié.

s'en déduisent immédiatement; pour compléter ces formules, pour avoir l'expression des quantités $\mathfrak{S}_{\alpha+1}(o)$, il n'en faut pas moins passer par la démonstration, d'ailleurs facile et élégante, de l'identité

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1-q^{2\nu})(1+q^{2\nu-1}z^{2})(1+q^{2\nu-1}z^{-2})=\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}q^{\nu^2}(z^{2\nu}+z^{-2\nu}).$$

La relation

$$\mathfrak{S}_1(o)=\pi\mathfrak{S}_0(o)\mathfrak{S}_2(o)\mathfrak{S}_3(o)$$

est déduite de l'équation aux dérivées partielles que vérifient les fonctions $\mathfrak{S}$. Enfin les dernières pages de ce Chapitre se rapportent aux propositions de M. Appell sur la décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques de troisième espèce qui admettent des pôles.

L'auteur aborde ensuite le problème de l'inversion dans sa généralité; il s'attache à en bien préciser le sens, de manière que le lecteur sache bien à quel moment il a vraiment résolu l'inversion d'une intégrale *donnée*. M. Burkhardt développe deux méthodes pour y parvenir; considérant l'intégrale de première espèce

$$u=\int_y^x\frac{dz}{\sqrt{f(z)}},$$

où la limite inférieure est un point arbitraire $[y, \sqrt{f(y)}$ de la surface de Riemann, et ayant formé une fonction $p(u|\omega_1, \omega_3)]$, dont les périodes coïncident avec les modules de périodicité de l'intégrale, il montre que pu est une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{f(x)}$ qui, pour $x=y$, doit être infinie du second ordre, mais qui ne devient infinie nulle part ailleurs; d'autre part, le développement de pu suivant les puissances de u ne doit contenir aucun terme indépendant de u; ces conditions permettent de déterminer algébriquement cette fonction et de parvenir ainsi à l'équation bien connue

$$p\left[\int_y^x\frac{dz}{\sqrt{f(z)}}\right]=\frac{F(x, y)+\sqrt{f(x)}\sqrt{f(y)}}{2(x-y)^2},$$

où

$$F(x, y)=f(y)+\tfrac{1}{2}(x-y)f'(y)+\tfrac{1}{12}(x-y)^2f''(y),$$

puis aux relations

$$\mathrm{p}\left[\int_{x}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}\right] = x, \qquad \mathrm{p}'\left[\int_{x}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}\right] = \sqrt{f(x)}.$$

L'autre méthode repose sur ce que, en prenant pour limite inférieure de l'intégrale un point d'embranchement, on peut obtenir les valeurs de x qui correspondent aux demi-périodes.

Cette méthode conduit aux relations de la forme

$$\sqrt{\frac{x - x_2}{x - x_1}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{a_0 \frac{(x_3 - x_2)(x_0 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_3 - x_1)}}\,\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_1(v)},$$

. . . .

relations dont M. Burkhardt donne d'ailleurs une déduction directe. Finalement, on a obtenu explicitement x et $\sqrt{f(x)}$, et par conséquent, toute fonction de la surface de Riemann, comme fonction elliptique du premier ordre de u.

Les formules relatives à la transformation linéaire sont établies d'une part pour les fonctions σ, d'autre part et directement pour les fonctions ϑ, sans toutefois entrer dans cette détermination du signe qui dépend de théories arithmétiques; l'auteur montre en outre comment les formules relatives aux fonctions ϑ permettraient d'établir les formules de passage à la fonction σ. Il montre enfin que la modification du système de coupures de la surface de Riemann revient à une transformation linéaire.

Deux Chapitres importants pour les applications sont consacrés, l'une à la dégénérescence, l'autre à l'étude des valeurs qui rendent la fonction pu réelle, dans les deux cas où les invariants sont réels.

Passant ensuite aux fonctions modulaires, M. Burkhardt s'occupe d'abord de la dépendance entre le rapport des périodes τ et le carré du module λ, ainsi que des figures, limitées par des demi-cercles (ou des demi-droites) normaux à l'axe des quantités réelles, qui représentent le plan des λ sur le plan des τ; le caractère de la fonction $\lambda(\tau)$ d'être une fonction automorphe, restant identique pour les transformations congrues suivant le module 2 à la transformation identique, admettant l'axe des quantités réelles comme frontière naturelle, est ainsi mis en évidence. Les propriétés des fonctions analytiques de τ qui sont des fonctions

rationnelles de λ s'aperçoivent aisément : telle est la fonction $J(\tau)$; un domaine fondamental relatif à la fonction $\lambda(\tau)$ se décompose en six domaines fondamentaux relatifs à la fonction $J(\tau)$. Introduisant ensuite la notion de sous-groupe à indice fini du groupe modulaire, l'auteur montre comment on peut faire correspondre à chaque tel sous-groupe un polygone contenant un point, et un seul, qui puisse être déduit, par une substitution du sous-groupe, d'un point arbitrairement choisi dans le demi-plan des τ : de là résulte la notion de fonction modulaire relative au sous-groupe, en particulier de la fonction modulaire principale (ou de module principal), au moyen de laquelle toutes les autres s'expriment rationnellement. Les sous-groupes de congruences, formés de substitutions telles que deux éléments correspondants soient congrus suivant un module entier n, fournissent un exemple simple, qui trouve une application immédiate dans le problème de la division spéciale (division des périodes) et dans le problème de la transformation spéciale.

L'auteur traite explicitement le cas de la transformation quadratique, en raison de son utilité pour les calculs numériques; il donne en terminant quelques indications sur les fonctions modulaires considérées comme fonctions inverses du quotient de deux intégrales d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Il passe ensuite aux problèmes généraux de la transformation, de la division, pour montrer dans quel sens on peut dire que la détermination d'une fonction elliptique aux périodes $(2m\omega_1, 2\omega_3)$ se déduit d'une fonction elliptique aux périodes $(2\omega_1, 2\omega_3)$ par l'extraction d'une racine $m^{\text{ième}}$, et que la division de l'argument dépend de l'extraction de deux telles racines. Quelques pages sont consacrées, d'une part au point de vue de Jacobi, pour la théorie de la transformation, de l'autre au problème de la multiplication complexe.

Après avoir donné les renseignements essentiels pour le calcul numérique des fonctions et des intégrales elliptiques, l'auteur passe à l'étude de la relation algébrique qui lie deux fonctions elliptiques qui ont le même parallélogramme des périodes : il examine en particulier le cas où ces deux fonctions dépendent rationnellement d'une même fonction elliptique; il traite ensuite des courbes dont les coordonnées s'expriment au moyen des fonc-

tions elliptiques, donne la notion générale des courbes elliptiques du $n^{\text{ième}}$ ordre, de la courbe elliptique normale dans un espace à un nombre quelconque de dimensions, puis étudie particulièrement les courbes planes du troisième degré et les biquadratiques gauches de première espèce.

Le théorème de M. Picard sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques est développé pour le cas d'une équation du second ordre : les recherches de M. Hermite sur l'équation de Lamé fournissent une belle application de ce théorème.

Enfin le dernier Chapitre est consacré à l'étude du pendule sphérique. J. T.

VOLKMANN (P.). — Einführung in das Studium der theoretischen Physik insbesondere in das der analytischen Mechanik, mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntniss. Un vol. in-8°, XIV-370 p. Leipzig, Teubner; 1900.

Chacun sait qu'il n'est pas commode d'exposer clairement les débuts de la Mécanique analytique.

On se tire bien souvent d'affaire en plaçant sous l'autorité de Galilée ou de Newton de très vagues principes sur l'égalité de ceci et de cela, et sur l'indépendance de quelque chose. On les fait précéder d'un hypocrite « l'expérience prouve » ou d'un plus honnête « nous admettrons que ». Puis, sans trop appuyer sur une démonstration tout juste aussi solide que les principes qui la soutiennent, on établit des formules algébriques, qui, cette fois-ci sont très nettes. Ces formules écrites, tout est sauvé. On n'est pas alors embarrassé pour en faire d'ingénieuses combinaisons analytiques; les théorèmes se succèdent, et l'expérience est toujours là pour « confirmer l'exactitude des principes par la vérification de leurs conséquences les plus éloignées ».

Grâce à cette artificieuse exposition, on a masqué l'obscurité des principes à l'élève peu attentif. On lui a donné un merveilleux instrument de travail, avec la manière de s'en servir, mais aussi avec le conseil presque explicite de ne pas trop discuter la façon dont on l'a construit devant lui.

Il est, du reste, consolant de penser que l'enseignement classique de la Géométrie conduit précisément au même résultat.

Mais si un tel mode d'exposition est d'une incontestable utilité à ceux qui apprennent, il est permis de croire que ceux qui ont déjà appris auront quelque intérêt à chercher ensuite à comprendre ce qu'ils croient savoir.

Ils liront alors avec profit un livre comme celui de M. P. Volkmann, où ils pourront étudier une revision des principes et trouver ainsi l'occasion d'y réfléchir à leur tour. Quant au mot *Introduction* par lequel commence le titre de cet Ouvrage, il servira principalement à justifier la liberté des développements et l'ordre méthodique des matières.

M. P. Volkmann nous dit d'abord avec quelque détail les règles logiques et les conventions suivant lesquelles on a coutume de raisonner en ces sortes de choses. Il précise de son mieux ce qu'il entendra dans la suite par *axiome* et *principe*, par *hypothèse* et *postulat*. C'est seulement après ces préliminaires qu'il aborde l'exposé de la Mécanique, statique et dynamique du point et des systèmes; hydrostatique et capillarité, et il termine par quelques mots sur les théorèmes synthétiques de d'Alembert et d'Hamilton.

L'ordre suivi et les idées générales rattachent l'exposition aux travaux classiques inaugurés par Newton.

Mais l'Auteur montre une constante préoccupation d'éviter l'abstraction pure et il s'attache avec grand soin à montrer comment l'énoncé d'un principe découle de l'observation de la Nature. Il ne craint pas l'historique et n'hésite pas à rappeler le texte même des fondateurs pour tâcher de faire comprendre leur pensée.

Qu'on excuse une statistique : L'opposition entre l'objectif et le subjectif se rencontre dix-sept fois et la notion de postulat vingt-trois, mais il y a cinquante-quatre citations de Newton.

D'un autre côté, chacun des principes est suivi de ce que l'Auteur appelle « ses conséquences ». C'en est d'abord la traduction dans le langage de la Géométrie analytique; puis, immédiatement, quelques applications. Ces applications ne sont pas quelconques. Souvent elles présentent un caractère historique. C'est la chute des corps et le mouvement des projectiles qui nous sont donnés comme applications des idées de Galilée; c'est la théorie du

mouvement des planètes qui suit l'exposé des idées de Newton.

Systématiquement enfin, ce sont des problèmes *réels* qui se trouvent traités ou indiqués : ici la théorie du pendule, plus loin la théorie de la suspension bifilaire et des appareils de torsion; plus tard, la gravitation à la surface de la terre. Et la préoccupation de l'objectivité est extrême : douze de ces questions sont étudiées au point de vue de la précision expérimentale.

En définitive, ce livre contient des renseignements et des discussions d'un intérêt très réel. Il tend à supprimer toute obscurité dans un exposé qui s'attache à suivre les enseignements de Galilée et de Newton. M. P. Volkmann a-t-il réussi à obtenir un résultat si désirable?

Le lecteur en décidera. H. ABRAHAM.

DUDENSING (W.). — UEBER DIE DURCH EINE ALLGEMEINE DREIGLIEDRIGE ALGEBRAISCHE GLEICHUNG DEFINIERTE FUNKTION UND IHRE BEDEUTUNG FÜR DIE AUFLÖSUNG DER ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN VON HÖHEREM ALS VIERTEM GRADE. Un vol. in-8°, VIII-57 p. Leipzig, Teubner, 1900.

Outre des considérations générales dont les unes sont très justes et dont quelques autres prêteraient à discussion, le travail de M. Dudensing contient un résultat intéressant qui constitue une belle et simple application de la formule de Lagrange pour le développement en série des fonctions implicites. L'Auteur montre que les $p+q$ racines de l'équation en x

$$x^p - x^q = y,$$

à laquelle il est bien facile de ramener n'importe quelle équation trinome, sont données par le développement suivant :

$$x = \left[\alpha y^{\frac{1}{\lambda-\mu}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \alpha^{\cdots} y^{\frac{\lambda n}{\lambda-\mu}} K_n(\lambda,\mu)\right]^{\varepsilon},$$

où l'on suppose

$$K_n(\lambda,\mu) = \frac{\left(\frac{n\mu-1}{\lambda-\mu}-2\right)\left(\frac{n\mu-1}{\lambda-\mu}-1\right)\cdots\left(\frac{n\mu-1}{\lambda-\mu}-(n-1)\right)}{(\lambda-\mu)\,1.2.3\ldots n}$$

et où les valeurs de α, β, λ, μ, ε sont données par l'une ou l'autre des formules

$$\alpha = -1,\quad \beta = y,\quad \lambda = p,\quad \mu = q,\quad \varepsilon = 1,$$
$$\alpha = -1,\quad \beta = y,\quad \lambda = q,\quad \mu = p,\quad \varepsilon = -1,$$

si l'on a

$$|y| < \left[\frac{(p+q)^{p+q}}{p^p q^q}\right]^{\frac{1}{p+q}}$$

ou par l'une ou l'autre des formules

$$\alpha = \frac{1}{y},\quad \beta = \frac{1}{y},\quad \lambda = -p,\quad \mu = p+q,\quad \varepsilon = 1,$$
$$\alpha = \frac{1}{y},\quad \beta = \frac{1}{y},\quad \lambda = -q,\quad \mu = p+q,\quad \varepsilon = -1,$$

si l'on a

$$y > \left[\frac{(p+q)^{p+q}}{p^p q^q}\right]^{\frac{1}{p+q}}.$$

Parmi les recherches antérieures aux siennes et relatives au même sujet ou à des sujets voisins, M. Dudensing cite un Mémoire de Westphal : *Evolutio radicum æquationum algebraicarum e ternis terminis constantium in series infinitas Preisschrift der philos. Facultät zu Göttingen*, 1801), un Mémoire de M. A. Gebhardt : *Wissenschaftliche Beigabe zum Programm des Nicolaigymnasiums zu Leipzig*, 1873, enfin la Dissertation inaugurale de M. von Mangoldt : *Ueber die Darstellung der Wurzeln einer dreigliedrigen algebraischen Gleichung durch unendl. Reihen*, Berlin, 1878, dissertation dont il n'a eu connaissance qu'après l'impression de son propre travail et qui contient des résultats équivalents aux siens, obtenus par une autre voie.

HÖLDER (O.). — ANSCHAUUNG UND DENKEN IN DER GEOMETRIE. Akademische Antrittsvorlesung gehalten am 22 Juli 1899 : mit Zusätzen, Anmerkungen und einem Register. 75 p. in-8°. Leipzig. Teubner, 1900.

Le sujet traité par M. Hölder est plutôt d'ordre philosophique que d'ordre scientifique ; il ne peut toutefois manquer d'intéresser

vivement les nombreux géomètres qui sont quelque peu philosophes. L'auteur étudie d'abord ces concepts qui sont la matière même de la Géométrie, les axiomes ou postulats qui permettent de raisonner sur ces concepts. Il oppose à la doctrine de Kant, qui place dans l'intuition « pure » la source de toutes nos connaissances géométriques, la doctrine empirique, vers laquelle il incline manifestement. Ce n'est pas ici le lieu de chercher si la théorie de l'évolution et de l'hérédité ne permet pas d'établir un lien entre ces doctrines opposées et d'autre part si l'intuition, même pure, n'est pas très variable d'un individu à l'autre et ne se modifie pas profondément par l'habitude de la réflexion géométrique. Est-elle la même chez celui qui n'a l'habitude que de la Géométrie euclidienne ou chez celui qui s'est familiarisé avec les concepts et les méthodes de la Géométrie non-euclidienne? chez les Géomètres d'un siècle et ceux d'un autre siècle? Quoi qu'il en soit, M. Hölder s'occupe ensuite des démonstrations géométriques et se livre à une analyse très pénétrante de la démonstration classique du théorème sur la somme des angles d'un triangle, en admettant le postulatum d'Euclide. Cette démonstration ne lui paraît pas procéder suivant les règles de la logique classique; l'*intuition* y intervient à chaque instant, dans la façon même dont on voit la figure; et c'est cette vue elle-même qui permet d'appliquer les théorèmes ou les postulats, en sorte que les déductions géométriques seraient une suite d'expériences idéales (*Gedanken-experiment*). Souvent l'intuition permet de porter un jugement immédiat; telle est cette affirmation : deux bissectrices d'un triangle se coupent en un point intérieur au triangle; il faut au contraire un raisonnement pour prouver que la troisième bissectrice passe par ce point. M. Hölder estime aussi que le raisonnement géométrique, fait sur une figure spéciale, est dans une certaine mesure un raisonnement par analogie. Souvent, quelque partie d'une démonstration, regardée comme intuitive, repose sur quelque axiome qui peut être formulé, mais que l'on néglige d'habitude : tel est l'axiome signalé par M. Hilbert (*Axiome der Anordnung*) : Si A, B, C, D sont des points d'une droite, si B est entre A et D, C entre B et D, B est entre A et C entre A et D. Le premier théorème sur l'égalité des triangles n'est pas susceptible d'une démonstration proprement dite, il a le caractère d'un axiome.

Pour reconnaître celles des propositions de la Géométrie qui ont un tel caractère, pour éviter d'avoir recours à l'intuition dans le courant d'une démonstration, sans le savoir, il faudrait ne plus raisonner sur des figures, mais sur de purs symboles qui représenteraient les éléments géométriques, comme ils représentent les nombres dans l'Algèbre. Les conclusions ainsi obtenues, même si elles ne sont pas d'accord avec l'intuition, n'en sont pas moins les conclusions certaines des suppositions d'où on les a tirées. Cette méthode est très différente de la méthode d'invention ordinairement suivie en Géométrie, méthode où l'intuition, l'analogie, l'observation, l'induction jouent un rôle essentiel. Tout cela est incontestable; il me semble toutefois qu'une autre question se pose. Sans doute le seul moyen d'éliminer l'intuition des raisonnements géométriques est de raisonner sur de purs symboles, soit que l'on crée, comme le veut par exemple M. Peano, un symbolisme spécial, soit que l'on raisonne, comme ont fait quelques-uns des géomètres qui ont obtenu des résultats essentiels dans la science de l'espace, avec les symboles de l'analyse, en utilisant les ressources de l'analyse; de cette façon, on est assuré que les conclusions sont identiques aux prémisses, qu'elles ne sont qu'une transformation des données : aucun élément étranger n'a pu s'introduire subrepticement dans le cours de cette transformation : les données seules restent soumises à la critique philosophique. Si cette méthode est la seule qui soit sûre, il n'en résulte pas qu'elle soit la seule possible et ceux qui estiment que l'intuition n'est que le résultat d'une longue habitude, peut-être d'une habitude ancestrale, sont enclins à se demander si l'intuition ne peut se modifier, chez les individus eux-mêmes, par les habitudes auxquelles ils se soumettent, et si cette intuition *acquise* ne peut permettre à quelques géomètres de poursuivre hardiment et utilement leurs recherches dans un domaine soumis à d'autres lois que l'espace ordinaire, tout en conservant les habitudes du raisonnement géométrique. Au kantien qui demandera ce qu'est une « intuition acquise », je ne vois pas d'autre réponse à faire que de demander en retour ce qu'est une intuition « pure ». Les termes philosophiques ne peuvent jamais être entendus qu'à demi.

Le concept de proportionnalité a vraisemblablement son origine dans l'existence des figures semblables : c'est au contraire sur la

théorie des proportions, présentée d'une façon vraiment scientifique, qu'Euclide fonde l'existence des figures semblables. L'exposition de la théorie d'Euclide, la notion de rapport fournissent à M. Hölder l'occasion de remarques intéressantes; la notion des aires égales (aire du cercle, méthode d'exhaustion) lui permet d'insister sur le rôle en Géométrie des démonstrations indirectes (par l'absurde). Il termine son opuscule, dont il n'est pas une page qui ne donne beaucoup à penser, par quelques indications relatives à la Mécanique. Les notes et éclaircissements, renvois bibliographiques, tiennent deux fois plus de place que le « discours » lui-même. Plusieurs de ces notes sont étendues et mériteraient qu'on s'y arrêtât; mais nous n'avons pas d'autre prétention ici que de signaler le travail de M. Hölder. Mentionnons toutefois le juste tribut d'éloges qu'il paie, à plusieurs reprises, aux belles recherches que M. Hilbert a récemment publiées (*Grundlagen der Geometrie, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals*, 1899). J. T.

MÉLANGES.

SUR LES COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE DÉVELOPPABLE DONT LES TANGENTES RENCONTRENT UNE COURBE DONNÉE;

PAR M. CH. MICHEL.

M. Darboux, dans le Chapitre de sa *Théorie générale des surfaces* qu'il consacre aux congruences de courbes (Tome II), est conduit à énoncer le résultat suivant, comme cas particulier d'un problème général :

La détermination de toutes les courbes, tracées sur une développable (Δ), *dont les tangentes vont rencontrer une courbe donnée quelconque* (C), *dépend de l'intégration d'une équation de Riccati.*

Voici une démonstration synthétique de cette proposition. Dé-

signons par (R) l'arête de rebroussement de la développable (Δ), par A un point de cette courbe dont la position est fixée par la donnée d'un paramètre variable quelconque u, par exemple par la longueur de l'arc de l'arête de rebroussement, enfin, par AT la génératrice rectiligne de la développable tangente en A à l'arête (R). On déterminera une des courbes, tracées sur (Δ), dont les tangentes rencontrent (C), si l'on connaît la distance v du point A au point M où AT rencontre la courbe, en fonction du paramètre u, qui fixe la position du point A.

Considérons quatre courbes, Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, solutions du problème, et soient M_1, M_2, M_3, M_4 les points où la génératrice AT rencontre ces courbes. Les tangentes en ces points aux quatre courbes sont dans le plan tangent à la développable (Δ) le long de la génératrice AT et passent par un même point, qui est le point de rencontre de ce plan tangent avec la courbe (C). La génératrice A'T' de la développable (Δ), infiniment voisine de la génératrice AT, rencontre les quatre courbes en quatre points M'_1, M'_2, M'_3 et M'_4, infiniment voisins respectivement des quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4. Si l'on prend pour infiniment petit principal l'accroissement du paramètre u et si l'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, les deux droites AT et A'T' se coupent et déterminent un plan qui coïncide avec le plan tangent à la développable (Δ) le long de AT; les quatre droites $M_1M'_1$, $M_2M'_2$, $M_3M'_3$ et $M_4M'_4$ sont les tangentes aux quatre courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4 et vont passer, dans le plan tangent, par un même point de la courbe (C).

Il en résulte que le rapport anharmonique des quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la droite AT est égal à celui des quatre points M'_1, M'_2, M'_3 et M'_4 sur la droite A'T', à un infiniment petit d'ordre supérieur au premier près. En d'autres termes, la différentielle du rapport anharmonique des quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4, situés sur la génératrice variable AT de la développable, est nulle. En intégrant, on voit ainsi que le rapport anharmonique des quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 où une droite variable de la développable rencontre les quatre courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 est constant. Par suite, le rapport anharmonique des paramètres v_1, v_2, v_3, v_4 de ces points sur la génératrice est lui-même constant, et, d'après une propriété bien connue, le paramètre v qui fixe la position du

point M d'une courbe Γ cherchée sur la génératrice de la développable qui passe par ce point est l'intégrale générale d'une équation de Riccati. Le théorème de M. Darboux est établi.

M. Darboux donne de ce théorème une application importante, à laquelle il est aisé de donner une forme géométrique.

Supposons que la développable (Δ) soit l'enveloppe des plans normaux à la courbe (C). Les courbes Γ cherchées sont dans ce cas les développées de la courbe (C). Comme le remarque M. Darboux, on peut obtenir deux de ces courbes sans intégration : ce sont les arêtes de rebroussement γ_1 et γ_2 des deux nappes de la développable circonscrite à la fois à la courbe (C) et au cercle de l'infini. Des propriétés de l'équation de Riccati il résulte que la développée la plus générale d'une courbe se détermine par une simple quadrature. Voici l'interprétation géométrique de ce résultat. De la démonstration précédente il suit que le rapport anharmonique des quatre normales à (C), en un point I variable de cette courbe, qui touchent quatre développées fixes de (C) a une valeur constante. En particulier, supposons que deux de ces quatre développées soient les arêtes de rebroussement γ_1 et γ_2 de la développable circonscrite à (C) et au cercle de l'infini. Les normales à (C) qui touchent ces deux courbes sont les droites isotropes menées par le point I, dans le plan normal à (C) en ce point. Mais, comme l'a montré Laguerre, le rapport anharmonique de quatre droites concourantes dans un plan, dont deux sont isotropes, s'exprime au moyen de l'angle des deux autres. On est donc conduit au théorème suivant, dû à Joachimsthal :

L'angle des tangentes menées d'un point variable d'une courbe à deux développées de cette courbe est constant.

Le théorème de Joachimsthal est ainsi démontré géométriquement.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

NEUMANN (C.). — *Die elektrischen Kräfte. Darlegung u. genauere Betrachtung der von hervorrag. Physikern entwickelten matemat. Theorien.* 2. (Schluss-) Thl. : Ueber die von Hermann v. Helmholz

angestellten Untersuchungen. Gr. in-8°, XXXVII-462 p. Leipzig, Teubner 14 m.

ANDOYER (H.). — *Leçons élémentaires sur la théorie des formes et ses applications géométriques.* In-4°, 190 p. Paris, Gauthier-Villars. 8 fr.

BAKER (W.-M.). — *Examples in Analytical Conics for Beginners.* 96 p. London, Bell. 2 sh. 6 d.

BAER (K.). — *Die Kugelfunktion als Lösung einer Differentialgleichung.* In-4°, 25 p. Berlin, Mayer et Müller. 1 m. 50 pf.

CANTOR (M.). — *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* 3 (Schluss-) Bd. Vom J. 1668 bis zum J. 1758. 3. Abthlg. Gr. in-8° avec 70 fig. Leipzig, Teubner. 12 m.

FORSYTH (A.-R.). — *Memoir on the Integration of Partial Differential Equations of the second ordre in three independent Variables, when an intermediary Integral does not exist in general.* In-8°, 86 p. London, Dulau. 4 sh.

From *Philos. Transactions*, 1890, Vol. 191.

FURLE (H.). — *Ueber die Verwendung des Faber'schen Rechenstabes zur Lösung quadratischer, kubischer und biquadratischer Gleichungen.* 1 Thl. In-4°. Berlin, Gaertner. 1 m.

GUTJAHR (W.). — *Die Diakaustik des Kreises.* In-4°, 28 p. avec 2 tableaux. Berlin, Gaertner. 1 m.

HEUN (K.). — *Die Vektoren der Geschwindigkeit und der Beschleunigung des Punktes und der geraden Linie.* In-4°, 28 p. Berlin, Gaertner. 1 m.

LAFOUGE. — *Essai synthétique sur la formation du système solaire.* Ire Partie : *Formation du système.* In-8°, IX-238 p. Châlons-sur-Marne, Martin frères.

LÉVY (M.). — *Leçons sur la théorie des marées, professées au Collège de France.* Ire Partie : *Théories élémentaires; Formulaire pratique de prévisions des marées.* In-4°, XII-298 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 14 fr.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BORTKEWITSCH (L. von). — Das Gesetz der kleinen Zahlen. Un vol. in-8°, VI-52 p. Leipzig, Teubner; 1898.

Cette courte brochure se rapporte à la statistique des événements rares, comme les suicides d'enfants (c'est un exemple discuté par l'auteur). Dans une pareille statistique, les rapports des nombres varient naturellement beaucoup, et il n'y a évidemment rien à tirer de pareils nombres pour les causes indépendantes du hasard qui produisent les phénomènes considérés : il en est tout autrement si l'on veut étudier la loi du hasard dans les données statistiques. L'auteur montre d'après quelle loi les événements de cette nature doivent se distribuer par année, la proportion des nombres d'années pour lesquelles l'événement doit se produireo, 1, 2, 3, ... fois : la concordance entre cette loi et les observations est remarquable. Cette étude, intéressante en elle-même, prend une portée notable par la façon dont elle se relie avec l'étude des probabilités *variables*, qu'il y a lieu, d'après M. Lexis, d'introduire dans les recherches statistiques, pour en faire cadrer les résultats avec la théorie du calcul des probabilités; la formule de Poisson (loi des grands nombres), où l'on regarde la probabilité comme constante, est, en effet, loin d'y suffire, sauf dans un petit nombre de cas : la théorie développée par M. von Bortkewitsch permet de réduire au minimum l'influence du changement de la probabilité. Il y a donc lieu de signaler un Travail qui ouvre peut-être une voie pour une meilleure discussion des observations statistiques.

PICARD ET SIMART. — Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. T. II, premier fascicule.

Dans le premier volume, les auteurs avaient développé cette théorie presque exclusivement au point de vue transcendant, c'est-à-dire au point de vue des intégrales de différentes natures attachées à une surface algébrique. Il n'en est plus de même du fasci-

cule actuel, presque entièrement consacré à une nouvelle Géométrie qu'on pourrait appeler la *Géométrie des systèmes linéaires algébriques*. Cette théorie dont les fondements ont été posés par Noether a pris tout récemment un développement considérable par suite des efforts de deux éminents géomètres italiens MM. Enriques et Castelnuovo, qui sont arrivés à en tirer des résultats extrêmement remarquables et dont certains sont même réellement merveilleux. C'est elle qui a conduit Noether à introduire le *second genre* $p^{(1)}$ et qui, tout récemment, a amené M. Enriques à considérer un nouvel invariant, le *bigenre* P n'existant que si le genre géométrique p_g est nul, invariant qui, d'après les travaux de M. Castelnuovo, a une importance capitale dans l'étude des surfaces unicursales. C'est aussi elle qui a permis à M. Picard de montrer que le nombre des intégrales doubles de seconde espèce attachées à une surface est toujours fini et est un invariant pour toutes les transformations birationnelles; ce nombre ne semble pas, jusqu'à présent, être lié aux autres nombres déjà introduits dans cette théorie, de sorte qu'il vient allonger la liste des invariants d'une surface et accuser encore la différence profonde qui, d'après ce qu'on a vu dans le premier volume, existe entre le cas d'une seule variable et celui de deux variables.

Bien que le sujet soit en pleine élaboration, puisqu'il est actuellement l'objet des travaux de toute une série de géomètres, les auteurs, par leur remarquable talent d'exposition, sont arrivés à nous présenter d'une façon très homogène ces théories si fécondes; par des démonstrations intuitives ou des vérifications directes remplaçant souvent les longs calculs des Mémoires originaux, par l'emploi des notations symboliques si commodes de M. Enriques, ils nous conduisent sans grands efforts jusque dans leurs parties les plus abstraites, dépassant ainsi de beaucoup, à la grande satisfaction du lecteur, le but trop modeste qu'ils s'étaient proposé dans la Préface du premier volume et qui était uniquement de donner une *idée* de l'état actuel de la science sur un sujet dont l'étude mérite de tenter l'effort de nombreux chercheurs.

Chapitre I. — *Théorème de Noether relatif aux courbes et surfaces passant par l'intersection de deux autres.*

Le théorème de Noether relatif aux courbes a pour but de recon-

naître, d'après la façon dont se comporte un polynome $f(x, y)$ dans le voisinage de tout point commun aux deux courbes algébriques $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$, s'il est possible de mettre f sous la forme

$$f = A\varphi + B\psi,$$

A et B étant deux polynomes. Après avoir traité cette question très importante pour la suite, les auteurs en font deux applications, l'une relative à la recherche des fractions rationnelles $\frac{M}{N}$ de x et y restant finies pour tous les points à distance finie d'une courbe algébrique $f(x, y) = 0$, l'autre relative au *théorème du reste* de Brill et Noether sur les adjointes d'ordre n d'une courbe algébrique. Passant alors au cas des surfaces, ils étendent le théorème de Noether, définissent les *surfaces sous-adjointes* comme étant celles dont toutes les sections planes sont les adjointes des mêmes sections planes de la surface proposée, et montrent que le théorème du reste leur est applicable.

Chapitre II. — *La Géométrie sur une courbe algébrique.*

Considérons une série linéaire de courbes

$$h_0\psi_0 + h_1\psi_1 + \ldots + h_r\psi_r = 0$$

les ψ étant des polynomes entiers non liés à $f(x, y)$ par une relation identique de la forme

$$a_0\psi_0 + a_1\psi_1 + \ldots + h_r\psi_r = \theta f,$$

les a étant des constantes et θ un polynome.

Ces courbes définissent sur la courbe fixe f une série linéaire de groupes de points; nous la représentons par g_n^r, r étant sa dimension et n, nombre de ceux de ces points qui varient avec les h, étant son degré. C'est à l'étude de ces séries linéaires g_n^r que le chapitre est entièrement consacré. Une notion capitale est alors celle de série linéaire complète; une série g_n^r sera dite *incomplète* s'il existe une autre série $g_n^{r'}$ telle que tout groupe de g_n^r soit un groupe de $g_n^{r'}$. Au moyen du théorème de Noether on montre que toute série g_n^r peut être engendrée par des adjointes et l'on en conclut ce théorème fondamental que *si une série g_n^r est incomplète, il y a une seule série complète $g_n^{r'}$ qui la contient totale-*

ment, ce qui permet de définir d'une façon précise le défaut $r' - r$ de la série g_n^r; cette notion de défaut convenablement généralisée pour les courbes et surfaces jouera un rôle essentiel dans les chapitres suivants.

De ces définitions et propriétés sont tirées alors de nombreuses conséquences relatives à l'addition, au degré et à la dimension des séries complètes et, en particulier, des séries spéciales engendrées par les adjointes d'ordre $n - 3$ et de la série canonique engendrée par toutes ces adjointes, ce qui permet de retrouver sous une forme entièrement géométrique le théorème de Riemann-Roch ainsi que la loi de réciprocité de Brill et Noether.

Les auteurs rattachent ensuite à cette notion de série linéaire complète celle de *courbe normale,* puis celle de série linéaire sur une courbe gauche, et en font l'application à la recherche du nombre des conditions exprimant qu'une surface de degré donné passe par une courbe gauche donnée, question qu'ils avaient déjà traitée dans le premier volume en suivant une voie toute différente.

Chapitre III. — *Des systèmes linéaires de courbes dans un plan.*

Ce chapitre est consacré à l'étude des systèmes linéaires formés par les courbes d'ordre n passant par certains *points bases* et s'y comportant d'une façon déterminée. Si l'on prend toutes ces courbes, le système est complet, sinon il est incomplet.

Soit k_n le nombre des conditions exprimant qu'une courbe d'ordre n se comporte de la façon indiquée aux points bases; on montre que k_n a une limite supérieure k et qu'à partir d'une certaine valeur de n on a forcément $k_n = k$; le système complet défini précédemment sera dit *régulier* si n est assez grand pour avoir $k_n = k$; dans le cas contraire, ce système sera dit *irrégulier.* Les systèmes réguliers possèdent cette propriété remarquable que, entre leur dimension r, leur degré D et le genre II de la courbe générale, existe la relation

$$\Pi + r = D + 1.$$

Ayant ensuite défini la *série caractéristique* et le *système adjoint* d'un système linéaire donné et enfin la *somme de deux*

systèmes linéaires de courbes, les auteurs démontrent cette importante propriété : *tout système algébrique de courbes planes indécomposables tel que par k points arbitraires du plan passe toujours une courbe, et une seule, de ce système est un système linéaire*. Ils terminent le chapitre en étudiant les systèmes linéaires de courbes unicursales, en déterminant les surfaces dont toutes les sections planes sont unicursales, puis en définissant les *involutions sur une courbe algébrique* et montrant que toute involution simple s'obtient par l'intersection de cette courbe avec un système linéaire de courbes.

Chapitre IV. — *Systèmes linéaires de surfaces, surfaces sous-adjointes et surfaces adjointes.*

C'est à partir de ce moment que les auteurs nous font aborder véritablement les surfaces, les chapitres précédents n'étant en réalité qu'une introduction nécessaire. Les systèmes linéaires de surfaces sont définis par eux comme les systèmes linéaires de courbes, mais au moyen de *lignes bases* et de *points bases*. Ils étudient spécialement le système linéaire de courbes, intersection d'un plan fixe avec le système de surfaces et, revenant sur la définition des surfaces sous-adjointes, montrent leur signification transcendante et prouvent que pour les définir on peut se borner à considérer des plans passant par une droite fixe arbitraire.

A propos des surfaces adjointes définies au point de vue transcendant dans le premier volume, ils montrent qu'on peut les considérer comme des sous-adjointes particulières et que le théorème, du reste, leur est encore applicable. La considération des *défauts* ω_h des séries d'adjointes d'ordre h, défauts qui sont nuls à partir d'une certaine valeur de h, les conduit à l'égalité fondamentale de M. Enriques

$$p_g - p_n = \Sigma\omega_h,$$

et à la démonstration de ce théorème de M. Castelnuovo que, si ω_{m-3} et ω_{m-2} sont nuls, la surface est régulière.

Chapitre V. — *Des systèmes linéaires de courbes sur une surface.*

MM. Picard et Simart avaient déjà introduit la considération de

ces systèmes dans un des chapitres du premier volume, de sorte qu'au début du chapitre actuel ils se bornent à rappeler succinctement ce qu'ils avaient déjà dit à ce moment et passent tout de suite à l'étude des courbes déterminées d'une façon unique par k points arbitraires; une question analogue a été traitée dans le chapitre III à propos des systèmes de courbes planes, ici le résultat n'est plus tout à fait le même, c'est seulement si $k > 1$ qu'on peut affirmer que la série est linéaire.

Les auteurs reprennent ensuite l'étude des systèmes linéaires de courbes sur une surface d'après les idées et la marche du chapitre II, c'est-à-dire en les considérant comme généralisation, avec une dimension de plus, des systèmes linéaires de points sur une courbe plane. Nous retrouvons la génération au moyen des adjointes ou sous-adjointes, les séries complètes ou incomplètes, le théorème montrant que, si une série linéaire est incomplète, il y a une seule série complète la contenant totalement, et enfin les notions d'addition et de soustraction des systèmes complets avec les développements nécessaires pour certains cas particulièrement délicats et l'introduction des notations symboliques de M. Enriques.

Chapitre VI. — *Du système adjoint à un système linéaire de courbes et du genre numérique.*

Les auteurs commencent par définir d'une façon précise le système sous-adjoint et le système adjoint à une série linéaire de courbes et montrent que le défaut de la série linéaire découpée sur la courbe générale d'un système par son système adjoint présente un maximum qui est un invariant de la surface; la démonstration montre d'ailleurs que ce maximum est précisément la somme $\Sigma\omega_h$ qui figure dans la formule fondamentale de M. Enriques et de là résulte que *le genre numérique* p_n *est un invariant*.

Mais la méthode suivie pour démontrer ces propriétés suppose l'existence des adjointes d'ordre $m - 4$ et, par suite, que p_g n'est pas nul; afin de lever cette difficulté et aussi dans le but de montrer au lecteur une manière toute différente de traiter la question, les auteurs exposent tout au long la méthode exclusivement géométrique suivie par M. Enriques et qui ne fait aucune hypothèse sur la grandeur de p_g.

L'étude du cas de $p_g = 0$ les conduit tout naturellement à définir le nouvel invariant de M. Enriques, le *bigenre* P. Supposons, par exemple, que la surface f d'ordre n n'ait qu'une ligne double avec points triples, les surfaces d'ordre $2n - 8$ ne contenant pas f et admettant la courbe double comme ligne double découperont sur f un système de courbes dont la dimension sera représentée par $P - 1$, et P sera le bigenre.

Le chapitre se termine par quelques remarques sur les surfaces réglées, en vue de démontrer que, même pour cette classe très particulière de surfaces à genre géométrique nul, le nombre p_n est encore un invariant.

Chapitre VII. — *Sur les intégrales doubles de seconde espèce.*

Ce chapitre constitué par des recherches toutes récentes de M. Picard nous ramène aux considérations transcendantes. Les intégrales doubles de seconde espèce sont les intégrales de la forme

$$\int\int R(x, y, z)\,dx\,dy,$$

qui deviennent infinies comme

$$\int\int\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

U et V étant des fractions rationnelles en x, y, z et les dérivées étant prises en tenant compte de $f(x, y, z) = 0$.

La réduction de ces intégrales nécessite des calculs un peu longs et conduit au résultat suivant :

Par la soustraction d'une intégrale convenable de la forme

$$\int\int\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

toute intégrale de seconde espèce relative à une surface f à singularités ordinaires (ligne double avec points triples) *se ramène à la forme*

$$\int\int\frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

$P(x, y, z)$ *étant un polynome qui s'annule pour la courbe double.*

C'est de cette réduction que résulte le fait que le degré du polynome P peut toujours être réduit à une valeur maxima ρ, c'est-à-dire que le nombre des intégrales de seconde espèce linéairement indépendantes est fini, et en établissant ensuite que la transformation birationnelle transforme une intégrale de seconde espèce en une nouvelle intégrale de seconde espèce on établit du même coup l'invariance du nombre ρ. Ce dernier chapitre se termine par quelques exemples et l'indication d'une nouvelle manière de définir les intégrales de seconde espèce en faisant intervenir la considération des résidus des intégrales doubles.

E. D.

ENRIQUES (F.). — QUESTIONI RIGUARDANTI LA GEOMETRIA ELEMENTARE TRATTATE DA U. AMALDI, E. BARONI, R. BONOLA, B. CALO, G. CASTELNUOVO, A. CONTI, E. DANIELE, F. ENRIQUES, A. GIACOMINI, A. GUARDUCCI, G. VITALI, raccolte e coordinate da F. Enriques, con 10 Tavole e 40 figure. 1 vol. in-8°, VII-532 p. Bologna, Zanichelli, 1900.

Ce livre a été rédigé par onze collaborateurs; mais ce n'est nullement un recueil artificiel. On y sent une pensée directrice, on y reconnaît le travail de coordination et de composition; chacun des quatorze articles qui le constituent a son intérêt propre, mais un intérêt qui s'augmente de l'intérêt des articles qui l'encadrent.

Les auteurs ont désiré agir sur l'enseignement élémentaire de la Géométrie, enseignement auquel ils attachent avec raison le plus haut prix. Leur but est de mettre les maîtres qui sont chargés de cet enseignement au courant des travaux les plus profonds et les plus récents sur la matière; c'est aux maîtres que s'adresse leur livre; sans doute, il tombera quelquefois entre les mains d'un élève curieux, déjà mûr pour la réflexion philosophique; avec quelle passion celui-ci s'en emparera! Il n'en saisira pas toutes les parties; n'importe! Je ne serais pas étonné si le trouble et l'émerveillement qu'il ne manquera pas de ressentir en le lisant décidaient de sa carrière et en faisaient un géomètre.

Aux renseignements scientifiques, les auteurs ont joint quelques conseils pédagogiques très judicieux. Ils ont raison de vouloir que les maîtres réfléchissent au fond des choses; ils ont raison en leur conseillant de rejeter de leur enseignement des subtilités qui fatigueraient leurs élèves sans profit, de ne pas entraîner ceux-ci trop tôt dans l'épouvante de ces profondeurs où est descendue la pensée géométrique. Au reste, les auteurs sont des classiques, comme il sied à des Latins; ils ont gardé le culte d'Euclide : ils aiment la clarté et la beauté, mais ils n'en séparent pas la rigueur, ne craignent pas les choses subtiles et veulent aller au fond de leur propre pensée; en quoi il n'est pas sûr qu'ils s'éloignent de l'esprit de cette Grèce, dont M. Enriques parle avec tant d'enthousiasme.

Outre la Préface, où il expose la genèse du livre et paye à ses collaborateurs les remercîments auxquels ils ont assurément droit, M. Enriques a écrit deux articles dont le premier, *Sur l'importance scientifique et didactique des questions qui se rapportent aux principes de la Géométrie,* a un caractère nettement philosophique. Il y admet l'origine empirique des concepts fondamentaux de la Géométrie, origine distincte, d'après les recherches de Helmholtz, Wundt, Klein, suivant que ces concepts se rapportent à la notion de continu, à la Géométrie métrique, à la Géométrie projective; si ces concepts revêtent un caractère apparent de nécessité, c'est que leur construction nous apparaît comme antérieure à tout acte conscient; mais leur origine empirique n'en entraîne pas moins leur contingence. Quoi qu'il en soit, il importe de faire bien explicitement la part des éléments qui doivent être regardés comme primitifs, et par cela même indéfinissables, qui sont la matière même de la Géométrie, puis des postulats ou axiomes, et des raisonnements purement logiques, susceptibles d'être remplacés par des relations purement formelles entre des symboles, relations qui peuvent être interprétées d'une façon ou d'une autre suivant la matière représentée par les symboles.

L'exposition de la Géométrie sera ainsi parfaite si, d'une part, elle est purement symbolique, de manière qu'aucune intuition ne s'introduise subrepticement dans le cours d'une démonstration, si, d'autre part, les concepts primitifs étant posés, tous les autres concepts sont définis logiquement au moyen de ces concepts pri-

mitifs, et si tous les postulats sont absolument indépendants. Mais si un tel mode d'exposition est satisfaisant pour l'esprit, il doit être rejeté au point de vue didactique. D'une part, l'exposition abstraite et formelle, sur de purs symboles, serait extrêmement fatigante; il importe toutefois que le maître, au moins, se rende compte de la possibilité d'une telle exposition; d'autre part la discussion de la dépendance ou de l'indépendance des postulats est évidemment hors de la portée des débutants; il n'y a pas d'inconvénient, pour la rigueur, à multiplier ces postulats, pourvu qu'ils soient parfaitement clairs et qu'on n'en omette aucun : ce qui est mauvais, c'est l'introduction tacite d'un postulat dans le cours d'une démonstration.

M. Ugo Amaldi a écrit un article sur les concepts de droite et de plan. Il rappelle et discute les diverses définitions qui ont été proposées, depuis Euclide, en insistant comme il convenait sur le point de vue de Bolyai et de Lobatschefskij. Il insiste ensuite sur les postulats relatifs aux notions de contenu et de contenant d'une part et, d'autre part, à la succession de points sur une droite (Pasch, Peano, Veronese, etc.). La notion d'angle est l'objet d'une critique analogue.

M. Alfredo Guarducci s'occupe de la congruence et du mouvement. Il note tout d'abord la différence essentielle entre l'égalité géométrique et l'identité logique. Rappelons à ce propos la forte expression de M. Whitehead, dans son *Algèbre universelle* : « Toute équivalence renferme à la fois un truisme et un paradoxe, car elle exprime à la fois que le même est le même, et que le même est l'autre [1]. » Pour en rester à l'égalité géométrique, elle se fonde, d'après Helmholtz, sur le mouvement des corps solides; elle peut être aussi fondée sur un système de postulats : l'auteur discute successivement les systèmes proposés par MM. Pasch, Veronese, Hilbert.

M. Giuseppe Vitali traite de l'application du postulat de la continuité à la Géométrie élémentaire : c'est là que trouvent leur place les questions relatives à la divisibilité d'un segment ou d'un angle, à l'axiome d'Archimède, à la mesure, ..., et, d'un autre côté à l'intersection d'une droite et d'un cercle, ou de deux cercles.

---

(1) COUTURAT, *Revue de Mathématique et de Morale*, 1900.

Un second article de M. Amaldi est consacré à la théorie de l'équivalence, en particulier à l'équivalence des polygones. Après avoir rappelé la façon dont le sujet a été traité par Euclide, Legendre, Bolyai, Lobatchefskij, Duhamel, Faifofer, il insiste sur le postulat de de Zolt : Si l'on divise un polygone en parties, d'une façon quelconque, si l'on supprime quelqu'une de ces parties, il est impossible de disposer les autres de manière à recouvrir le polygone », puis sur les démonstrations données par MM. Schur, Rausenberger, Gérard, Veronese. Il traite ensuite des surfaces courbes, puis des polyèdres, pour lesquels il reprend le postulat de de Zolt qu'il établit pour le tétraèdre. Au point de vue didactique, M. Amaldi conseille d'admettre purement et simplement ce postulat.

M. Roberto Bonola a consacré un important article (p. 142-222) à la théorie des parallèles et aux Géométries non-euclidiennes. Les recherches sur le postulatum d'Euclide sont signalées d'abord dans l'ordre historique (Procolo, Nasir Eddin, Hoffmann, Riccardi, Clavius, Borelli, Giordano da Bitonto, Wallis, Saccheri, Kügel, Koestner, Lambert, Legendre). Les recherches des deux derniers et celles de Saccheri sont particulièrement importantes : c'est à MM. Stäckel et Engel qu'on doit la publication des importants travaux de Lambert. Avec Gauss, dont le rôle est bien connu, avec Schweikart et Taurinus, qu'ont fait encore connaître MM. Engel et Stäckel, se termine la période préparatoire; M. Bonola étudie ensuite l'œuvre de Lobatchefskij et de Bolyai, les recherches de Beltrami et de Minding sur la pseudo-sphère, le point de vue de Riemann, les résultats dus à Helmholtz, à Sophus Lie, les relations (Cayley, Laguerre, Klein) entre la Géométrie projective et les Géométries non-euclidiennes. Après avoir insisté sur l'impossibilité de démontrer le postulatum d'Euclide, il résume les postulats et théorèmes fondamentaux jusqu'au point où les Géométries divergent, pour donner ensuite une rapide esquisse des trois rameaux qui sont logiquement possibles.

Les sept précédents articles constituent dans le livre de M. Enriques une première Partie, d'un caractère général et philosophique; les articles qui forment la seconde Partie se rapportent à la résolution des problèmes géométriques. Tout d'abord, M. Ettore Baroni a fort bien résumé, dans quelques pages, les obser-

vations et méthodes essentielles pour la recherche des lieux géométriques et la résolution des problèmes élémentaires. Il est d'ailleurs impossible de rien écrire sur ce sujet sans avoir devant la pensée le livre classique de M. Petersen.

M. Ermengildo Daniele s'est occupé de la Géométrie du compas; l'auteur, après avoir développé la solution des problèmes fondamentaux par la méthode de Mascheroni, montre, d'après M. Adler, comment la théorie de l'inversion permet de résoudre tous les problèmes euclidiens au moyen du seul compas. Signalons aussi la résolution approchée de quelques problèmes célèbres (rectification de la circonférence du cercle, duplication du cube).

M. Amedeo Giacomini a écrit un intéressant article sur la résolution des problèmes du premier et du second degré, au moyen de la règle, du compas, de la règle à deux bords parallèles, de l'équerre et de la fausse équerre, employés seuls ou simultanément.

M. Guido Castelnuovo reprend les mêmes questions, mais au point de vue analytique : Quelles sont les expressions que l'on peut construire au moyen d'instruments donnés? Le sujet est très intéressant par lui-même; il est traité avec une grande clarté, d'une façon aussi élémentaire que possible. Plus d'un lecteur, si je ne me trompe, en lisant l'article de M. Castelnuovo, sera heureux de voir se préciser ses idées sur plusieurs points fondamentaux. L'auteur s'occupe d'abord des problèmes qui peuvent être résolus au moyen de la règle seule, suivant qu'on se donne deux parallèles, un parallélogramme, un carré, puis, se plaçant au point de vue de la Géométrie projective, montre comment, étant donnés quatre points dont trois peuvent être pris pour les sommets d'un triangle de référence et le quatrième pour le point dont les coordonnées sont égales à l'unité, on peut construire, au moyen de la règle seule, les points dont les coordonnées sont des fonctions rationnelles à coefficients rationnels des coordonnées de points donnés et ceux-là seulement. La démonstration fait bien ressortir la nécessité, pour la solution des problèmes comportant des notions métriques (parallélismes, valeurs de segments, angles, aires, ...) de points ou de droites comportant des relations métriques *préétablies*. M. Castelnuovo étudie ensuite les problèmes qui peuvent être résolus au moyen de la règle et du

compas, de la règle et du transporteur de segments, de la règle et d'un cercle fixe, de la règle à deux bords parallèles.

Le second article de M. Enriques est relatif aux équations algébriques résolubles au moyen d'une suite d'équations du second degré et à la construction des polygones réguliers. Pour la première question, il reprend, comme avait déjà fait M. Klein, dans ses *Ausgewählte Fragen der Elementargeometrie,* la méthode de M. Petersen. Le problème des polygones réguliers est repris à partir des éléments et la méthode de Gauss est exposée d'une façon aussi simple que claire.

M. Daniele a donné un second article sur la construction du polygone régulier de dix-sept côtés; après avoir expliqué la résolution analytique du problème, il développe successivement la construction de Standt, qu'avait déjà rappelée M. Klein dans le livre qu'on vient de citer, construction où l'on ne se sert que d'un seul cercle, puis celle de J.-A. Serret, perfectionnée par M. Bachmann, enfin la construction par laquelle M. Gérard, répondant à un desideratum exprimé par M. Klein, résout le même problème, en se servant seulement du compas.

M. Alberto Conti s'est occupé des problèmes du troisième degré : duplication du cube et trisection de l'angle : il établit l'impossibilité d'une solution au moyen de la règle et du compas et développe successivement les méthodes géométriques, fondées sur l'emploi de diverses courbes, les méthodes mécaniques, enfin les solutions approchées. Il termine en montrant comment les problèmes du troisième degré se résolvent au moyen d'une parabole fixe et se ramènent à la trisection de l'angle. L'intérêt propre de ce sujet se double ici de l'intérêt historique.

Enfin, M. Benedetto Calò traite des problèmes transcendants, en particulier de la quadrature du cercle. Après avoir fixé le sens des mots *nombre algébrique, nombre transcendant* et montré l'existence de nombres transcendants, il établit le théorème de Lindemann, en suivant la méthode de Weierstrass ; il décrit ensuite l'intégrateur d'Abdank-Abakanowicz, perfectionné par M. Corradi, donne une construction géométrique approchée de la longueur de la circonférence du cercle, dit quelques mots des lunules quarrables, et termine par un résumé historique des recherches sur la quadrature du cercle. On voit que les matériaux rassemblés

par M. Enriques sont aussi riches qu'intéressants, au point de vue scientifique, philosophique, historique et pédagogique. Son livre exercera certainement une excellente influence sur l'étude et l'enseignement de la Géométrie, influence qui, il faut l'espérer, ne sera pas bornée à l'Italie.

J. T.

MULLER (Félix). — Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français, contenant les termes techniques employés dans les Mathématiques pures et appliquées. Mathematisches Vokabularium französisch-deutsch und deutsch-französisch enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematick. Erste Hälfte. Leipzig, Teubner, 1900, Paris, Gauthier-Villars, 1 vol. in-8°, 132 p.

Voici un Ouvrage dont l'utilité ne sera pas méconnue par les hommes de métier. L'auteur, qui le dédie au futur Congrès international des Mathématiciens, peut être assuré qu'une fois terminé il rendra de réels services. Pour le moment, M. Müller nous en donne seulement la première partie, le Dictionnaire français-allemand. C'est malheureusement celle des deux que des Français peuvent le moins juger. Il faut du temps pour apprécier le mérite de tels travaux. Nous devons dire cependant que nous avons déjà commencé à utiliser le Dictionnaire de M. F. Müller, et notre expérience personnelle lui a été entièrement favorable. Le nom et les travaux antérieurs de l'auteur nous donnaient à ce sujet la meilleure des garanties.

TAIT (P.-G.). — Scientific Papers, vol. II. Cambridge University Press, 1900, 1 vol. in-4°, XIV-500 p.

L'année dernière, nous avons signalé l'apparition du premier Volume de cette importante Collection des Mémoires de M. Tait. Le second Volume, que nous avons le plaisir d'annoncer après

un si court intervalle, a été composé d'après les mêmes règles et sur le même plan que le premier. Il comprend une série d'articles et de notes s'étendant sur un espace de vingt années, depuis 1878 jusqu'à 1898. L'auteur y rapproche tous les Mémoires sur le même sujet, en négligeant quelquefois ceux qui sont venus les premiers et feraient double emploi avec des Mémoires plus complets et plus récents. Nous signalerons en particulier une série de travaux sur la théorie cinétique des gaz.

Au reste, le troisième Volume, qui couronnera cette importante Collection, contiendra un Index général et une liste complète des Mémoires de l'auteur, comprenant même ceux qui n'auront pas été reproduits dans la présente édition.

MÉLANGES.

SUR LE THÉORÈME DE FERMAT;

PAR M. J. PEROTT.

Le nombre p étant un premier impair, en inscrivant dans chacune des p cases rangées en ligne droite un des nombres

$$1, 2, 3, \ldots, a,$$

où

$$0 < a < p,$$

on obtiendra une certaine *configuration*, et en le faisant de toutes les manières possibles, on aura en tout a^p configurations. Ce problème est d'ailleurs exemplifié par des cadenas bien connus.

Or, si l'on excepte les a configurations où un des nombres

$$1, 2, 3, \ldots, a$$

figure dans toutes les cases, toutes les autres configurations peuvent être distribuées en un certain nombre h d'assemblages,

de sorte que toutes les p configurations d'un assemblage se réduisent à des permutations circulaires d'une d'entre elles [1]. On aura donc

$$a + hp = a^p$$

et, par suite,

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

ou, en divisant par a,

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

JOSEPH PEROTT.

Université Clark, Worcester (Massachusetts), États-Unis d'Amérique.

---

(1) G. GAUSS, *Disquisitiones arithmeticæ*, art. 41.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LAURENT (H.). — L'Élimination. — Un vol. de la collection *Scientia;* n° 7 de la série *Phys. Mathématique;* 75 p. in-8; Paris, Carré et Naud; 1900.

La jolie collection *Scientia* vient de s'enrichir d'un nouveau volume sur l'élimination, dû à M. Laurent. Dans deux Chapitres succincts, mais contenant beaucoup de faits, l'auteur traite successivement de l'élimination d'une inconnue entre deux équations, puis de l'élimination en général.

La théorie de l'élimination d'une inconnue est développée en partant de la théorie des fonctions symétriques, dont M. Laurent rappelle d'abord les propositions fondamentales. La méthode de Bézout-Cauchy, en particulier, est exposée à ce point de vue d'une manière fort intéressante, qui ouvre un jour sur les relations qu'elle présente avec le théorème de Sturm et les recherches de M. Hermite sur ce théorème. Dans le cas général, c'est à la méthode de Bézout que l'auteur s'attache. Il développe aussi l'important théorème de Jacobi sur la somme des valeurs que prend une fonction rationnelle de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dont le dénominateur est le déterminant fonctionnel de n polynomes f_1, $f_2, \ldots, f_n$ en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, supposés respectivement des degrés $m_1, m_2, \ldots, m_n$, quand on y remplace les variables par les $\mu = m_1 m_2 \ldots m_n$ solutions

$$\alpha_{1j},\quad \alpha_{2j},\quad \ldots,\quad \alpha_{nj}\quad (j = 1, 2, \ldots, \mu),$$

supposées distinctes, des équations

$$f_1 = 0,\qquad f_2 = 0,\qquad \ldots,\qquad f_n = 0.$$

A ce théorème se rattachent directement diverses propositions concernant d'autres fonctions symétriques de ces solutions, en particulier l'élégante formule qui exprime le produit des μ valeurs D_j que prend le déterminant fonctionnel quand on y remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{nj}$, sous forme du carré d'un déterminant. A ce même théorème de Jacobi se rattachent encore les intéressantes propriétés des fonctions que M. Laurent

nomme *interpolaires* et qui sont définies par l'égalité

$$\xi_j = \frac{1}{D_j} \begin{vmatrix} f^j_{11} & f^j_{12} & \dots & f^j_{1n} \\ f^j_{21} & f^j_{22} & \dots & f^j_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^j_{n1} & f^j_{n2} & \dots & f^j_{nn} \end{vmatrix}$$

où D_j a la signification que l'on vient de dire et où les f^j_{rs} sont des polynomes tels que l'on ait identiquement, en $x_1, x_2, \dots, x_n$,

$$f_r = (x_1 - \alpha_{1j}) f^j_{r1} + (x_2 - \alpha_{2j}) f^j_{r2} + \dots + (x_n - \alpha_{nj}) f^j_{rn}$$
$$(r = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, \mu).$$

Ces fonctions, dans un cas très particulier, lui permettront un peu plus loin d'esquisser une méthode pour reconnaître si un polynome à plusieurs variables est décomposable en un produit de deux facteurs.

Signalons encore les remarques sur la méthode de Labatie, la façon élégante dont est traitée l'élimination des variables x_1, $x_2, \dots, x_n$ entre des équations de la forme

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = \dots = \frac{f_n}{g_n},$$

$$X_1 g_1 + X_2 g_2 + \dots + X_n g_n = 0,$$

où f_i et g_i sont les demi-dérivées partielles par rapport à x_i, de deux formes quadratiques données en $x_1, x_2, \dots, x_n$, puis l'étude des équations en s

$$|f_{ij} + s g_{ij}| = 0 \qquad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

l'indication de la méthode de Liouville pour le développement en série des solutions de deux équations, l'application de cette méthode à l'élimination entre trois équations, enfin la forme sous laquelle l'auteur obtient la condition pour que deux équations transcendantes aient une solution commune dans une aire donnée.

Dans un livre aussi court que doivent l'être ceux de la collection *Scientia*, il est nécessaire de se limiter; M. Laurent n'a pu mettre autant de choses dans celui qu'il vient de publier qu'en condensant le style et en sacrifiant les détails, et l'on aurait mauvaise grâce à lui reprocher ce dont il n'a point parlé. Il semble cependant que, à propos de la résolution de deux équations à

deux inconnues

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0,$$

il eût été utile de dire un mot du parti que l'on peut, tant pour établir le théorème sur le nombre de solutions que pour préciser le degré de multiplicité d'une solution, tirer d'une substitution de la forme $y = ux + v$, ou, si l'on veut, de la considération des équations tangentielles des points qui correspondent aux solutions, d'autant que cette méthode se généralise et a une grande portée; la façon dont il est question des solutions multiples risque de laisser dans l'esprit du lecteur inexpérimenté une idée peu exacte.

Il était impossible d'entrer dans les détails que comporte une exposition rigoureuse de l'élimination de plusieurs inconnues entre plusieurs équations et l'auteur a eu grandement raison de vouloir traiter ce sujet d'une façon large; il a eu d'ailleurs le soin de signaler à l'occasion les suppositions que l'on est amené à introduire dans les démonstrations; mais le lecteur aurait quelquefois besoin d'être averti pour savoir si ces suppositions ont ou n'ont pas de répercussion sur la vérité des théorèmes eux-mêmes.

Ces légères critiques ne sont pas pour diminuer la valeur des services que ne manquera pas de rendre le petit livre de M. Laurent : il traite d'un sujet qui est de première importance; le lecteur y trouvera des démonstrations élégantes et des vues nouvelles; si la brièveté de l'exposition l'oblige parfois à réfléchir, tout est pour le mieux.

J. T.

J. FITZ-PATRICK ET GEORGES CHEVREL. — EXERCICES D'ARITHMÉTIQUE, ÉNONCÉS ET SOLUTIONS; avec une préface de M. J. Tannery. Deuxième édition considérablement augmentée et suivie d'exercices proposés, de notions et exercices d'Arithmétique commerciale. Paris, Hermann, 1900.

C'est avec un vif plaisir que nous enregistrons le succès du livre de MM. Fitz-Patrick et Chevrel, d'abord parce qu'il était légitimement dû aux auteurs, et aussi parce qu'il nous prouve que le goût de l'Arithmétique n'est pas encore perdu chez nous.

Cette seconde édition se distingue de la première par des addi-

tions considérables sur lesquelles, seules, nous dirons ici quelques mots [1]. Ces additions comportent d'abord une partie théorique divisée en six Chapitres et qui constitue un précis très clair d'Arithmétique commerciale. Les règles pratiques que l'on observe réellement pour le calcul des intérêts et la résolution des problèmes d'escompte y sont exposées en détail; le dernier Chapitre en particulier est consacré à l'explication des opérations de bourse et de banque et à la résolution des problèmes réels que l'on peut se proposer à ce sujet.

Ces divers Chapitres sont accompagnés chacun de nombreux énoncés d'exercices non résolus, nouveaux ou empruntés aux examens des Écoles de commerce, des Écoles professionnelles, de l'Enseignement primaire, etc.

En même temps, et c'est ce qui achève de distinguer cette seconde édition de la première, les auteurs ont ajouté à leur œuvre primitive un nombre très considérable d'exercices sans solutions, classés par Chapitres eux-mêmes, comme les exercices du texte.

C'est là une très heureuse addition, puisque, maintenant, l'élève ou le lecteur studieux trouvera dans ces exercices un aliment nouveau pour sa curiosité, et, grâce aux efforts qu'il devra s'imposer pour arriver à leur solution, pourra s'assimiler d'une façon parfaite les théories de l'Arithmétique et acquérir la souplesse d'esprit nécessaire pour leur application.

H. A.

STURM (R.). — ELEMENTE DER DARSTELLENDE GEOMETRIE. Zweite umgearbeitete und erweiterte Aufgabe. — Un vol. in-8°, IV-157 p., 7 pl. Leipzig, Teubner, 1900.

L'enseignement de la Géométrie descriptive à l'étranger est souvent très différent de ce qu'il est en France; il n'est parfois que le prétexte à l'enseignement de la Géométrie pure, et le mode

(1) Pour le compte rendu de la 1re édition, voir *Bulletin*, t. XVII (2e série), p. 251.

de représentation dû à Monge ne figure plus guère que comme un souvenir historique, que l'on conserve avec quelque piété, parce qu'il a été l'origine de très beaux développements théoriques, mais aussi avec un peu de dédain, parce qu'il est très particulier. Chez nous il a été, pendant longtemps, un peu trop exclusivement enseigné; mais l'habitude se répand de plus en plus, tout en lui laissant une place prépondérante, de l'éclairer par quelques idées générales, et, quand le sujet les y invite, les professeurs ne craignent plus, tout en enseignant la Géométrie descriptive, de faire quelques excursions du côté de la Géométrie pure. Le rôle prépondérant du mode de représentation que l'on doit à Monge est évidemment justifié par son caractère pratique. Les règlements récemment édictés en Prusse, pour les examens qui donnent accès aux fonctions de professeur, rangent la Géométrie descriptive dans les Mathématiques appliquées, avec la Mécanique technique et la Géodésie : c'est donc la Géométrie descriptive pratique que les candidats doivent étudier et c'est dans ce sens qu'est effectivement rédigé le Traité élémentaire que vient de publier M. R. Sturm, bien connu par ses beaux travaux de Géométrie synthétique. Ce Traité n'est d'ailleurs que la réédition d'un livre que l'auteur avait publié, alors qu'il enseignait à l'École technique de Darmstadt, et qui était naturellement dirigé dans le même sens. Aussi son livre ressemble-t-il beaucoup plus aux Traités français que la plupart des livres étrangers sur le même sujet. Il traite à peu près des matières que l'on enseigne chez nous dans les classes de Mathématiques élémentaires supérieures. Le seul chapitre qui sorte du cadre de notre enseignement est celui qui se rapporte à l'Axonométrie : signalons à ce propos l'élégante démonstration du théorème de Pohlke qui le termine. L'exposition est claire, sobre et condensée. Il n'y a guère d'autres digressions du côté de la Géométrie pure que celles qui concernent l'homologie et l'affinité; mais celles-là sont en quelque sorte inévitables et aucun lecteur ne les regrettera. J. T.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. IIe. Band, 2e und 3e Heft. Ausgegeben am 10 April 1900, in-8°, p. 161-399, Leipzig, Teubner, 1900.

Le fascicule de l'Encyclopédie des Sciences Mathématiques dont nous annonçons ici la publication contient la suite de l'article de M. Brunel et des articles de MM. Painlevé, Vessiot, von Weber; nous reproduisons ci-dessous les titres de divers paragraphes :

BRUNEL (Intégrales définies).

Développement en série de $\log \Gamma$. — La fonction $\Psi(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$. — Calcul approché de $\Gamma(a)$ pour de grandes valeurs de l'argument. — La fonction

$$\varpi(a) = \log \Gamma(a) - \left(a - \frac{1}{2}\right) \log a + a - \frac{1}{2} \log(2\pi).$$

— Calcul de la fonction Γ. — La constante d'Euler. — Logarithme intégral. — Fonctions B. — Autres intégrales qui se ramènent à la fonction Γ. — Application des intégrales définies à la théorie des séries. — Nombres de Bernoulli. — Intégrales déterminées particulières. — Sommes de Gauss.

P. PAINLEVÉ (Équations différentielles ordinaires; existence des intégrales).

Définitions et problèmes fondamentaux. — État de la théorie avant Cauchy.

Méthode de Cauchy-Lipschitz.

Principe de la méthode. — Généralisation par Lipschitz. — Détermination précise de l'intervalle de convergence. — Intégrale

première d'un système différentiel. — Application de la méthode au domaine des nombres complexes. — Cas de quotients différentiels qui ne vérifient pas les conditions de Lipschitz.

Méthode des approximations successives.

Principes et résultats de la méthode. — Corollaires.

Méthode du Calcul des limites.

Principes et résultats de cette méthode. — Développement de la méthode. — Détermination univoque des intégrales par les conditions initiales. — Extension du domaine de convergence de la méthode. — Méthode de la variation des constantes. — Recherche des intégrales premières.

Conditions initiales singulières non exceptionnelles.

Valeurs initiales pour lesquelles quelques-unes des fonctions f_i sont méromorphes et infinies. — Valeurs initiales qui sont pour quelques-unes des fonctions f_i des valeurs de ramification algébrique. — Systèmes différentiels algébriques. — Application aux équations du premier ordre. — Équations algébriques du premier ordre. — Comparaison avec la théorie des enveloppes. Historique. — Extension aux équations différentielles d'ordre quelconque.

Conditions initiales exceptionnelles, pour les équations du premier ordre.

Recherches de Briot et Bouquet sur l'équation

$$xy' = ax + by + \ldots \equiv \varphi(x, y). \qquad b \neq 0.$$

— Cas général, dans lequel y est méromorphe et de la forme pour 100. — Recherches de Picard. — Méthode de Poincaré. Compléments. — Application au domaine des nombres réels. — Recherches de Bendixson et Horn.

Conditions initiales exceptionnelles pour des systèmes différentiels quelconques.

Théorème général de Poincaré. — Compléments. — Détermination de classes particulières d'intégrales dans les cas d'exception. — Cas général des coefficients différentiels méromorphes. — Application au domaine des nombres réels. Solutions asymptotiques réelles.

VESSIOT (Équations différentielles ordinaires; méthodes élémentaires d'intégration).

Problèmes fondamentaux. Définitions. — Coup d'œil historique. — Théories formelles d'intégration. — Introduction de nouvelles variables. — Problèmes d'équivalence. — Théories rationnelles d'intégration.

Équations du premier ordre.

Méthode de la séparation des variables. — Méthode du multiplicateur d'Euler. — Méthode de Lie. — Discussion. Comparaison des transcendantes. Intégration algébrique. — Équations de Jacobi et de Riccati. — Équations non résolues; intégration par différentiation. — Interprétations géométriques. Usage des coordonnées homogènes.

Systèmes d'équations du premier ordre; Théories générales.

Systèmes de multiplicateurs. — Multiplicateur de Jacobi. — Méthode de Lie; intégration de systèmes avec un groupe connu de transformations. — Intégration de systèmes dont on connaît les invariants différentiels et intégraux. — Systèmes de variations.

Théories spéciales pour les équations du $n^{ième}$ ordre.

Méthode du multiplicateur d'Euler. — Cas de l'abaissement du degré. — Théorie de Lie. Équations qui admettent des groupes de transformations ponctuelles. Généralisations. — Équations non résolues. Types d'équations intégrables.

Classes spéciales d'équations et de systèmes d'équations.

L'équation linéaire du $n^{ième}$ ordre. — Concepts généraux; système fondamental de solutions. — Équations à coefficients constants. Équations de Lagrange. Méthode de d'Alembert. — Équations à second membre. Méthode de la variation des constantes. — Abaissement de l'ordre de l'équation. — Solutions communes à deux équations. — Équations avec un système fondamental donné. Méthodes symboliques. — Fonctions différentielles rationnelles des solutions d'un système fondamental. Fonctions invariantes. Transformation. — Équations associées. Équations adjointes. — Équations du second ordre. Systèmes linéaires. — Extension des théories précédentes aux systèmes d'équations linéaires. — Systèmes de Lie et généralisations. Différentes définitions des systèmes de Lie. Théorie de leur intégration. — Systèmes les plus généraux à solutions fondamentales. Équations d'ordre supérieur avec des systèmes fondamentaux d'intégrales premières. Généralisation des systèmes de Lie. — Systèmes d'équations aux dérivées partielles à solutions fondamentales. — Classes diverses d'équations.

Problèmes d'équivalence.

Position du problème. Introduction des invariants différentiels. Méthodes générales. — Invariants des équations linéaires. — Invariants de différentes classes d'équations.

Théories rationnelles d'intégration.

Domaine de rationalité. — Irréductibilité. — Théorie ration-

nelle de l'intégration des équations linéaires. — Extension de la théorie aux systèmes de Lie. Théorie de J. Drach pour des systèmes quelconques d'équations du premier ordre.

VON WEBER (Équations aux dérivées partielles).

Propriétés générales des systèmes différentiels.

Existence des solutions; systèmes passifs. — Systèmes de Mayer. — L'intégrale générale. — Intégrales particulières. — Intégrales singulières. — Intégrales intermédiaires. — Intégrales complètes. — Formes diverses d'un système différentiel général. — Généralisation de Lie du concept d'intégrale. Transformations des systèmes différentiels.

Les équations aux dérivées partielles du premier ordre à une inconnue.

L'équation aux dérivées partielles du premier ordre. — Le multiplicateur de Jacobi. — Systèmes complets. — Système d'équations aux différentielles totales. — Méthodes d'intégration de Jacobi. — Les intégrales principales. — La transformation de Lie-Mayer.

Le problème de Pfaff.

Historique. Méthode de réduction de Pfaff. — Méthode de Grassmann; le théorème fondamental. — Les équivalents intégraux; la forme normale la plus générale. — Transformations d'une expression de Pfaff. — Méthodes de réduction de Clebsch et de Lie. — Méthode de Frobenius. — La théorie des transformations de contact comme cas spécial de la théorie du problème de Pfaff. — L'identité de Jacobi et de Mayer. — Généralisation de la théorie de Frobenius. — Relations entre les expressions de Pfaff et les transformations infinitésimales.

Les équations aux dérivées partielles du premier ordre à une inconnue non linéaires.

Méthodes de Lagrange et de Pfaff. — Méthode de Cauchy. — Première méthode de Jacobi. La théorie de Hamilton-Jacobi. — Variation des constantes; les courbes caractéristiques. — Intégrales singulières. — Les bandes caractéristiques; représentation et classification des équations aux dérivées partielles du premier ordre. — Coordonnées homogènes d'un élément. — Seconde méthode de Jacobi. — Systèmes en involution. — Groupes de fonctions. — La théorie de Bäcklund.

Équations différentielles d'ordre supérieur.

Systèmes différentiels avec deux variables indépendantes. — Classification des équations aux dérivées partielles du second ordre d'après leurs caractéristiques du premier ordre. — Intégrales premières d'une équation différentielle du second ordre. — Les caractéristiques d'ordre supérieur d'une équation aux dérivées partielles du second ordre. — Les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles du $n^{\text{ième}}$ ordre. — Relations entre deux équations aux dérivées partielles du second ordre. — Systèmes de Darboux; systèmes en involution. — Les théories d'intégration de Darboux-Lévy et leurs généralisations. — Systèmes différentiels du premier ordre avec plusieurs inconnues. — La méthode de Laplace et ses généralisations. — Application du concept de groupe aux équations différentielles. — Systèmes différentiels avec m variables indépendantes. — Les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles du $n^{\text{ième}}$ ordre. — Systèmes en involution avec une inconnue. — La généralisation de la théorie de Monge-Ampère. — Systèmes différentiels linéaires du premier ordre avec n inconnues. — Systèmes différentiels non linéaires avec n inconnues; systèmes normaux. — Systèmes d'équations de Pfaff (1).

(1) Nous venons de recevoir également le 5e fascicule du tome I. Il ne manquera plus qu'un fascicule pour terminer le tome I.

Memoirs presented to the Cambridge Philosophical Society on the occasion of the jubilee of sir George Gabriel Stokes, Bart, Hon. LL. D., Hon Sc. D. Lucasian Professor. Cambridge University Press, 1900, 1 vol. in-4° xxviii-447 p. avec 25 pl.

Le Volume que nous présentons aujourd'hui à nos lecteurs doit être considéré comme étant le XVIIIe des Transactions de la Société Philosophique de Cambridge (*Cambridge Philosophical Society*). Il est publié en l'honneur de Sir George Stokes et contient en premier lieu le compte rendu des belles cérémonies par lesquelles l'Université de Cambridge a célébré, l'année dernière, le cinquantième anniversaire de la nomination de cet illustre savant dans la chaire Lucasienne, occupée par Newton. L'appel que l'Université de Cambridge avait adressé à tous les corps savants du monde entier avait partout reçu le meilleur accueil. D'Angleterre, d'Amérique, d'Allemagne, d'Italie, de France et de beaucoup d'autres pays étaient accourus de nombreux savants désireux de s'associer à l'hommage que l'Université de Cambridge rendait à la carrière si belle, si homogène et si bien remplie de Sir G.-G. Stokes. Le Volume contient d'abord par ordre chronologique la liste des Universités, Académies, Collèges et Sociétés qui se sont fait représenter; il contient aussi le compte rendu de la séance dans laquelle des diplômes de docteur ès sciences *honoris causa* ont été conférés à quelques uns des délégués présents : MM. Cornu, Darboux, Michelson, Mittag-Leffler, Quincke, Voigt. Ce compte rendu est suivi du bel article sur la théorie des ondes lumineuses et son influence sur la Physique moderne qu'a lu M. Cornu, chargé cette année de la *Rede Lecture*. C'est avec cet article que se termine le compte rendu proprement dit des fêtes du Jubilé.

Le reste du Volume contient une série de Mémoires présentés par quelques-uns des délégués présents à la Société philosophique de Cambridge. Ce sont les suivants :

I. On the analytical representation of a uniform branch of a monogenic function, par M. Mittag-Leffler, p. 1-11.

II. Application of the Partition analysis to the study of the properties

Influence of a Magnetic Field on Optical Phenomena, by J. Larmor, 380-407.

XXII. On the theory of Functions of several Complex Variables, by H.-F. Baker, p. 408-444.

On le voit, le Recueil est des plus variés, et l'hommage rendu à Sir G.-G. Stokes lui vient des côtés les plus opposés. Le Volume est d'ailleurs orné d'un très beau portrait du savant auquel il est dédié; il contient également la reproduction de la face et du revers de la médaille qui lui a été offerte à l'occasion de son Jubilé.

MÉLANGES.

NOTE AU SUJET DE L'ARTICLE « SUR UNE RELATION GÉOMÉTRIQUE ENTRE DEUX COURBES »,

Publié, par M. N.-J. HATZIDAKIS, à la page 42 de ce Volume.

L'auteur de l'article nous prie d'insérer la remarque suivante :

« Le théorème exprimé par la formule (5′) et son réciproque sont des cas particuliers d'une proposition qui se trouve dans une Note de M. G. Pirondini *Sur les surfaces réglées,* insérée en 1897-98 dans le t. XIII du *Jornal de Sciencias mathematicas et astronomicas* dirigé par M. F.-G. Teixeira.

En effet M. Pirondini fait tourner les binormales d'une courbe L de l'angle θ, dans les plans normaux, et il démontre ensuite que la condition nécessaire et suffisante pour que la surface (Σ) engendrée par les nouvelles positions des binormales soit la surface gauche des binormales d'une certaine courbe est exprimée par l'équation

$$\frac{1}{k}\frac{\sin\theta}{\rho} = \frac{\sin\theta}{\rho^2} + \left(\frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{r}\right)^2$$

où ρ et r désignent les rayons de courbure et de torsion et k une constante. »

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

OSTWALD'S *Klassiker der exakten Wissenschaften.* N° 92. In-8°. Leipzig, Engelmann. Cart. 2 m. 40 pf.

Contenu : Kant's allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels oder Versuch von der Verfassung und dem mechanischen Ursprunge des ganzen Weltgebäudes nach Newton'schen Grundsätzen abgehandelt. 1755. Herausgegeben von A. I. von Oettingen. Neue Aufl. 158 p.

SCHIMPFF (E.). — *Zur Definition der Konvergenz der unendlichen Reihen und der unendlichen Produkte. — Mehrfache Grenzgleichungen. — Grenzgleichungen period. Reihen.* In-4°, 30 p. Berlin, Mayer et Müller. 1 m.

BACHMANN (P.). — *Zahlentheorie und Versuch einer Gesammtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Haupttheilen.* 4e Thl. a. u. d. T.: *Die Arithmetik der quadrat. Formen.* 1e Abthlg., gr. in-8°, XVI-668 p. Leipzig, Teubner. 18 m.

BOREL (E.). — *Leçons sur la théorie des fonctions.* In-8°, VIII-138 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 50 c.

BOURLET (C.). — *Leçons de Trigonométrie rectiligne.* In-8°, XII-323 p. avec fig. Paris, Colin et Cie.

MURRAY (D.-A.). — *An Elementary Course in the Integral Calculus.* In-12, New-York. 10 sh. 6 d.

OSTWALD'S *Klassiker der exakten Wissenschaften.* N° 93. Leipzig, Engelmann. Relié, 1 m. 20 pf.

Contenu : Leonhard Euler, drei Abhandlungen über Kartenprojection. 1777. Herausgeg. von A. Wangerin, avec 9 fig.

REYE (TH.). — *Lectures on the Geometry of Position.* Traduit par T.-F. Holgate. Part 1. In-8°. London, Macmillan. 10 sh.

RIEMANN (B.). — *Œuvres mathématiques.* Traduit par L. Laugel. In-8, XXXV-453 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 14 fr.

OSTWALD'S *Klassiker der exakten Wissenschaften.* N° 96. Leipzig, Engelmann. Relié, 2 m. 40 pf.

Contenu : Sir Isaac Newton's Optik oder Abhandlung über Spiegelungen,

Brechungen, Beugungen und Farben des Lichtes. (1704.) Herausgegeben von W. Abendroth. 1er volume avec un portrait de Newton et 46 fig.

Budisavljević (E. v.) u. Mikuta (A.). — *Leitfaden für der Unterricht in der höheren Mathematik.* 1e Bd. *Grundzüge der Determinanten-Theorie u. der projectiven Geometrie. Analytische Geometrie.* Gr. in-8°, x-492 p. avec 108 fig. Wien, Braumüller. Relié, 8 m.

Graf (J.-H.) u. Gubler (E.). — *Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen.* (In 2 Heften.) 1e Heft : *Die Bessel'sche Funktion.* 1e Art. Gr. in-8°, vi-142 p. avec fig. Bern, Wyss. 3 m. 20 pf.

Kemmer (G.). — *Ueber die Verwandlung von Projektivitäten in Involutionen u. von Reziprozitäten in Polarsysteme durch Anwendung von Projectivitäten. Dissert.* Gr. in-8°, 24 p. avec 2 planches. Darmstad, Winter'sche Buchdr. 1 m.

Third (J.-A.). — *Modern Geometry of the Point, Straight Line and Circle; an Elementary Treatise.* In-8°, 256 p. London, Blackwood. 3 sh.

Helmhotz (H. v.). — *Vorlesungen üb. theoretische Physik.* Herausgeg. von A. Konig, O. Krigar-Menzel, F. Richarz, C. Runge. Ie Bd, 2e Abthlg. u. IIIe Bd. In-8°. Leipzig, Barth. 27 m.

Contenu : I. 2. Vorlesungen üb. d. Dynamik discreter Massenpunkte. Hrsgeg. von O. Krigar-Menzel. x-380 p. avec 21 fig. 15 m. — III. Vorlesungen über die mathemat. Principien der Akustik. Hrsgeg. v. A. König. x-256 p. avec 21 fig. 12 m.

Breuer (A.). — *Elementar entwickelte Theorie und Praxis der Functionen einer complexen Variabelen in organischer Verbindung mit der Geometrie.* Gr. in-8°, viii-205 p. avec 84 fig. Wien, Daberkow. 5 m.

Drach (J.). — *Essai sur une théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendantes.* In-4°, 150 p. Paris, Gauthier-Villars.

Floquet (G.). — *Sur le mouvement d'un point ou d'un fil glissant sur un plan horizontal fixe lorsqu'on tient compte de la rotation de la Terre et du frottement.* In-8°, 16 p. avec fig. Nancy, impr. Berger-Levrault et Cie.

Goettler (J.). — *Conforme Abbildung eines von confocalen, elliptischen und hyperbolischen Kurven n^{ter} Ordnung begrenzten Flächenstückes auf die Halbebene.* Gr. in-8°, 34 p. avec 3 planches. Passau, Waldbauer'sche Buchh. 1 m.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Papers on mechanical and physical subjects, by *Osborne Reynolds*, F. R. S., Mem. Inst. C. E., L. L. D., Professor of Engineering in the Owens College, and Honorary fellow of Queens' College, Cambridge. Reprinted from various Transactions and Journals. Vol. I, 1869-1882. Cambridge : at the University Press. 1900.

Ce premier Volume contient 40 Notes ou Mémoires publiés de 1869 à 1882 par M. Osborne Reynolds dans divers recueils scientifiques inégalement répandus hors des Iles Britanniques. Quelques extraits de Mémoires publiés intégralement plus tard, six courtes Notes d'intérêt temporaire, et un Mémoire de James Prescott Joule, publié à part (vol. VI, 4e s., *Mem. and Proc. of the Manchester Lit. and Philos. Soc.*) sont seuls exceptés de la présente réimpression.

Parmi les Mémoires qui intéressent le plus les Physiciens et les Mathématiciens, je signalerai le n° 7_{A} : *Destruction du son par le brouillard;* les nos 16 et 22 : *Réfraction du son dans l'atmosphère;* le n° 10 : *Condensation des mélanges d'air et de vapeur sur les surfaces froides;* les nos 11-12 : *Forces superficielles dues à l'évaporation;* le n° 23 : *Forces dues aux échanges de chaleur entre une surface et un gaz;* et surtout le très important Mémoire de 1879 (n° 33) : *On certain dimensional properties of matter in the gaseous state.*

Ce Mémoire est divisé en deux parties. Dans la première Partie, expérimentale, l'auteur étudie l'écoulement (transpiration) des gaz à travers l'écume de mer, par différence de pression et par différence de température, et les radiomètres à vannes très petites. Le rôle du chemin moyen des molécules gazeuses, comparé aux dimensions des trous de l'écume de mer, du plâtre, etc., ou aux dimensions des vannes, est nettement mis en évidence par les variations de la pression d'inversion avec ces dimensions. Au-dessus de cette pression, le gaz se comporte comme à la pression atmosphérique, les courants généraux déterminent les phénomènes; au-dessous, le gaz se comporte comme aux très basses pressions et, pour les inégalités de température, en particulier,

les effets sont de sens opposé. Bien entendu, les deux modes d'action se combinent au voisinage de la pression d'inversion. La seconde Partie, théorique, est fort longue et pénible à lire; intéressante néanmoins. Maxwell a donné les équations générales dont dépend le phénomène, par une méthode à la fois rigoureuse et relativement rapide, mais qui n'appelle peut-être pas avec autant d'insistance l'attention du lecteur sur le rôle de l'allongement du chemin moyen aux basses pressions.

Signalons encore le n° 18 : *Sur le frottement de roulement*, et toute une série de Mémoires sur le fonctionnement des hélices propulsives des navires et les troubles produits par les appels d'air dans l'hélice; enfin diverses Notes de Météorologie physique et de Capillarité.

M. BRILLOUIN.

PASCAL (E.). — REPERTORIO DI MATEMATICHE SUPERIORI (DEFINIZIONI, FORMOLE, TEOREMI, CENNI BIBLIOGRAFICI). II. *Geometria*. Petit in-18°, Milan, Ulrico Hoepli, XVIII-928 p.; 1900.

Nous avons déjà rendu compte dans le *Bulletin* de la première Partie de ce Répertoire, consacrée à l'Analyse supérieure. La Géométrie que nous avons à analyser aujourd'hui est exécutée d'après le plan que nous avons déjà fait connaître et elle se recommande aussi par les qualités que nous avons déjà signalées.

Le point essentiel de notre analyse sera donc l'indication des matières traitées dans ce nouveau Volume du savant professeur de l'Université de Pavie. Il se divise en vingt-deux Chapitres qui embrassent toutes les parties essentielles, toutes les méthodes de la Géométrie. Nous y voyons rappelées en premier lieu toutes les notions fondamentales qui se rattachent à la Géométrie projective et à la Géométrie analytique, les formes algébriques, les coniques et les quadriques, les courbes planes en général, puis les cubiques et les quartiques, les surfaces et les courbes dans l'espace, les surfaces cubiques, du quatrième ordre et de degré supérieur. Un Chapitre est consacré à la Géométrie de la ligne droite dans l'espace et à celle de la sphère. M. Pascal n'oublie pas non plus la

théorie des caractéristiques et les recherches des géomètres sur la Géométrie énumérative. Viennent ensuite les théories infinitésimales qui se rapportent aux courbes et aux surfaces : étude des contacts, des développées et des développantes, des lignes tracées sur les surfaces, de la courbure des surfaces, des systèmes triples orthogonaux et des congruences rectilignes. L'auteur considère les principales générations et transformations métriques, surfaces de révolution, courbes spéciales, etc. Il rappelle les principales propositions relatives à l'*Analysis situs,* à la théorie des polyèdres, à la connexion d'une surface de Riemann, à la Géométrie des hyperspaces, ainsi qu'à la Géométrie non euclidienne.

Le dernier Chapitre contient un résumé des travaux récents relatifs à la Géométrie du triangle et l'Ouvrage se termine par un index alphabétique des matières traitées dans le premier et le second Volume.

La confection d'un pareil résumé a du coûter bien des recherches à son auteur; en revanche, il en épargnera beaucoup à ceux qui en feront usage. C'est le meilleur éloge que l'on puisse en faire.

SERRET (J.-A.). — COURS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL, 5e édition accompagnée d'une Note sur la théorie des fonctions elliptiques par M. Ch. Hermite, t. I, Calcul différentiel, XIII-618 p.; t. II, Calcul intégral, XIII-907 p. 2 vol. in-8°. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Il nous suffira évidemment de signaler cette cinquième édition de l'excellent Ouvrage de notre maître regretté. Nous avons assisté vers 1864 aux premières leçons de Calcul infinitésimal que Serret a données à la Sorbonne; nous nous rappelons l'influence qu'elles ont eue sur l'enseignement et la faveur avec laquelle elles ont été accueillies. Cette faveur n'était pas le résultat d'un engouement passager; le succès qu'ont obtenu les leçons de Serret lorsqu'elles ont été réunies en volumes, les traductions qui en ont été faites à l'étranger, les éditions successives que M. Gauthier-Villars a dû en publier, sont la meilleure preuve

qu'elles répondaient, qu'elles ne cessaient pas de répondre à de réels besoins. La Science s'est enrichie, mais les fondements et les principes demeurent les mêmes. On les trouvera exposés avec clarté et méthode dans le présent Traité.

G. D.

MÉLANGES.

DE L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION $\Delta u = e^u$ SUR UNE SURFACE FERMÉE;

Par M. Émile PICARD.

En exposant l'été dernier dans mon Cours mes recherches sur l'intégration de l'équation $\Delta u = e^u$ sur une surface fermée, j'ai été amené à reprendre mon Mémoire sur ce sujet (*Journal de Math.*, 1893). Il m'a semblé que plusieurs points étaient trop sommairement indiqués, et que le premier lemme fondamental sur lequel je m'appuie pouvait être présenté d'une manière beaucoup plus simple et plus précise; j'ai été aussi conduit à faire diverses remarques qui ne sont pas sans intérêt pour la théorie des équations aux dérivées partielles au point de vue où je me suis placé dans diverses recherches. Ce sont ces leçons que je me propose de résumer ici, en priant le lecteur de bien vouloir se reporter d'abord au Mémoire cité pour l'exposé général du problème et pour ce qui concerne les points sur lesquels je n'avais aucune modification à apporter.

1. Commençons par préciser la nature de certains points singuliers des intégrales de l'équation

$$\Delta u = e^u, \tag{1}$$

qui seront les seuls que nous aurons à considérer dans cette étude.

En désignant par r la distance du point (x, y) à l'origine, et β représentant une constante, posons

$$u = \beta \log r + v.$$

L'équation précédente devient alors

$$(2) \qquad \Delta v = r^\beta . e^v.$$

Il est facile de voir, en procédant par approximations successives, que si

$$\beta > -2$$

il existe des intégrales de l'équation (2) continues autour du point O et *au point* O *lui-même*. On prend à cet effet un contour C suffisamment petit autour de l'origine, et l'on considère les équations successives

$$\Delta v_0 = r^\beta$$
$$\Delta v_1 = r^\beta . e^{v_0}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta v_n = r^\beta . e^{v_{n-1}}$$

tous les v prenant une même succession de valeurs données sur le bord C. On établit sans peine que *dans le cas où* β *est supérieur à* -2, et si le contour est suffisamment petit, la limite de v_n donne une intégrale de (2) prenant les valeurs données sur C et continue même à l'origine.

2. Il est intéressant de rechercher ce que deviennent les dérivées premières $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ à l'origine. On voit de suite qu'elles sont, comme v, continues à l'origine quand β est supérieur à -1, mais il en est autrement si β est compris entre -1 et -2.

Pour le voir, et nous rendre compte de la forme de v et de ses dérivées premières au voisinage de l'origine, prenons d'abord le cas très simple où le contour C serait circulaire et où les valeurs données seraient nulles. Dans ce cas, v ne dépend que de r, et nous avons l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} = r^\beta . e^v$$

qui peut encore s'écrire

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = r^{\beta+1} . e^v$$

et, par suite,

$$r\frac{dv}{dr} = \int_{r_0}^{r} r^{\beta+1} . e^v dr - C \qquad (r_0 = 0).$$

Nous nous plaçons toujours dans l'hypothèse $\beta > -2$; l'intégrale du second membre a alors une valeur finie pour $r = 0$. Par suite, $r\dfrac{dv}{dr}$ tend vers une valeur finie pour $r = 0$. Je dis que cette valeur finie ne peut être que zéro. Soit en effet

$$r\frac{dv}{dr} = \varphi(r).$$

Si $\varphi(0)$ n'est pas nul, on déduit de cette relation

$$v = \varphi(r_1)\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r} + C' \qquad [r < r_1 < r_0]$$

et, par suite, v serait infinie pour $r = 0$. On peut aller plus loin; on a, d'après ce qui précède,

$$r\frac{dv}{dr} = \int_{r_0}^{r} r^{\beta+1}.e^{v}dr - \int_{r_0}^{0} r^{\beta+1}.e^{v}dr = \int_{0}^{r} r^{\beta+1}.e^{v}dr;$$

nous pouvons donc écrire

$$r\frac{dv}{dr} = e^{v'}\frac{r^{\beta+2}}{\beta+2},$$

v' étant la valeur de v pour une valeur comprise entre 0 et r. Nous concluons de là que $\dfrac{dv}{dr}$ *est de la forme*

$$r^{\beta+1}.\mathrm{M},$$

M *restant finie pour* $r = 0$, et enfin v *sera de la forme*

$$v_0 + r^{\beta+2}.\mathrm{M}_1 \qquad (v_0 \text{ étant une constante}),$$

M *restant finie pour* $r = 0$.

Ce que nous venons de trouver pour ce cas particulier est général. Les approximations successives montrent que, pour toutes les solutions trouvées au paragraphe précédent, les dérivées partielles $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ sont autour de l'origine de la forme

$$r^{\beta+1}.\mathrm{M}$$

et v est de la forme

$$v_0 - r^{\beta+2}.\mathrm{M}_1,$$

M et M_1 restant finies pour $r = 0$.

3. Nous venons de considérer le cas d'un point singulier à distance finie. On peut supposer le point singulier à l'infini. Il suffit de faire une inversion en posant

$$x' + iy' = \frac{1}{x - iy}.$$

L'équation

$$\Delta u = e^u$$

devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} = \frac{1}{r'^4} e^u \qquad (r'^2 = x'^2 + y'^2).$$

Au lieu du point à l'infini dans le plan (x, y), nous avons le point *zéro* dans le plan (x', y'). En posant

$$u = \alpha \log r' + v,$$

l'équation précédente devient

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y'^2} = r'^{\alpha - 4} . e^v.$$

Donc, pour avoir un point singulier de la nature de ceux considérés plus haut, il faudra que

$$\alpha - 4 > -2 \qquad \text{ou} \qquad \alpha > 2.$$

4. Envisageons maintenant, si elle existe, une intégrale de l'équation

$$\Delta u = e^u$$

ayant comme points singuliers du type précédent n points à distance finie O_1, O_2, ..., O_n correspondant aux coefficients β_1, β_2, ..., $\beta_n (\beta_i > -2)$, et avec la condition supplémentaire relative aux dérivées du premier ordre telle qu'elle est exprimée au § 2. De plus, le point à l'infini est un point singulier de même nature, et il lui correspond l'exposant α envisagé au § 3.

Il doit tout d'abord exister entre α et les β une inégalité nécessaire. Considérons, en effet, n petits cercles décrits autour de O_1, O_2, ..., O_n et un cercle d'un très grand rayon. Portons notre attention sur la portion du plan extérieure aux petits cercles et intérieure au grand cercle ; de l'équation

$$\Delta u = e^u$$

on tire

$$\int\int \Delta u \, dx \, dy = \int\int e^u \, dx \, dy > 0.$$

l'intégrale double étant étendue à l'aire envisagée. Par conséquent, d'après la formule de Green,

$$\int \frac{du}{dn} ds < 0,$$

la dérivée étant prise dans le sens de la normale intérieure. Or on a, pour le voisinage de O_1,

$$u = \beta_1 \log r_1 + v$$

et $\dfrac{dv}{dn}$ est de l'ordre de $r_1^{\beta+1}$. Il en résulte de suite que, dans l'inégalité précédente, la part des petites circonférences est représentée par

$$2\pi(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n).$$

On voit aussi facilement que la part de la très grande circonférence est

$$2\pi\alpha$$

et *l'on a, par suite, l'inégalité nécessaire que nous voulions obtenir*

$$\alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_n < 0.$$

Nous savons d'ailleurs que $\alpha > 2$, $\beta_i > -2$.

5. Nous allons maintenant démontrer qu'*il ne peut y avoir deux intégrales jouissant des propriétés indiquées*. Supposons qu'il existe deux telles intégrales u et v, et soit

$$u = v + h.$$

Il n'est tout d'abord pas possible que h soit constamment positif, car de la relation

$$\Delta h = e^v(e^h - 1)$$

on conclut, en envisageant le même contour que plus haut,

$$\int\int \Delta h \, dx \, dy = \int\int e^v(e^h - 1) \, dx \, dy > 0;$$

par conséquent,

$$\int \frac{dh}{dn}\, ds < 0,$$

l'égalité étant exclue.

Or ce résultat est impossible, car $\frac{dh}{dn}$ dans le voisinage de O_i étant de l'ordre de $r_i^{\beta_i+1}$, l'intégrale du premier membre relative à chacune des circonférences O_i tend vers zéro, et il en est de même pour la grande circonférence pour une raison analogue. *Donc la différence h ne peut être toujours positive.*

Démontrons en second lieu un lemme qui nous sera d'ailleurs très utile tout à l'heure. J'envisage un contour C contenant l'origine, et l'équation

$$\text{(E)} \qquad \Delta h = \mathrm{A}(x, y) . r^{\beta} . (e^{h} - 1) \qquad (\beta > -2),$$

où $\mathrm{A}(x, y)$ est une fonction *positive* et *continue* dans C. Je dis que si une intégrale h de cette équation partout continue dans C (avec la condition que les dérivées du premier ordre soient autour de l'origine de l'ordre de $r^{\beta+1}$) prend sur C des valeurs comprises entre $-$ M et $+$ M, *on aura à l'intérieur de* C

$$(3) \qquad |h| < \mathrm{M}.$$

Si le facteur r^{β} ne se trouvait pas dans le second membre de l'équation, la remarque serait immédiate, car une intégrale de l'équation n'aurait nulle part, dans C, ni maximum positif, ni minimum négatif, mais ici cette conclusion pourrait cesser d'être exacte pour l'origine, et le raisonnement ne pourrait pas alors se terminer. Nous allons montrer d'abord que si h est nulle sur C, il est nécessairement nul dans C; on peut supposer que h est toujours de même signe dans C (sinon on fractionnerait l'aire en plusieurs autres). Soit donc $h > 0$ dans C; en intégrant entre C et un petit cercle Γ ayant l'origine pour centre, on a

$$\iint \Delta h . dx\, dy = \iint \mathrm{A} . r^{\beta} . (e^{h} - 1)\, dx\, dy > 0$$

et par suite

$$\int_{\Gamma} \frac{dh}{dn}\, ds + \int_{C} \frac{dh}{dn}\, ds < 0 \qquad \text{(égalité exclue)},$$

n représentant la normale intérieure à l'aire. La première inté-

grale est très petite, la seconde est positive ou nulle comme chacun de ces éléments : il y a donc contradiction.

Il résulte de là qu'une intégrale de E positive sur C ne pourra pas devenir négative à l'intérieur, et que si l'on a pour deux intégrales h_1 et h_2

$$h_1 > h_2 \quad (\text{sur C}),$$

il en sera de même à l'intérieur. Pour achever alors la démonstration de l'inégalité (3), il suffit de considérer l'intégrale h_1 de E prenant la valeur M sur C; h_1 sera toujours positif dans C, mais l'égalité

$$\Delta(h_1 - \text{M}) = \text{A}.r^{\beta}.(e^h - 1)$$

montre que $h_1 - \text{M}$ est négatif dans C. Or l'intégrale h prenant sur C des valeurs inférieures à M est, d'après ce que nous venons de dire, inférieure à h_1; on a, par suite,

$$h < h_1 < \text{M};$$

on démontrerait de même l'inégalité

$$h > -\text{M}$$

et *l'inégalité* (3) *est établie.*

6. Arrivons maintenant à la démonstration du théorème énoncé au début du paragraphe précédent. Soit ε une constante réelle quelconque comprise entre le maximum positif et le minimum négatif de h; il y aura nécessairement une succession de points formant une courbe continue pour laquelle

$$h = \varepsilon.$$

En effet, h a nécessairement, d'après ce qui a été dit plus haut, son maximum positif et son minimum négatif en un point singulier. Soit le maximum en O et le minimum en O′ (O et O′ sont deux des points singuliers $\text{O}_1, \text{O}_2, \ldots, \text{O}_n$ et ∞). Sur toute ligne joignant O à O′ il y a au moins un point où $h = \varepsilon$, et par suite nous avons une courbe

$$h = \varepsilon$$

formée d'une ou plusieurs parties fermées. A l'intérieur d'une branche fermée de cette courbe h sera compris entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$; mais il est clair qu'ici, considérant le plan tout entier (où la sphère

si l'on aime mieux), il n'y a pas lieu de distinguer entre *intérieur* et *extérieur*. Par suite h sera partout compris entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, ce qui est évidemment impossible puisque ε peut être pris aussi petit que l'on veut; il faut donc que h soit identiquement nulle, *et les solutions u et v coïncident.*

7. Il faut maintenant établir l'existence de la solution. Deux lemmes nous seront nécessaires. Le premier est le plus délicat; je l'expose d'abord dans le cas le plus simple. Soient deux intégrales u et v de l'équation $\Delta u = e^u$ sans singularités dans un contour C. On suppose que sur ce contour on ait, en valeurs relatives,

$$v > G, \quad u - v > 0.$$

Alors, à l'intérieur du contour, on aura nécessairement

$$v > G', \qquad u - v > 0,$$

G' étant une constante dépendant de G. Nous supposons maintenant de plus que l'on ait sur C

$$u - v < M;$$

nous voulons montrer qu'en un point A, intérieur à C, on aura

$$u - v < Mq,$$

q étant un nombre inférieur à *un*, dépendant en général de G et de la position de A, *mais nullement de* M.

Pour établir ce résultat, considérons en posant

$$u - v = h$$

l'équation

(4) $$\Delta h = e^v(e^h - 1).$$

Elle peut s'écrire

(5) $$\Delta h = e^v . e^{\theta h} . h = c . h \qquad (0 < \theta < 1),$$

c étant une fonction positive supérieure à $e^{G'}$. Or il est immédiat ([1]) que pour une équation linéaire

$$\Delta h = ch \qquad (c > 0),$$

([1]) Considérons en effet l'intégrale h_1 de l'équation

$$\Delta h = ch$$

prenant la valeur *un* sur le bord : elle prendra au point A la valeur q *plus petite*

si l'intégrale h, positive dans C, est sur C au plus égale à M, on aura en un point A

$$h < Mq \qquad (q < 1);$$

et pour une seconde équation linéaire

$$\Delta h = c' h \qquad (0 < c' < c),$$

la valeur de q sera supérieure à celle qui correspond à la première équation.

Il suffit d'appliquer ce résultat à l'équation (5) qui n'est que l'équation (4), pour en déduire qu'en A on aura

$$h < Mq,$$

q étant un nombre fixe inférieur à l'unité, pouvant dépendre seulement de G et de la position de A, mais nullement de M. Tel est le premier lemme que nous voulions établir.

8. Sous cette forme, ce lemme serait trop restreint. Nous devons l'étendre à des circonstances plus générales. Supposons que dans C il y ait un point singulier O (à l'origine par exemple) de la nature de ceux que nous avons seulement à considérer dans

---

que l'unité (c étant positive et non identiquement nulle). Soit h l'intégrale prenant sur C des valeurs entre 0 et M; on a

$$\Delta(h_1 M - h) = c(h_1 M - h).$$

Or $h_1 M - h$ est positif sur C, donc à l'intérieur on a

$$h < h_1 M < Mq.$$

Pour démontrer la seconde partie, il faut considérer les deux intégrales respectives h_1 et h'_1 des équations

$$\Delta h_1 = c h_1, \qquad \Delta h'_1 = c' h'_1 \qquad (c' < c)$$

prenant la valeur *un* sur le bord; on doit montrer que

$$h'_1 > h_1 \qquad \text{en A}).$$

Il suffit d'écrire la relation

$$\Delta(h'_1 - h_1) = c'(h'_1 - h_1) + (c' - c) h_1;$$

elle montre que $h'_1 - h_1$ ne peut avoir un minimum négatif, car pour ce minimum le second membre serait négatif, tandis que le premier membre serait positif ou nul. Il en résulte que $h'_1 - h_1$ est positif à l'intérieur de C.

notre problème. En posant

$$u = \beta \log r + v \qquad (\beta > -2)$$

on a l'équation

$$\Delta v = r^{\beta} . e^{v}.$$

C'est à cette équation que nous voulons étendre le lemme établi au paragraphe précédent pour $\Delta u = e^{u}$.

Nous considérons donc pour l'équation que nous écrivons maintenant

$$\Delta u = r^{\beta} . e^{u}$$

deux intégrales u et v partout continues à l'intérieur de C, ayant un point singulier à l'origine du type connu et satisfaisant aux diverses inégalités écrites au début du § 7. On a, en posant toujours

$$u - v = h,$$

$$\Delta h = r^{\beta} . e^{v} . (e^{h} - 1).$$

Traçons autour de l'origine un petit contour Γ. En tout point intérieur à C et par conséquent sur Γ (d'après le § 5), h sera inférieur à M. Or l'équation précédente peut s'écrire

$$\Delta h = r^{\beta} . e^{v} . e^{\theta h} . h.$$

Donc, en un point A intérieur à C, on aura

$$h < \mathrm{M} q.$$

q étant une constante inférieure à l'unité, pouvant seulement dépendre de G, mais pas de M.

Au lieu de l'équation $\Delta u = r^{\beta} . e^{u}$, on peut envisager d'une manière plus générale l'équation

$$\Delta u = r_1^{\beta_1} r_2^{\beta_2} \ldots r_n^{\beta_n} . e^{u},$$

$r_1, r_2, \ldots, r_n$ désignant les distances du point (x, y) à $O_1, \ldots, O_n$, et *le lemme garde le même énoncé.*

9. Passons au second lemme qui est immédiat. Soit l'équation

$$\Delta v = r_1^{\beta_1} r_2^{\beta_2} \ldots r_n^{\beta_n} . e^{v},$$

les points $O_1, O_2, \ldots, O_n$ étant contenus dans C. Désignons par ε

un nombre positif fixe aussi petit que l'on voudra. Si les valeurs d'une intégrale v sont sur le contour C inférieures en valeurs relatives à un nombre *convenable* H, on aura dans l'aire

$$v = v' - \eta,$$

v' désignant la fonction harmonique prenant sur C les valeurs données pour v, et η désignant une fonction positive inférieure à ε.

Il suffit de poser

$$v = v' + \lambda,$$

d'où

$$\Delta\lambda = r_1^{\beta_1} \ldots r_n^{\beta_n} . e^{v'} . e^{\lambda},$$

λ sera négatif; si v' est inférieur à H sur C, il en sera de même à l'intérieur. Donc, si H est assez petit en valeur relative, $e^{v'}$ sera une quantité positive très petite, et l'on peut s'arranger, en prenant H assez petit relativement, de manière que

$$|\lambda| < \varepsilon.$$

On peut donc bien poser

$$v = v' - \eta \qquad (\varepsilon > \eta > 0).$$

10. Ces lemmes posés, arrivons à la démonstration de l'existence de la solution. Nous prenons deux cercles concentriques C et C' de rayon R et R' (R > R'), contenant à leur intérieur les points O_1, O_2, ..., O_n. Le centre O de ces cercles est à l'origine et n'est pas un point singulier.

Soit d'abord u_1 une intégrale de l'équation

$$\Delta u = e^u,$$

prenant sur C une valeur constante H, et ayant les singularités données en O_1, O_2, ..., O_n. Si l'on pose

$$u_1 = \beta_1 \log r_1 + \ldots + \beta_n \log r_n + U_1,$$

on aura

$$\Delta U_1 = r_1^{\beta_1} r_2^{\beta_2} \ldots r_n^{\beta_n} . e^{U_1}.$$

U_1 prend sur C les valeurs

$$H - \beta_1 \log r_1 - \ldots - \beta_n \log r_n.$$

Si H est assez petit en valeur relative, en désignant par

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_n,$$

les fonctions harmoniques continues dans C et prenant sur C les valeurs

$$\log r_1, \quad \log r_2, \quad \ldots, \quad \log r_n,$$

on pourra écrire d'après le second lemme

$$U_1 = H - \beta_1 \rho_1 - \ldots - \beta_n \rho_n - \eta,$$

la fonction η étant positive et moindre qu'un nombre donné à l'avance ε. On sait que l'on a

$$\rho_1 = \log \frac{a_1 . \mathrm{MO}'_1}{\mathrm{R}},$$

O'_1 étant le conjugué de O_1 par rapport à C, et a_1 désignant la distance $\overline{OO_1}$. Nous avons donc

$$u_1 = H + \beta_1 \log r_1 + \ldots + \beta_n \log r_n - \beta_1 \rho_1 - \ldots - \beta_n \rho_n - \eta.$$

Sur C', u_1 prend certaines valeurs. Nous envisageons la fonction v_1 satisfaisant à

$$\Delta v = e^v$$

continue en dehors de C', sauf à l'infini, où elle a la singularité correspondant au nombre α. En posant

$$v_1 = -\alpha \log r + V_1,$$

nous avons

$$\Delta V_1 = r^{-\alpha} . e^{V_1}.$$

Sur C', V_1 prend la valeur de l'expression

$$H + \beta_1 \log r_1 + \ldots + \beta_n \log r_n + \alpha \log r - \beta_1 \rho_1 - \ldots - \beta_n \rho_n - \eta,$$

qui peut s'écrire

$$H + \beta_1 \log \frac{r_1 \mathrm{R}}{a_1 . \mathrm{MO}'_1} + \ldots + \beta_n \log \frac{r_n . \mathrm{R}}{a_n . \mathrm{MO}'_n} + \alpha \log r - \eta.$$

Transformons cette expression en nous servant des considérations géométriques suivantes. Soit le quotient

$$\frac{r_1 . \mathrm{R}}{a_1 . r'_1} \qquad (r'_1 = \mathrm{MO}'_1).$$

En M sur le cercle C de rayon R, ce quotient est égal à l'unité. L'expression

$$(6)\qquad \log \frac{r_1 R}{a_1 r'_1},$$

est donc nulle pour tout point M du cercle C. Soit $R' = R - \delta$ le rayon du cercle C' et un point M' sur C', il est très facile de voir que l'expression (6) prise pour le point M' peut se développer en série ordonnée suivant les puissances de $\frac{\delta}{R}$, les coefficients étant eux-mêmes des séries en $\frac{1}{R}$ et dépendant naturellement de la position du point M' sur C'. Ce développement converge pour $\frac{1}{R}$ et $\frac{\delta}{R}$ suffisamment petit; il commence par un terme en $\frac{\delta}{R}$, et de plus le coefficient de $\frac{\delta}{R}$ qui est une série en $\frac{1}{R}$ a comme premier terme -1. Soit donc en M'

$$\log \frac{r_1 R}{a_1 r'_1} = (-1 + \ldots)\frac{\delta}{R} + k_1 \frac{\delta^2}{R^2} + \ldots.$$

On a, d'autre part,

$$\log \frac{R'}{R} = -\frac{\delta}{R} + \frac{\delta^2}{2R^2} + \ldots.$$

Donc, on aura

$$\log \frac{r_1 R}{a_1 r'_1} = \log \frac{R'}{R} + h_1 \frac{\delta}{R},$$

h_1 étant une série en $\frac{1}{R}$ et $\frac{\delta}{R}$ qui ne renferme pas de terme constant.

Ceci posé, nous pouvons donner à la valeur de V_1 sur C' la forme suivante

$$H + (\beta_1 + \ldots + \beta_n) \log \frac{R'}{R} + \alpha \log r + \frac{\delta}{R} \Sigma \beta_1 h_1 - \eta.$$

Donc, d'après le second lemme la valeur de V_1 sur C sera

$$H + (\beta_1 + \ldots + \beta_n) \log \frac{R'}{R} + \alpha \log R' + v' - \eta',$$

η' étant une fonction positive très petite si H a été pris assez petit en valeur relative, et v' désignant une fonction harmonique

régulière à l'extérieur de C', et prenant sur C' la valeur

$$\frac{\delta}{R}\Sigma\beta_1 h_1 + \eta_1. \tag{7}$$

Enfin sur C, v_1 aura la valeur

$$H + (\alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_n)\log\frac{R'}{R} + c' + \eta'_1.$$

Or c' est de l'ordre de grandeur de l'expression (7). Donc, si $\frac{1}{R}$ est suffisamment petit (δ étant une quantité finie quelconque), et si H a été pris assez petit en valeur relative, on peut affirmer que le signe de

$$(\alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_n)\log\frac{R'}{R} + c' + \eta'_1$$

est le signe *plus*, à cause de l'inégalité

$$\alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_n < 0,$$

car le terme en $\frac{1}{R}$ a pour coefficient

$$-(\alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_n).\delta.$$

Nous arrivons donc à l'importante conclusion que v_1 sur C est *supérieur* à H, c'est-à-dire à la valeur de u_1 sur cette même courbe. On se sert des valeurs de v_1 sur C pour former une fonction u_2 prenant les mêmes valeurs sur C, satisfaisant à l'équation

$$\Delta u = e^u$$

et ayant les singularités $O_1, O_2, \ldots, O_n$. De u_2 on passe à une fonction v_2; or, puisque

$$u_2 > u_1 \qquad (\text{sur C})$$

il en résulte que

$$v_2 > v_1 \qquad (\text{sur C}')$$

et par suite

$$v_2 > v_1 \qquad (\text{sur C}).$$

Or on se sert de v_2 pour former u_3, toujours d'après le même mécanisme; on aura donc

$$u_3 > u_2 \qquad (\text{sur C}).$$

Les u_i comme les v_i vont donc toujours en croissant, et le premier lemme peut être appliqué sous la forme que nous lui avons donnée plus haut (§ 8), car si l'on pose

$$u_i = \beta_1 \log r_1 + \ldots + \beta_n \log r_n + U_i,$$

on aura pour U_i l'équation différentielle

$$\Delta U_i = r_1^{\beta_1} \ldots r_n^{\beta_n} e^{U_i}.$$

Les u_i restant sur C supérieures à un nombre fixe, il en sera évidemment de même des U_i sur C. Il est clair, d'autre part, que l'on aura

$$U_i > U_{i-1} \qquad (\text{sur C}).$$

Toutes les conditions du lemme premier sont donc vérifiées et la démonstration s'achève aisément.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Loewy (M.) et Puiseux (P.). — *Atlas photographique de la Lune*, publié par l'Observatoire de Paris. 3e fascicule. In-4°, 68 p. Paris, impr. Nationale, libr. Gauthier-Villars.

Marotte (F.). — *Les équations différentielles linéaires et la théorie des groupes*. In-4°, 97 p. Paris, Gauthier-Villars.

Sturm (Ch.). — *Lehrbuch der Analysis* (Cours d'Analyse). Ubersetzt von Th. Gross. 2 Bd. In-8°, VIII-351 p. avec 104 fig. Berlin, Fischers technolog. Verlag. Relié, 9 m.

Weber (H.). — *Traité d'Algèbre supérieure*. Traduit de l'allemand par J. Griess. In-8°, XI-764 p. Paris, Gauthier-Villars. 22 fr.

André (C.). — *Traité d'Astronomie stellaire*. 1re partie : *Étoiles simples*. In-8°, XVI-344 p. avec figures et planches. Paris, Gauthier-Villars. 9 fr.

Bianchi (L.). — *Vorlesungen über Differentialgeometrie*. Ubersetzt von M. Lukat. (In 3 Lfgn.) 2 Lfg. gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 6 m. 60 pf.

Comberousse (C. de). — *Cours de Mathématiques.* 4ᵉ édition, t. I, 2ᵉ partie. In-8°, avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr.

Genocchi (E.). — *Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung.* Herausgeg. von G. Peano. Uebersetzt von G. Bohlmann und A. Schepp. (In 2 Lfgn.) 1 Lfg. gr. in-8°, 224 p. Leipzig, Teubner. 6 m.

Jahrbuch *über die Fortschritte der Mathematik.* Herausgeg. von E Lampe. 27. Bd. Jahrg. 1896. 2. Heft. Gr. in-8°. Berlin, G. Reimer. 7 m.

Kepler. — *Traum vom Mond. Von L. Günther.* Mit dem Bildniss Keplers, dem Facsm-Titel der Originalausg., 24 Abbildgn. im Text u. 2 Taf. gr. in-8°, xxii-135 p. Leipzig, Teubner. 8 m.

Netto (E.). — *Vorlesungen über Algebra.* (In 2 Bänden.) 2. Bd., 1. Lfg. gr. in-8°, 192 S. m. Holzchn. Leipzig, Teubner. 6 m.

Petersen (J.). — *Vorlesungen über Funktionstheorie.* Gr. in-8°, vi-328 p. mit fig. Kopenagen, Höst et fils. 10 m.

Poincaré (H.). — *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.* T. III, in-8°, 418 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 18 fr.

Routh (J.). — *A Treatise on the Dynamics of a Particle. With Examples.* In-8°, 430 p. Cambridge, Univ. Press. 14 sh.

Salmon (G.). — *Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besondere Berücksichtigung der neuern Methoden. Frei bearb. von W. Fiedler.* 6ᵉ édition, 1ʳᵉ partie, gr. in-8°, xx-441 p. avec fig. Leipzig, Teubner. 8 m.

— *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions.* Traduit de l'anglais par O. Chemin. 1ʳᵉ partie. In-8°, xvii-336 p. Paris, Gauthier-Villars. 7 fr. 50 c.

Cantor (M.). — *Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens.* Gr. in-8°, x-136 p. Leipzig, Teubner. Gebd. 1 m. 80 pf.

Encyclopædie *der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.* Herausgeg. von H. Burkhardt u. W. F. Meyer. (In 6 Bänden à 4-5 Hefte.) I Thl. Reine Mathematik. 1. Bd. Arithmetik u. Algebra. Red. von W. F. Meyer. 1. Heft. Gr. in-8°, 112 p. Leipzig, Teubner. 3 m. 40 pf.

Lambert (P.-A.). — *Differential and Integral Calculus for Technical Schools and Colleges.* In-8°, 256 p. London, Macmillan. 7 sh. 6d.

Reve (Th.). — *Die Geometrie der Lage.* Vorträge. 1 Abthl. 4 Aufl. gr. in-8°, xvi-296 p. avec 90 fig. Leipzig, Baumgärtner. 8 m.

LIPPMANN (G.). — *Unités électriques absolues.* Leçons professées à la Sorbonne, 1884-85. In-8°, 230 p. avec fig. Paris, Carré et Naud. 10 fr.

APPELL. — *Éléments d'Analyse mathématique à l'usage des ingénieurs et des physiciens.* In-8°, 725 p. avec fig. Paris, Carré et Naud.

CAUCHY (A.). — *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy.* 1e série, t. XI. In-4°, 462 p. Paris, Gauthier-Villars. 25 fr.

LEIBNIZ (G.-W.). — *Briefwechsel mit Mathematikern.* Herausgegeben von E.-J. Gerhardt. 1. Bd. Mit 1 photogr. Facs. gr. in-8°, XXVIII-761 p. avec fig. Berlin, Meyer et Müller. 28 m.

STURM (CH.). — *Lehrbuch der Mechanik (Cours de Mécanique).* Uebersetzt von Th. Gross. 1. Bd. gr. in-8°, IX-258 p. Berlin, Calvary et Cie. gebd. 7 m.

TAIT (P.-G.). — *Scientific papers.* Vol. I, in-4°. Cambridge Univ. Press. 25 sh.

BERRY (A.). — *Short History of Astronomy.* In-8°, 472 p. London, Murray. 6 sh.

HARKNESS (J.) and MORLEY (F.). — *Introduction to the Theory of Analytical Functions.* In-8°, 352 p. London, Macmillan. 12 sh. 6 d.

POINCARÉ (H.). — *Théorie du potentiel newtonien.* Leçons professées à la Sorbonne; rédigées par Ed. Le Roy. In-8°, 370 p. avec fig. Paris, Carré et Naud. 14 fr.

REYE (TH.). — *Die synthetische Geometrie im Altherthum und in der Neuzeit.* Rectoratsrede. 2e édition, gr. in-8°, 18 p. Strassburg, Heitz. 40 pf.

OSTWALD'S *Klassiker der exakten Wissenschaften.* N° 101, in-8°, Leipzig, Engelmann. Cart. 75 pf.

Contenu : G. Kirchhoff, Abhandlungen über mechanische Wärmetheorie, Herausgeg. von M. Planck. 48 s.

— dasselbe. Nr. 102. Ebendas. Cart. 2 m. 40 pf.

Contenu : J.-C. Maxwell, über physikalische Kraftlinien. Herausgeg. von L. Bolzmann. 147 s.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MOUGIN (E.). — Nouvelles Tables de logarithmes à cinq décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques. Plaquette de 38 p. Laval, chez l'auteur; 1899.

L'auteur a su, par une disposition ingénieuse, faire tenir en neuf pages, d'un format assez petit, les logarithmes des nombres de 1 à 10000, avec cinq décimales, et en vingt-neuf pages les logarithmes des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes de minute en minute pour tous les degrés du quadrant. Malgré la condensation, il n'est pas difficile de se retrouver dans cette Table; elle pourra, à cause de ses petites dimensions, rendre service à quelques personnes, qui n'aiment point charger leurs poches.

DEHN (M.). — Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. Inauguraldissertation. 38 p. in-4; Leipzig, Teubner; 1900.

Cette intéressante Dissertation inaugurale peut être regardée comme une illustration de la méthode et des principes développés par M. Hilbert dans son beau Livre sur les fondements de la Géométrie (*Festschrift zur Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals*).

On sait que Legendre a démontré les deux propositions suivantes :

1° Dans un triangle la somme des trois angles ne peut dépasser deux droits.

2° Si dans un triangle particulier la somme des trois angles est égale à deux droits, il en est de même de tout triangle.

Sur quels axiomes reposent ces théorèmes? La démonstration de Legendre implique ce « postulat de continuité » que l'on désigne habituellement sous le nom d'*axiome d'Archimède*, axiome que l'on peut, dans le cas actuel, énoncer ainsi :

Soient donnés sur une droite deux points A, B et soit A_1 un point situé sur cette droite; on construit les points $A_2, A_3, A_4, \ldots$, tels que A_1 soit entre A et A_2, A_2 entre A_1 et A_3, A_3 entre A_2 et A_4, ..., et tels en outre que les segments AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... soient égaux entre eux, il y aura toujours un point A_n tel que B se trouve entre A et A_n.

Si maintenant on constitue une Géométrie sans supposer l'axiome d'Archimède, que deviendront les théorèmes de Legendre? Telle est la question que traite M. Dehn. Il arrive au résultat suivant, qui ne manque pas d'intérêt : Le deuxième théorème subsiste, il ne s'appuie que sur les groupes d'axiomes désignés par M. Hilbert sous les numéros 1, 2, 4 (*Verknüpfung, Anordnung, Congruenz*) et qui, bien entendu, ne comprennent pas le postulatum de la théorie des parallèles. Le premier théorème, au contraire, suppose essentiellement l'axiome d'Archimède et la preuve en est apportée par le développement d'une nouvelle Géométrie, qui en est indépendante et que M. Dehn qualifie de *Nicht-Legendre'sche Geometrie*.

J. T.

WALKER (G.). — ABERRATION AND SOME OTHER PROBLEMS CONNECTED WITH THE ELECTROMAGNETIC FIELD, ONE OF THE TWO ESSAYS TO WHICH THE ADAMS PRIZE WAS AWARDED IN 1899, IN THE UNIVERSITY OF CAMBRIDGE. Un vol. in-8; 96 p. Cambridge University Press; 1900.

M. Gilbert-T. Walker se place au point de vue de la théorie électromagnétique de la lumière. A ce point de vue, l'étude de l'*aberration* n'est qu'un problème particulier dans l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques.

Toute la difficulté consiste à écrire les équations générales du champ électromagnétique *dans les milieux matériels en mouvement*. C'est ce but que M. Walker se propose dans la première partie de son travail. Il détermine ensuite, dans diverses hypothèses, les tensions dont le diélectrique est le siège. Il arrive, enfin, à l'application particulière qu'il avait en vue et montre que les équations générales rendent compte de toutes les particularités de l'aberration de la lumière, pourvu que l'on accepte l'hypothèse

d'une *polarisation moléculaire* de la matière sous l'influence du champ électromagnétique. Il n'en est pas de même, d'après M. Walker, si l'on admet que la polarisation de la matière est *continue*. Dans ce cas, il trouve des équations générales différentes, et les conséquences qu'il en tire ne sont plus conformes à l'expérience.

Il y a là, je l'avoue, quelque chose d'assez surprenant. Que la polarisation soit *continue* ou *moléculaire*, cela semble ne pouvoir faire l'objet que d'une de ces hypothèses que M. Poincaré appelle *indifférentes* et qui ne peuvent intervenir dans les résultats, tant qu'on n'introduit aucune de ces hypothèses supplémentaires que masque trop souvent le développement des calculs.

Quoi qu'il en soit, après les travaux de Maxwell, de Hertz et de Lorentz, il reste encore beaucoup à faire, et le Mémoire de M. Walker vient mettre en évidence, une fois de plus, toute l'obscurité de ces questions.

H. Abraham.

FRICKE (R.). — Kurzefasste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik mit Berücksichtigung der Anwendungen. Analytisch-functionentheoretischer Teil. Mit 100 in den Text gedruckten Figuren. Un vol. in-8°; IX-520 p. Leipzig, Teubner; 1900.

Voici un livre qui pourra rendre de grands services à l'étudiant en Mathématiques qui vient de suivre un cours régulier de Calcul différentiel et intégral. A coup sûr, les livres qu'il est à même de lire, qu'il lui faudra lire pour développer ses connaissances en Analyse, ne manquent point; leur nombre et leur taille sont plutôt pour l'effrayer; il soupçonne déjà l'importance des sujets qui sont traités dans ces ouvrages, dont beaucoup sont excellents. Il n'ignore pas non plus l'existence des Collections mathématiques et des Mémoires originaux, qu'il lui faudra aussi étudier un jour, et que ses maîtres n'ont pas manqué de lui vanter comme il faut. Par où commencer et comment s'orienter? Comment acquérir une première idée des sujets les plus essentiels et des méthodes les plus utiles?

M. R. Fricke a réuni, dans le volume que nous annonçons,

quelques-uns de ces sujets, en se limitant d'une part aux points vraiment fondamentaux et, d'autre part, en développant assez ces sujets pour que celui qui a lu son livre soit capable d'aborder bon nombre d'applications; l'auteur a même eu soin d'indiquer quelques-unes de ces applications, et, quand il y avait lieu, d'introduire des tables numériques.

Il a voulu s'adresser non seulement à ceux dont l'objet essentiel est d'accroître leurs connaissances mathématiques, mais aussi bien à ceux des futurs ingénieurs ou physiciens qui, tout en ayant en vue des réalités concrètes, savent que les Mathématiques constituent une arme indispensable pour l'étude ou la conquête de ces réalités.

C'est peut-être même parce qu'il visait cette classe de lecteurs que M. Fricke a développé comme il le fait certains sujets qui, comme la théorie des fonctions d'une variable complexe, sont sans doute traités dans la plupart des cours qui ne s'adressent pas exclusivement à ceux qui n'ont en vue que les applications immédiates.

Aussi bien le choix des sujets était évidemment un peu arbitraire et l'auteur savait fort bien que quelques-uns de ceux qu'il a abordés sont, en fait, tantôt effleurés, tantôt traités d'une façon assez approfondie dans tel cours ou dans tel autre, une année ou l'autre, ici ou là. Mais tous sont importants. En outre, M. Fricke a joint à chaque exposé des renseignements historiques et bibliographiques, qui ne peuvent manquer d'intéresser le lecteur et de lui être utiles, s'il veut poursuivre ses études.

Nous donnons ci-dessous la liste des sept chapitres qui composent le livre de M. Fricke :

I. *Séries de Fourier.* (p. 1-23). — C'est à la démonstration de Dirichlet, pour la convergence, que l'auteur s'attache. Application à quelques fonctions définies numériquement, à la vibration des cordes, à la conductibilité.

II. *Fonctions sphériques et cylindriques.* (p. 24-74). — L'auteur prend pour point de départ la notion du potentiel et l'équation de Laplace. Il introduit les fonctions de Legendre et en développe les propriétés élémentaires, puis les fonctions sphériques générales d'ordre n, donne leur expression au moyen des

fonctions correspondantes P_n^ν, donne des indications sur le développement en série d'une fonction suivant les fonctions sphériques et sur les applications à l'électrostatique. Les fonctions cylindriques sont obtenues comme cas limite des fonctions sphériques; elles sont appliquées, d'après Bessel, à la résolution de l'équation de Keppler.

III. *Fonctions d'une variable complexe.* (p. 75-172). — La notion de représentation conforme est développée avec grand soin et est prise pour point de départ. On trouve dans ce chapitre les théorèmes fondamentaux de Cauchy, les propositions essentielles sur les séries et produits infinis, la notion de continuation, la décomposition des fonctions entières en facteurs primaires, l'étude de la surface de Riemann à deux feuillets, etc.

En passant, l'auteur dit quelques mots du mouvement d'un fluide incompressible dans un plan.

IV. *Fonctions elliptiques.* (173-283). — L'auteur prend pour point de départ la notion de fonction doublement périodique, introduit les fonctions de Weierstrass, traite de la représentation conforme du plan des u au moyen de la fonction pu, de la représentation conforme d'une surface de Riemann à deux feuillets et à quatre points d'embranchement au moyen de l'intégrale de première espèce, de l'inversion, de l'addition, des fonctions $\mathfrak{S}$, des fonctions sn, cn, dn, de la transformation linéaire, de la transformation de Landen, du calcul numérique.

V. *Applications des fonctions elliptiques.* (p. 284-337). — Polygones de Poncelet. — Trigonométrie sphérique. — Lignes géodésiques sur l'ellipsoïde aplati. — Coordonnées elliptiques. — Applications à la théorie de la chaleur. — Pendule sphérique. — Rotation d'un corps solide autour d'un point fixe; mouvements à la Poinsot.

VI. *Équations linéaires à une inconnue.* (p. 338-424). — Après avoir développé les points essentiels de la théorie de M. Fuchs, l'auteur traite des fonctions hypergéométriques et, comme applications, des périodes de l'intégrale complète de première espèce (Legendre), puis des propriétés du quotient de deux

solutions linéairement indépendantes de l'équation de Gauss, des belles recherches de M. Schwarz sur ce sujet (représentation d'un demi-plan sur un triangle formé d'arcs de cercle, etc.). La considération des points irréguliers lui donne l'occasion de dire quelques mots des déterminants infinis.

VII. *Équations différentielles du premier ordre avec plusieurs inconnues.* (425-514). — Après avoir établi les propriétés fondamentales des déterminants fonctionnels, l'auteur démontre le théorème d'existence pour les intégrales d'un système d'équations différentielles du premier ordre, traite de l'équation linéaire aux dérivées partielles dont l'intégration équivaut à celle d'un tel système, des facteurs intégrants et des multiplicateurs d'un système d'équations différentielles simultanées, du principe du dernier multiplicateur, des systèmes complets, des systèmes jacobiens, des systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales, des équations aux dérivées partielles du premier ordre, non linéaires, en insistant, pour les interprétations géométriques, sur le cas de deux variables indépendantes, enfin du théorème de Poisson et des équations différentielles de la Mécanique.

J. T.

SCHLÖMILCH (O.). — Uebungsbuch zum Studium des höheren Analysis. Zweiter Teil : Aufgaben aus der Integralrechnung. Vierte Aufgabe bearbeitet von R. Henke. Un vol. in-8 : VIII-448 p. Leipzig, Teubner ; 1900.

Le recueil d'exercices de M. Schlömilch est bien connu ; il a certainement servi, dans tous les pays de langue allemande, à bien des générations d'étudiants, et partout ailleurs à la plupart des professeurs de Calcul différentiel et intégral qui avaient à donner des problèmes à leurs élèves. Dans notre système actuel d'examens, il répondrait fort bien à la préparation de l'épreuve pratique du certificat de Calcul différentiel et intégral.

Il suffira de dire à ceux de nos lecteurs qui ne l'auraient pas eu entre les mains qu'il contient, outre le rappel des règles essentielles du Calcul différentiel et intégral (Intégrales indéfinies et

définies, simples ou multiples; rectification, quadrature, complanation, cubature des courbes ou des surfaces; centres de gravité, moments d'inertie; types d'équations différentielles du premier et du second ordre qui s'intègrent facilement), de nombreuses et intéressantes applications de ces règles, applications qui sont, les unes traitées explicitement, les autres simplement indiquées. Elles sont graduées avec art, de manière à ne pas rebuter les commençants et à leur faire acquérir cette sûreté et cette habileté dans le calcul que l'on ne saurait priser trop haut. La plupart de ces applications ont une origine géométrique et il n'est pas douteux que leur intérêt en soit augmenté. Les commençants en particulier se lassent volontiers des exercices qui semblent faits uniquement pour leur apprendre à appliquer les règles et, d'ailleurs, si simple que soit la mise en équation d'un problème de Géométrie, il y a toujours, dans cette mise en équation, un effort utile; le choix des coordonnées ou des inconnues demande de la réflexion et, souvent, quelque ingéniosité. Il y aurait sans doute intérêt à introduire des exercices se rapportant à d'autres sciences concrètes, comme la Physique ou la Mécanique. Mais M. Henke, qui s'est chargé de la quatrième édition du livre de M. Schlömilch, a reculé devant un changement aussi considérable; on peut ajouter que les lecteurs auxquels est destiné spécialement le livre n'ont pas, d'ordinaire, les connaissances que nécessite la mise en équation de pareils problèmes, et que cette mise en équation demanderait souvent de longues et délicates explications.

Outre les sujets que l'on vient d'énumérer rapidement, il convient de signaler les chapitres relatifs à la transformation des intégrales définies en séries, ou réciproquement, à la recherche de valeurs moyennes, à la détermination de fonctions contenant des coefficients arbitraires qui s'approchent le plus possible d'une fonction donnée.

Il me semble que, dans le paragraphe intitulé « Integration durch Rationalisierung », on aurait pu introduire utilement quelques notions très élémentaires sur les courbes unicursales; lorsque M. Schlömilch a publié son *Uebungsbuch*, il y a une trentaine d'années, il était très naturel que ces notions n'y figurassent pas. Mais quelques exercices, se rapportant à cette notion, trouveraient aujourd'hui naturellement leur place. De même, dans les

chapitres où il est question de surfaces, il semble qu'il ne soit pas nécessaire de se borner aux coordonnées rectangulaires, polaires ou cylindriques et que quelques indications discrètes relatives aux coordonnées curvilignes ne seraient pas déplacées. Il est certain que, grâce à ses qualités de fonds, au nombre, à l'intérêt, à l'élégance des questions qu'il contient, le livre de M. Schlömilch restera encore longtemps classique, malgré les livres similaires ou analogues dont plusieurs sont fort recommandables, qui ont été publiés dans les différentes langues; il aura encore de nouvelles éditions, où il sera facile de combler ces lacunes. Cette quatrième édition, en tous cas, se recommande par les soins qu'y a apportés M. Henke et par les améliorations de détail qu'il y a introduites. J. T.

ANDOYER (H.). — Leçons sur la Théorie des formes et la Géométrie analytique supérieure, a l'usage des étudiants des Facultés des Sciences. T. I. Un vol. in-8; vi-508 p. Paris, Gauthier-Villars; 1900.

Il est bien vraisemblable que Descartes a prévu l'influence que devait avoir sa méthode des coordonnées sur le développement de l'Algèbre et de la Géométrie. Si puissant qu'ait été son génie, il aurait sans doute été étonné s'il avait su que cette méthode donnerait naissance un jour à une science nouvelle dont l'intérêt tiendrait en grande partie à la façon dont elle s'interprète dans l'espace, mais où la notion d'espace n'interviendrait plus que par une sorte de direction vague imposée à la suite des propositions, et la survivance de certains termes, analogues à ces organes des êtres vivants, qui n'ont plus d'utilité, qui sont les témoins d'une de ces origines lointaines que les naturalistes savent démêler, et les résidus d'une longue évolution. Je crois que M. Andoyer rend un service signalé en donnant une exposition didactique de cette science nouvelle, et en la séparant nettement de la Géométrie analytique proprement dite, où la distinction entre le réel et l'imaginaire doit conserver toute sa force, où les équations se traduisent en figures véritables. Sans doute, on ne peut enseigner aujourd'hui la Géo-

métrie analytique sans parler des propriétés invariantes, mais il ne faut pas oublier que l'enseignement de la Géométrie analytique, dans nos lycées, doit être une sorte d'enseignement de passage, qui conduise des éléments aux parties plus élevées de la Science, en particulier aux applications géométriques du Calcul différentiel et intégral, à la Mécanique rationnelle ou à l'Astronomie, en un mot aux objets essentiels de l'enseignement mathématique dans les hautes écoles techniques. Chemin faisant, il y a plus d'une porte à ouvrir, plus d'une belle perspective à montrer, sans trop s'y engager.

Le sujet développé par M. Andoyer appartient nettement à l'enseignement supérieur; en raison même de son intérêt et des relations étroites qu'il offre avec les matières traitées dans les classes de *mathématiques spéciales,* il devrait être développé dans quelques chaires magistrales. Mais il convient peut-être de combler les lacunes dans les livres avant de les combler dans l'enseignement; le livre de M. Andoyer vient à son heure, et la publication de ses leçons autographiées, dont nous avons rendu compte ici-même [1] l'avait fait désirer.

La matière est très riche; elle sera traitée dans deux Volumes; le premier, que nous annonçons, contient deux Livres, la *Géométrie binaire* et la *Géométrie ternaire*. Ce mot de « Géométrie » ne doit pas tromper, et, si on lit seulement les titres des chapitres, on verra bien qu'il s'agit essentiellement des propriétés des formes algébriques, ou plutôt de celles des propriétés de ces formes, qui, par leur caractère invariant, sont susceptibles d'être interprétées dans l'espace à une ou à deux dimensions. Si l'auteur a conservé le mot « Géométrie » il a systématiquement banni les mots « point, droite, courbe, etc. ». Au lieu de « point, ou de droite », il dit « élément », élément de première ou de seconde espèce; bien entendu l'élément de première espèce n'est pas nécessairement le point, l'élément de seconde espèce n'est pas nécessairement la droite; les qualificatifs « premier, second » indiquent seulement le rôle que les « éléments » tiennent dans les équations; les éléments de seconde espèce, qu'il désigne par des lettres grecques, sont les coefficients d'une forme linéaire dont

(1) Voir *Bulletin*, XXII, p. [illegible]

les variables sont les coordonnées d'un élément de première espèce, désignées par des lettres romaines. De même M. Andoyer ne parle pas de courbes, mais bien de *séries d'éléments;* les propositions qu'il établit s'interpréteront donc indifféremment soit au point de vue ponctuel, soit au point de vue tangentiel.

I. *Géométrie binaire.* — Après quelques définitions relatives aux formes binaires et au groupe des substitutions linéaires, l'auteur montre comment les invariants absolus d'un système vérifient un système d'équations aux dérivées partielles, linéaires et homogènes, formant un système complet. La notion d'invariant absolu conduit ensuite naturellement à celle d'invariant au sens ordinaire du mot et, en se plaçant au point de vue analytique, l'existence d'un système fondamental d'invariants entiers, pour un système donné de formes, apparaît aisément. Quant au théorème de M. Gordan sur l'existence d'un système d'invariants entiers, dont tous les autres invariants soient des fonctions entières, il appartient à un tout autre ordre d'idées et M. Andoyer se contente de l'énoncer. Ces notions fondamentales acquises, l'auteur traite des formations invariantes générales : d'abord des polaires, puis des invariants K et J relatifs, les premiers à deux formes binaires f, ψ portant, l'une sur des variables de première espèce x_1, x_2, l'autre sur des variables de seconde espèce ξ_1, ξ_2, les seconds à deux formes binaires f, g portant sur les mêmes variables x_1, x_2 et définis respectivement par les égalités symboliques

$$K^h(f, \psi) = \frac{P_{p-h}}{P_p}\frac{P_{\pi-h}}{P_\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial \xi_2}\right)^h,$$

$$J^h(f, g) = \frac{P_{p-h}}{P_p}\frac{P_{p'-h}}{P_{p'}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^h,$$

où P_n en général à la même signification que $1.2.3\ldots n$; p, p', π désignent les degrés. Les invariants $J^h(f, g)$, qui ne sont autres que les *Ueberschiebungen* de Clebsch et Gordan, permettent de former les systèmes complets d'invariants des formes binaires. M. Andoyer s'occupe ensuite de l'invariant Δ relatif à q formes binaires semblables à une seule série de variables et contenant lui-même ces variables, dont l'évanouissement (identique) exprime que les q formes sont liées par une relation linéaire.

Passant aux systèmes linéaires, c'est-à-dire aux systèmes composés uniquement de variables isolées et de formes linéaires, l'auteur montre comment le rapport anharmonique s'introduit comme invariant absolu pour un tel système; l'importance de la notion du rapport anharmonique apparaît immédiatement dans la formation, en fonction des racines, des invariants d'un système composé de variables et de formes à une seule série de variables.

La formation du résultant de deux formes, la détermination des racines communes à ces deux formes sont présentées d'une façon très élégante. On remarquera en particulier la forme donnée aux conditions pour que q formes données et de même degré aient r racines communes, obtenues par l'évanouissement identique d'un déterminant.

L'auteur arrive maintenant à l'étude spéciale des formes particulières les plus simples. C'est d'abord l'étude de la forme bilinéaire, bien justifiée par ce fait que ses propriétés sont celles de l'homographie, puis celle des *systèmes quadratiques* constitués au moyen de formes quadratiques et de variables, qui peuvent d'ailleurs tenir la place des formes linéaires données, enfin celle des formes cubique, biquadratique, quintique, précédée des notions relatives à la forme canonique et à l'*équation canonisante*. Pour les formes cubique et biquadratique, l'auteur donne, outre les systèmes complets d'invariants, l'expression des racines sous forme invariante. Pour la forme quintique, il se borne à la formation des invariants, obtenus d'une façon très simple.

La forme doublement quadratique est envisagée successivement dans le cas général, dans le cas où les deux séries de variables sont coïncidentes, dans le cas où elle est symétrique par rapport à ces deux séries de variables.

Dans ce qui précède, l'auteur s'est attaché presque exclusivement, dans l'étude des formations invariantes des systèmes binaire, à la considération des formes à une seule série de variables, et c'est à ces formes qu'il a relié l'étude des quelques formes à deux séries de variables qu'il a voulu envisager; il consacre maintenant un chapitre à l'étude directe des formes à deux séries de variables. Considérant d'abord deux telles formes

$$f = a_x^p v_y^q, \qquad g = a_z^p v_y^q,$$

à deux séries de variables (x_1, x_2), (y_1, y_2), il montre comment l'élimination de y_1, y_2 entre les équations $f = 0$, $g = 0$ et l'équation obtenue en égalant à o une forme bilinéaire quelconque, conduit à une équation de degré $pq' + p'q$ par rapport aux coefficients de cette forme, équation dont le premier nombre se décompose en $pq' + p'q$ facteurs linéaires par rapport à ces coefficients, et qui fournit ainsi les couples communs à f et à g, en donnant simultanément les valeurs d'un même couple : cette même équation fournit les fonctions symétriques fondamentales de ces couples. L'étude de ces $pq' + p'q$ couples, quand on regarde f comme donnée et les coefficients de g comme variables, s'impose naturellement, comme aussi celle du résultant R de trois formes f, g, h, résultant dont l'évanouissement exprime que ces trois formes ont un couple commun.

Nous arrivons enfin à la *Géométrie métrique binaire* qui forme le dernier chapitre du premier livre. L'introduction d'une forme quadratique (absolu de l'espace binaire) permet de définir la *distance* de deux éléments, puis le groupe des mouvements : à ce groupe correspondent des invariants absolus d'un système binaire quelconque, les invariants absolus métriques de ce système.

II. *Géométrie ternaire.* — Les généralités relatives aux formes ternaires (définitions, substitutions linéaires, formations invariantes générales, systèmes linéaires...) peuvent être exposées très rapidement, grâce au soin que l'auteur a mis dans l'exposition des notions correspondantes relatives aux formes binaires. Le chapitre relatif aux éléments communs à deux séries se trouve de même préparé par le chapitre du premier Livre relatif à la recherche des couples communs à deux formes (binaires) à deux séries de variables. Les éléments communs aux deux séries définies par deux formes ternaires a_{x^p}, $b_{x^{p'}}$, à une seule série de variables, s'obtiennent naturellement au moyen de la forme en ξ_1, ξ_2, ξ_3 décomposable en pp' facteurs linéaires, qui résulte de l'élimination de x_1, x_2, x_3 entre les équations

$$a_{x^p} = 0, \qquad b_{x^{p'}} = 0 \qquad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0.$$

On étudie ensuite la façon dont ces pp' éléments communs dépen-

dent de l'une des formes quand l'autre est donnée, puis le résultant de trois formes, le discriminant d'une forme. Avec les éléments tangents à une série, les éléments inflexionnels, stationnaires, multiples d'une série, nous entrons au contraire dans un domaine vraiment nouveau qui n'a pas son analogue dans la Géométrie binaire. Les formules de Plücker forment en quelque sorte la conclusion de cet intéressant Chapitre. Le suivant est intitulé : Générations diverses des séries ternaires. Il correspond, dans l'ordre d'idées où s'est placé l'auteur, aux leçons classiques de Géométrie analytique sur la recherche des lieux géométriques et la théorie des enveloppes. On remarquera, au début, les vues générales exposées sur la théorie de l'élimination et la façon dont sont obtenus les degrés des séries et le nombre de leurs éléments multiples. Comme application, l'auteur étudie rapidement la hessienne, la steinérienne, la cayleyenne d'une courbe, ou, pour parler comme lui, d'une série donnée.

Nous entrons maintenant dans l'étude des formes spéciales, d'abord de la forme bilinéaire, ou de l'homographie, puis des formes quadratique, cubique, quartique.

Les formes quadratiques forment l'objet de plusieurs chapitres. Voici d'abord les invariants du système constitué par une forme quadratique ternaire et les variables x, ξ, quelques identités fondamentales, la formule générale de décomposition en carrés, la génération d'une série quadratique par une forme bilinéaire à deux séries de variables binaires (ou d'une conique par deux faisceaux homographiques), la série quadratique comme série rationnelle, et, en particulier, les conséquences qui se tirent de l'étude d'une relation symétrique entre les paramètres qui définissent deux éléments d'une telle série, deux points d'une conique, si l'on veut; puis, le système de deux formes quadratiques et les invariants de ce système, les diverses formes canoniques auxquelles on parvient suivant la nature des racines de l'équation du troisième degré qui est liée au système de deux formes quadratiques, l'étude spéciale des invariants les plus intéressants du système formé par les deux formes quadratiques et les variables x ou ξ, la formation du système complet de ces invariants, les invariants de fermeture (polygones de Poncelet), etc.

Dans un chapitre précédent, la forme bilinéaire a été étudiée

au point de vue de l'homographie, et par conséquent en regardant les deux séries de variables comme d'espèce différente; en supposant que les deux séries de variables soient de même espèce, la forme bilinéaire, égalée à zéro, fait correspondre un élément de seconde espèce à un élément de première espèce; elle définit une réciprocité. C'est à ce point de vue que M. Andoyer en reprend l'étude.

La considération de deux formes bilinéaires donne lieu à une suite de recherches analogues à celles qui ont été faites pour un système de deux formes quadratiques; elle mène directement à l'étude de la correspondance quadratique birationnelle entre deux espaces distincts ou coïncidants.

Un chapitre est consacré à l'étude géométrique du réseau de séries quadratiques, et en particulier au rôle du jacobien.

Pour ce qui est de la série cubique, l'auteur, après avoir montré comment, dans le cas où il n'y a pas d'élément cuspidal, la considération des éléments inflexionnels conduit à la forme canonique, détermine les invariants fondamentaux du système formé par la forme cubique ternaire, les variables x et ξ, montre comment la connaissance des invariants fondamentaux d'une forme cubique permet d'effectuer simplement la réduction de cette forme à la forme canonique, établit les propriétés du faisceau constitué par une forme cubique et sa hessienne, et les propriétés générales les plus importantes des séries cubiques, déduites du fait qu'une série cubique est la jacobienne de trois réseaux de séries quadratiques; il traite de la proposition relative au neuvième élément commun à deux séries cubiques qui ont huit éléments communs, de la génération d'une série cubique au moyen de deux faisceaux de séries linéaires et d'une forme doublement quadratique à deux séries de variables binaires. Les propriétés des séries cubiques rationnelles sont étudiées à part.

L'étude générale d'une forme linéaire à la fois par rapport aux variables (x), (y), (z), comprend, en particulier, celle d'un réseau d'homographies ou de réciprocités entre des espaces coïncidants ou non, celle d'un réseau de séries quadratiques et celle d'une série cubique. Un chapitre est employé à établir quelques points essentiels de cette étude, qui pourrait donner lieu à de longs développements.

Une série quartique peut s'obtenir en considérant un réseau

$$(F) \qquad y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3 = 0$$

de formes quadratiques f_1, f_2, f_3, relatives aux variables (x), en regardant les variables y_1, y_2, y_3 comme appartenant à une série quadratique $g = 0$ et en cherchant l'enveloppe de la série quadratique F. Chaque couple d'éléments bitangents à une série quartique f détermine une façon de représenter f comme une enveloppe de séries quadratiques et chacune de ces façons détermine six couples d'éléments bitangents. Les 28 éléments bitangents à une quartique générale conduisent ainsi à 63 systèmes de séries quadratiques quadruplement tangentes à f. M. Andoyer donne explicitement le tableau correspondant des 63 systèmes de six couples d'éléments bitangents; ce tableau met en évidence un grand nombre de propriétés, en particulier des propriétés d'alignement.

Les séries quartiques sont ensuite réparties en classes suivant leurs singularités ou particularités. M. Andoyer explique en détail comment, dans chaque cas, le tableau général doit être interprété, ce que deviennent les séries quadruplement tangentes, les systèmes qui disparaissent ou qui se confondent et l'ordre de multiplicité de chacun d'eux. Cette étude longue et minutieuse, qui comporte une vingtaine de pages, est nécessaire pour donner une idée nette des séries quartiques. On peut d'ailleurs en tirer nombre de résultats intéressants. D'autres propositions importantes résultent de divers modes de génération des séries quartiques, par exemple par l'intersection de deux faisceaux de séries quadratiques qui se correspondent homographiquement. Enfin les quartiques rationnelles sont étudiés directement, comme telles.

Les deux derniers chapitres se rapportent à la géométrie ternaire, tout d'abord à la géométrie métrique ternaire *générale*, dans laquelle on suppose que le déterminant de la forme quadratique

$$F_{x^2} = F_{11} x_1^2 + \ldots + 2 F_{23} x_2 x_3,$$

que l'on considère comme l'absolu de l'espace ternaire, n'est pas nul. A cette forme correspond, pour les éléments de seconde espèce, une forme $\Phi_{\xi^2} = \Phi_{11} \xi_1^2 + \ldots$, qui n'est autre que l'adjointe

de F. M. Andoyer développe d'abord les notions et les formules relatives à la distance de deux éléments de même espèce, à l'orientation de l'espace ou d'un élément, fixée par le signe de $\sqrt{D}$ (où D est le déterminant de F), de $\sqrt{-F_{x^2}}$, ou de $\sqrt{-\Phi_{\xi^2}}$; il introduit ensuite les propositions concernant les mouvements et les invariants métriques; il définit les cercles comme des séries quadratiques doublement tangentes à l'absolu

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^2 - \alpha_4^2 F = 0;$$

chaque cercle se décompose en deux séries orientées, ou plutôt composées d'éléments orientés d'après le signe de $\sqrt{-F}$; la série tangentielle correspondante fournit de même une série circulaire de seconde espèce, ou cycle, qui peut, lui aussi, être orienté. M. Andoyer développe une suite de formules qui permettent de traiter un très grand nombre de problèmes, par exemple ceux qui concernent les cercles tangents; il traite ensuite des substitutions qui transforment un réseau de cercles ayant un élément donné en un réseau de cercles ayant aussi un élément donné, puis des coordonnées a_1, a_2, a_3, a_4 d'un cercle, défini comme le cercle orthogonal à tous les cercles pour lesquels les coefficients α_1, α_2, α_3, α_4 qui figurent dans l'équation générale ci-dessus vérifient la relation $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 = 0$. Une courbe (ou série ternaire) peut alors être définie par une relation homogène entre les coordonnées a_1, a_2, a_3, a_4, jointe à la relation qui exprime que le cercle de coordonnées a_1, a_2, a_3, a_4 a un rayon nul. L'auteur précise la signification d'une telle série ternaire *orientée*. Les séries orientées du second degré sont l'objet d'une intéressante étude.

Enfin, dans le dernier chapitre, l'auteur expose les modifications que comportent les théories précédentes dans le cas où le déterminant de l'absolu est nul.

J. T.

MÉLANGES.

SUR UNE ÉQUATION LINÉAIRE AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

Note de M. Émile COTTON.

I. Je donne, dans cette Note, quelques résultats relatifs à l'équation

$$F(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + \alpha x \frac{\partial z}{\partial x} + \beta y \frac{\partial z}{\partial y} - (\alpha\beta xy - \gamma) z = 0, \tag{1}$$

α, β, γ désignant des constantes.

En adoptant la classification que j'ai proposée (*Comptes rendus*, 30 novembre 1896; *Annales de l'École normale*, 1900, p. 211) pour les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, on voit que l'équation (1) est un type canonique [1] des équations à ds^2 euclidien, et à invariant $\frac{H}{\sqrt{\Delta}}$ constant. Il suffit, pour s'en assurer, de remarquer que les invariants h et k de M. Darboux, relatifs à cette équation, sont égaux respectivement aux constantes $\alpha + \gamma$ et $\beta + \gamma$. Il est naturel de rapprocher les équations (1) des équations d'Euler et de Poisson, dont le ds^2 est à courbure constante (mais différente de zéro) et dont l'invariant $\frac{H}{\sqrt{\Delta}}$ est aussi constant.

II. Soit (E) l'équation proposée, et

$$\ldots (E_{-2}), \quad (E_{-1}), \quad (E), \quad (E_1), \quad (E_2), \quad \ldots$$

celles qui en dérivent par l'application répétée de la méthode de Laplace.

Toutes ces équations ont la forme (1), et si l'on désigne par α_p, β_p, γ_p les constantes figurant dans (E_p), on a $\alpha_p = \alpha$, $\beta_p = \beta$, $\gamma_p = \gamma + p(\alpha - \beta)$, en supposant que l'on passe de (E_p) à (E_{p+1})

(1) On peut prendre un type canonique plus simple, mais moins symétrique avec une seule constante, comme l'a fait M. Lie.

par la substitution $z_{p+1} = \frac{\partial z_p}{\partial y} + \alpha x z_p$. Les invariants h_p, k_p de (E_p) sont donc égaux respectivement aux invariants h et k de (E) augmentés de $p(\alpha - \beta)$. On en déduit le résultat suivant : Pour que (E) soit intégrable par la méthode de Laplace, il faut que les nombres $\frac{\alpha+\gamma}{\beta-\alpha}$, $\frac{\beta+\gamma}{\beta-\alpha}$ (dont la différence est égale à 1) soient entiers. Soit p celui de ces entiers dont la valeur absolue est la plus petite, la suite de Laplace s'arrête à l'équation (E_p); il est évident qu'elle ne peut être limitée que dans un seul sens.

Dans le cas particulier où $\alpha = \beta$ l'équation (E) est identique à celles qui en dérivent par l'application de la méthode de Laplace, comme M. Darboux l'avait déjà remarqué.

III. En comparant les deux équations déduites de l'équation (1) : 1° en effectuant la substitution $z = e^{pxy+qx+ry+s}z'$, les lettres p, q, r, s désignant des constantes; 2° en changeant x, y en $x' + x_0$, $y' + y_0$ respectivement, on arrive au résultat suivant :

Si $\varphi(x, y)$ *est une solution quelconque de* (1), *on peut en déduire la solution plus générale*

$$e^{-\alpha x_0(y-y_0)-\beta y_0(x-x_0)}\varphi(x-x_0, y-y_0),$$

contenant deux constantes arbitraires x_0, y_0.

Ce résultat est très important pour la suite; on le complète en observant que $\varphi\left(\rho x, \frac{y}{\rho}\right)$, ρ désignant une nouvelle constante, est encore une solution [1].

IV. M. Lie (*loc. cit.*) a donné l'expression d'une solution de (1) dépendant de deux fonctions arbitraires. On obtient un résultat analogue, mais beaucoup plus précis, en intégrant l'équation (1) par la méthode de Riemann [2].

Pour effectuer cette intégration, on cherche d'abord les solu-

---

(1) Ces divers points peuvent être déduits des résultats énoncés dans une Note aux *Comptes rendus* (5 avril 1897), et de ceux donnés antérieurement par M. Lie (*Archiv für Mathematik*; t. VI, 1882); on peut aussi les établir à l'aide des propriétés des invariants de M. Darboux.

(2) *Voir* le Chap. IV du Livre IV (t. II) des *Leçons sur la Théorie des surfaces* de M. Darboux.

tions de (1) de la forme $\varphi(t)$, en posant $t = xy$. Un calcul facile donne, pour déterminer φ, l'équation différentielle linéaire et homogène du second ordre :

$$(2) \qquad t\varphi'' + [(\alpha + \beta)t + 1]\varphi' + (\alpha\beta t - \gamma)\varphi = 0,$$

qui est intégrable par la méthode de Laplace, et qui admet une intégrale holomorphe dans tout le plan de la variable t. Soit $\varphi(t)$ cette intégrale, nous pouvons toujours supposer que $\varphi(0) = 1$.

Considérons alors la solution plus générale (*voir* n° III)

$$u(x, y; x_0, y_0) = e^{-\alpha x_0(y-y_0)-\beta y_0(x-x_0)}\varphi(\theta),$$

où $\theta = (x - x_0)(y - y_0)$; il est évident que la fonction des quatre variables x, y, x_0, y_0 ainsi obtenue possède les propriétés suivantes :

1°

$$u(x_0, y_0; x_0, y_0) = 1;$$

2°

$$u(x_0, y; x_0, y_0) = e^{-\int_{y_0}^{y} \alpha x_0 dy};$$

3°

$$u(x, y_0; x_0, y_0) = e^{-\int_{x_0}^{x} \beta y_0 dx}.$$

La fonction $u(x, y; x_0, y_0)$ *est donc bien celle qui intervient dans l'application de la méthode de Riemann* et qui permet d'obtenir l'expression de l'intégrale de (1) prenant, ainsi que l'une de ses dérivées premières, des valeurs données sur une ligne tracée dans le plan xOy.

Il est aisé de vérifier d'ailleurs que, quelle que soit la solution φ choisie pour l'équation (2), l'expression $u(x, y; x_0, y_0)$, formée comme précédemment, vérifie l'équation (1) ou son adjointe, suivant que l'on considère u comme fonction de x et y ou de x_0 et y_0.

L'équation (2) est réductible aux équations de Bessel dans le cas de $\alpha = \beta$, c'est-à-dire lorsque (1) a ses invariants égaux. L'application de la méthode de Riemann à ce cas particulier a déjà été faite par M. Boussinesq (*Calcul intégral,* Partie complémentaire, p. 418).

En résumé, on voit bien que l'étude de l'équation (1) peut être faite, dans diverses directions, d'une façon aussi complète que celle des équations d'Euler et de Poisson [1].

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

OSTWALD'S *Klassiker der exakten Wissenschaften*. N° 103, in-8°, Leipzig, Engelmann. Cart. 2 M. 60 Pf.

Contenu : J.-L. Lagrange, Zuzätze zu Euler's Elementen der Algebra Unbestimmte Analysis. Herausgeg. von H. Weber. 171 p.

LIPPMANN (G.). — *Unités électriques absolues*. Leçons professées à la Sorbonne, rédigées par M. A. Berget. In-8°, II-244 p. avec fig. Paris, Carré et Naud.

BUCHHOLZ (A.). — *Ein Beitrag zur Mannigfaltigskeitslehre. Mannigfaltigkeiten, deren Linienelemente auf die Form*

$$ds = f\sqrt{\Sigma X_x^2} = \sqrt{\Sigma dX_x^2}$$

gebracht werden können. Gr. in-8°, VI-264 p. avec fig. Bonn, Cohen. 7 M.

ENCYCLOPÆDIE *der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*. Herausgeg. v. H. Burkhardt u. W. F. Meyer. 1. Thl.: Reine Mathematik. 1. Bd.: Arithmetik u. Algebra. Red. von W.-F. Meyer. 2. Heft. gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 3 M. 40 Pf.

HAGEN (J.-G.). — *Atlas stellarum variabilium*. (In 5 Serien). Series I. gr. in-4°, 44 p. avec 44 légendes et v p. texte. Berlin, Dames. In Leinw.-Mappe, Subscr.-Pr. 44 M., Einzelpreis. 52 M. 80 Pf.

HANDWÖRTERBUCH *der Astronomie*, herausgegeben von W. Valentiner. 17e édition, gr. in-8° avec fig. Breslau, Trewendt. 3 M. 60 Pf.

JAHRESBERICHT *der deutschen Mathematiker-Vereinigung*. Herausgeg. von G. Hauch u. A. Gutzmer. 6e volume, 2e cahier, gr. in-8°, VI-110 p. Leipzig, Teubner. 4 M.

---

[1] DARBOUX, *Leçons*, t. II, Livre IV, Chap. III.

Contenu : S. Finsterwalder, Die geometrische Grnundlagen der Photogrammetrie, avec 19 fig. — S. Finsterwalder, Mechanische Beziehungen bei der Flächen-Deformation, avec 33 fig. — G. Bohlmann, Uebersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimal-Rechnung von Euler bis auf die heutige Zeit.

Laussedat (A.). — *Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographiques.* T. I : Aperçu historique sur les instruments et les méthodes; la topographie dans tous les temps. In-8°, xi-450 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 15 fr.

Martin (W.-R.). — *Treatise on Navigation and Nautical Astronomy.* 3e édition, In-8°, 446 p. London, Longmans. 18 sh.

Sammlung *der Aufgaben des Aufgaben-Repertoriums der ersten 25 Bände der Zeitschrift f. mathemat. u. naturwiss. Unterricht,* herausgeg. von J. C. V. Hoffmann. gr. in-8°, xii-399 p. Leipzig, Teubner. Geb. 6 M.

Schaper (H. v.). — *Ueber die Theorie der Hadamard'schen Funktionen u. ihre Anwendung auf das Problem der Primzahlen.* Dissert. gr. in-8°, ix-68 p. (Göttingen, Vandenhoeck et Ruprecht.) 1 M.

Taylor (F.-G.). — *Introduction to the Differential and Integral Calculus and Differential Equations.* In-8°, 592 p. London, Longmans. 9 sh.

Poincaré (H.). — *La Theorie de Maxwell et les oscillations hertziennes.* In-8°, 80 p. Chartres, imp. Durand.

Bianchi (L.). — *Lezioni sulla Teoria delle funzioni di Variabile Complessa e delle funzioni ellitiche.* In-8°, 800 p. lith. Pise, Spoerri. 16 M.

Burkhardt (H.). — *Funktionentheoretische Vorlesungen.* 2. (Schluss-Thl.), gr. in-8°, xvii-373 p. avec nombreuses figures. Leipzig., Veit et Cie. 10 M.; relié 11 M.

Foerster (W.). — *Kalender und Uhren am Ende des Jahrhunderts.* In-8°, 79 p. Braunschweig, Westermann. 1 M. 50 Pf.

Fourrey (E.). — *Récréations arithmétiques.* In-8°, avec 106 fig. Paris, Nony et Cie. 3 fr. 50 c.

Franz (C.). — *Untersuchungen über die lineare homogene Differeentialgleichung 2 Ordnung der Fuchs'schen Klasse mit 3 im Endlichen gelegenen singulären Stellen.* (Dissert.) Gr. in-4°, 39 p. Berlin, Mayer et Müller. 2 M.

Jahrbuch (*Berliner astronomisches*), *für* 1901, *mit Angaben für die*

Oppositionen der Planeten 1-436 *f*. 1899. Herausgeg. von dem königl. astronom. Rechen-Institut unter Leitung von J. Bauschinger. Gr. in-8°, x-500 et 25 p. Berlin, Dümmler. 12 M.

JAHRBUCH *über die Fortschritte der Mathematik*, begründet von C. Ohrtmann, herausgeg. von E. Lampe. 27 Bd. Jahrg. 1896. 3 (Schluss-) Heft. Gr. in-8°. Berlin, G. Reimer. 12 M.

LONCHAMPS (G. DE). — *Cours de problèmes de Géométrie analytique*, t. III : Géométrie à trois dimensions. In-8°, XII-583 p. avec fig. Paris, Delagrave.

MITTHEILUNGEN *der mathematischen Gesellschaft zu Hamburg*. 3. Bd. 9. Heft. Redig. von Repsold, Schröder u. Busche. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 1 M.

TISSERAND (F.). — *Leçons sur la détermination des orbites*, professées à la Faculté des Sciences de Paris. In-4°, XIV-124 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 8 fr. 50 c.

MEYER (O.-E.). — *Die kinetische Theorie der Gase, in elementarer Darstellung mit mathemat. Zusätzen*. 2e édition, 2e partie. In-8°. Breslau, Maruschke et Berendt. 7 M.

DÖRRIE (H.). — *Das quadratische Reciprocitätsgesetz im quadratischen Zahlkörper mit der Classenzahl* 1. Dissert., gr. in-8°, 75 p. Göttingen, Vandenhoeck et Ruprecht. 1 M. 20 Pf.

WEBER (H.). — *Lehrbuch der Algebra*. 2e édition, 2e volume, gr. in-8°, XVI-855 p. Braunschweig, Vieweg und Sohn. 12 M.; relié 13 M. 60 Pf.

BOUCHÉ-LECLERCQ (A.). — *L'Astrologie grecque*. In-8°, XX-683 p. avec fig. Paris, Leroux.

CANTOR (G.). — *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*. Trad. de F. Marotte. In-8°, 98 p. Paris, Hermann.

FISCHER (E.). — *Ueber Potenzen mit imaginären Exponenten. Beiträge z. mathemat. Unterrichte an höhern Lehranstalten*. In-4°, 25 p. Berlin, Gaertner. 1 M.

GENOCCHI (A.). — *Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung*. Deutsch von G. Bohlmann u. A. Schepp. 2e et dernier fascicule, gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 5 M. (complet, relié, 12 M.).

GOLDSCHEIDER (F.). — *Ueber die Gauss'sche Osterformel*. 2e partie, in-4°, 30 p. Berlin, Gaertner. 1 M.

GÖRLAND (A.). — *Aristoteles und die Mathematik*. Gr. in-8°, VIII-211 p. Marburg, Elwert. 4 M. 50 Pf.

Hamilton (Sir W.). — *Elements of Quaternions*. 2e édition par C.-J. Joly. Vol. I, in-4°. London, Longmans. 21 sh.

Heigenmüller (R.). — *Elemente der höheren Mathematik, zugleich als Sammlung von Beispielen u. Aufgaben aus der analyt. Geometrie, Algeb. Analysis, Differential- u. Integralrechnung*. 2 vol. gr. in-8°, Mittweida, Polytechnische Buchhandlg. 12 M.; relié, 13 M. 50 Pf.

Scheibner (W.). — *Ueber die Differentialgleichungen der Mondbewegung*. in-8° 20 p. Leipzig, Teubner. 1 M. 50 Pf.

Weissstein (J.). — *Die rationelle Mechanik*. 2e volume : *Dynamik der Systeme; Statik u. Dynamik flüssiger Körper*. Gr. in-8°, viii-255 p. avec 31 fig. Wien, Braumüller. 7 M.

Barbarin (P.). — *Notions complémentaires sur les courbes usuelles*. In-8°, 47 p. avec fig. Paris, Nony et Cie.

Cantor (M.). — *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. 2. Bd. 1 Halbbd. Von 1200-1550. 2. Aufl. Gr. in-8°, 480 p. avec 93 fig. Leipzig, Teubner. 14 M.

Korn (A.). — *Lehrbuch der Potentialtheorie. Allgemeine Theorie der Potentiale u. der Potentialfunctionen im Raume*. Gr. in-8°, xiv-417 p. avec 74 fig. Berlin, Dümmler. 9 M.; relié 10 M.

Kronecker's (L.) *Werke*, herausgegeben auf Veranlassung der kgl. preuss. Akademie der Wissenschaften von K. Hensel. 3. Bd. 1. Halbbd. Gr. in-4°, vii-473 p. Leipzig, Teubner. 36 M.

Olbers (W.). — *Sein Leben und seine Werke. Im Auftrage der Nachkommen* herausgegeben von C. Schilling. Ergänzungsband. In-8°, iii-160 p. avec fig. et 1 planche. Berlin, Springer. 4 M.

Pietzker (F.). — *Beiträge zur Functionen-Lehre*. Gr. in-8°, v-64 p. avec 3 fig. Leipzig, Teubner. 2 M. 80 Pf.

Veth (Rud.). — *Ueber eine Verallgemeinerung der Gauss'schen Differentialgleichung*. In-4°. Basel, Schwabe. 1 M. 60 Pf.

Bernoulli (J.). — *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (*Ars conjectandi*). (1713.) 1. u. 2. Thl. Ubersetzt. u. herausgeg. von R. Haussner. In-8°, 162 p. avec 1 fig. Leipzig, Engelmann. Cart. 2 M. 50 Pf.

— Dasselbe. 3. u. 4. Thl. *Brief an einen Freund über das Ballspiel* (Jeu de paume). Uebers. u. herausgeg. von R. Haussner. In-8°, 172 p. avec 3 fig. Cart. 2 M. 70 Pf.

Otswald's Klassiker d. exakten Wissenschaften. Nos 107 et 108.

Duporcq (E.). — *Premiers principes de Géométrie moderne*. In-8°, vii-160 p. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr.

Euclidis *Opera omnia*. Edd. J.-L. Heiberg et H. Menge. Suppl. : *Anaritii in decem libros priores elementorum Euclidis commentarii. Ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi* 569 servata. Ed. M.Curtze. In-8°, xxix-389 p. avec fig. Leipzig, Teubner. 6 M.

Fehr (H.). — *Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la Géométrie infinitésimale* (thèse). In-8°, 100 p. avec fig. Paris, Carré et Naud.

Gerberti, *postea Silvestri II papae Opera mathematica* (972-1003). *Accedunt aliorum opera ad Gerberti libelli æstimandos intelligendosque necessaria per septem appendices distributa. Collegit ad fidem codicum manuscriptorum partim iterum partim primum ed., apparatu critico instruxit, commentario auxit, figuris illustravit N. Bubnov*. Gr. in-8° cxix-620 p. Berlin, Friedländer und Sohn. 24 M.

Lebon (E.). — *Histoire abrégée de l'Astronomie*. Petit in-8°, avec 16 portraits. Paris, Gauthier-Villars. 8 fr.

D'Ocagne (M.). — *Traité de Nomographie. Théorie des abaques. Applications pratiques*. In-8°, xiv-480 p. avec 177 fig. et 1 planche. Paris, Gauthier-Villars. 14 fr.; relié 17 fr.

Pascal (E.). — *Die Variationsrechnung*. Deutsch von A. Schepp. Gr. in-8°, vi-146 p. Leipzig, Teubner. Relié 3 M. 60 Pf.

D'Alembert. — *Abhandlung über Dynamik, in welcher die Gesetze des Gleichgewichts u. der Bewegung der Körper auf die kleinmöglichste Zahl zurückgeführt u. in neuer Weise abgeleitet werden, etc.* (1743), avec 4 planches. In-8°, 210 p. Leipzig, Engelmann. Cart. 3 M. 60 Pf.

Ostwald's Klassiker d. exakten Wissenschaften. N° 106.

Jamin (J.). — *Cours de Physique de l'École Polytechnique*. 2e supplément par E. Bouty : *Progrès de l'électricité* (*Oscillations hertziennes; Rayons cathodiques et Rayons X*). In-8°, 207 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 50 c.

Bianchi (L.). — *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzione e delle equazioni algebriche secondo Galois*. In-8°. Pisa, Spoerri. 10 l.

Curtze (M.). — *Nicolaus Coppernicus. Eine biographische Skizze*. Avec portrait. In-8°, 84 p. Berlin, Herm. Paetel. 2 m.

Sammlung populärer Schriften, herausgegeben von der Gesellschaft Urania zu Berlin. N° 54.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SCHILLING (F.). — UEBER DIE NOMOGRAPHIE VON M. D'OCAGNE. EINE EINFÜHRUNG IN DIESES GEBIET. 1 vol. in-8°; 47 p. Leipzig, Teubner; 1900.

Ce petit livre est la reproduction d'une conférence faite par l'auteur à la Société mathématique de l'Université de Gœttingue; l'auteur y explique très bien les méthodes de la Nomographie et en montre l'utilité; son exposition contribuera sans doute à populariser ces méthodes; chacune est expliquée sur un exemple, de manière que le lecteur saisisse facilement ce qu'elle comporte de général et soit à même de traiter des exemples analogues. La plupart de ces exemples sont naturellement empruntés au livre de M. Maurice d'Ocagne; mais l'auteur a su les grouper et les présenter sous une forme heureuse et intéressante. Celui qui aura lu les courtes pages de M. Schilling sera orienté dans le sujet et n'aura aucune difficulté à chercher, s'il en a besoin, des renseignements complémentaires dans le Traité de M. d'Ocagne.

STUDNICKA (F.). — PRAGER TYCHONIANA ZUR BEVORSTEHENDEN SÄCULARFEIER DER ERINNERUNG AN DAS VOR 300 JAHREN ERFOLGTE ABLEBEN DES REFORMATORS DER BEOBACHTENDEN ASTRONOMIE, TYCHO BRAHE. 71 p. in-8°; Prague, Imprimerie de la Société royale des Sciences de Bohême, 1901.

L'Auteur a consacré ces quelques pages à décrire pieusement les reliques de Tycho Brahe, malheureusement trop peu nombreuses, qui subsistent à Prague. D'abord quelques manuscrits : un album dédié à son fils, où l'on trouve quelques fières sentences, et quelques dates intéressantes pour la vie de Tycho; un manuel de Trigonométrie plane et sphérique; une Table de sinus sur parchemin; puis quelques livres de sa bibliothèque, en particulier les œuvres de Ptolémée, le *De revolutionibus* de Copernic annoté de la main de Tycho; un exemplaire de l'*Astronomia instaurata*

avec une dédicace manuscrite, la *Dialectica* de Ramus; enfin le sextant dont se servait Tycho Brahe et le tombeau de l'illustre astronome. La plaquette de M. Studnicka est ornée de plusieurs gravures et fac-similés. On y trouvera en particulier plusieurs portraits, dont un en couleurs.

BOEHM (K.). — Zur Integration partieller Differensialsysteme. 55 p. in-8°. Leipzig, Teubner, 1900.

Le Mémoire de M. Boehm, dédié à M. L. Königsberger, est consacré à l'étude des séries entières, qui vérifient formellement un système donné d'équations aux dérivées partielles. Sans doute, les résultats de cette étude n'acquièrent leur complète valeur que lorsque la convergence de ces séries est établie; elle ne mérite pas moins d'être poursuivie, tant pour son importance préliminaire que pour son intérêt propre; M. Boehm laisse systématiquement de côté tout ce qui concerne la convergence.

L'auteur étudie d'abord le nombre de relations qui résultent du système donné d'équations pour la détermination des dérivées partielles d'ordre donné des fonctions inconnues; ce nombre est supérieur au nombre de dérivées quand le nombre d'équations est supérieur au nombre m de fonctions inconnues; il lui est inférieur dans le cas contraire, mais, dès que m est supérieur à un, ces relations peuvent être incompatibles : les conditions pour qu'elles soient compatibles sont les *conditions d'intégrabilité*.

S'occupant ensuite du cas ($m = 1$) où il n'y a qu'une seule équation $f = 0$ avec une seule fonction inconnue, il distingue une des dérivées d'ordre le plus élevé qui figure dans le premier membre de cette équation, et précise sous quelles conditions et dans quel sens on peut dire que les équations obtenues en différentiant l'équation $f = 0$ par rapport aux variables indépendantes sont résolubles par rapport aux dérivées de la dérivée *distinguée* : de cette façon les éléments arbitraires qui figurent dans la série entière qui satisfait formellement à l'équation $f = 0$ sont nettement spécifiés.

Passant ensuite à un système de m équations à m fonctions inconnues, M. Boehm établit des conditions suffisantes sous lesquelles les équations obtenues par la différentiation des équations proposées sont de même résolubles par rapport aux dérivées d'un système de dérivées *distinguées,* sous lesquelles, par conséquent, on trouve encore des séries entières qui satisfont formellement au système proposé d'équations aux dérivées partielles. M[me] de Kowalevsky avait, dans son célèbre Mémoire inséré au Tome 80 du *Journal de Crelle,* donné de telles conditions suffisantes; mais celles auxquelles parvient M. Boehm sont plus simples, et la construction de ses séries, par exemple dans le cas d'une seule équation aux dérivées partielles avec une seule fonction inconnue, n'est pas soumise à certaines restrictions qu'impose M[me] de Kowalevsky.

On remarquera enfin comment, dans l'ordre d'idées où s'est placé l'auteur, s'introduit la notion de point (initial) singulier par rapport à une dérivée partielle d'ordre maximum.

J. T.

SCHŒNFLIES (A.). — DIE ENTWICKELUNG DER LEHRE VON DEN PUNKTMANNIGFALTIGKEITEN. BERICHT, ERSTATTET DER DEUTSCHEN MATHEMATISCHER-VEREINIGUNG. — (2[me] cahier du 8[me] Volume du *Jahresbericht.*) 1 vol. in-8°; VI-252 p. Leipzig, Teubner, 1900.

Nous avons eu l'occasion, à plusieurs reprises, de signaler l'intérêt et l'importance des Rapports publiés par la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* sur diverses branches des Mathématiques : celui-ci, qui est dû à M. Schœnflies et qui est relatif à la théorie des ensembles, ne sera pas moins bienvenu que ceux qui l'ont précédé. Voici vingt ans que M. Cantor a fondé cette théorie et qu'il s'applique à la perfectionner; plusieurs mathématiciens y ont apporté d'importantes contributions, d'autres l'ont rencontrée sur leur route et en ont fait d'heureuses applications; on ne peut plus contester ni sa portée philosophique, ni le rôle qu'elle doit tenir dans l'enseignement des principes de l'Analyse, ni les ressources qu'elle offre pour le développement général des Mathématiques; elle s'est montrée *utile* et, ainsi, le reproche

qu'on a été quelquefois tenté de lui faire, d'être non seulement une construction paradoxale mais encore une construction arbitraire, s'évanouit par l'épreuve du temps. Une exposition générale, où les choses fussent mises dans un ordre logique, où l'on trouverait toutes les idées et toutes les références essentielles, où l'on montrerait les lacunes qui restent à combler, était éminemment désirable. Dans l'excellent Livre qu'il nous a donné sur cette théorie, M. Borel avait eu en vue les applications à l'étude des fonctions; il avait dû laisser de côté bien des points importants et n'avait pu développer ni l'histoire, ni la bibliographie du sujet.

On s'attend naturellement à trouver l'une et l'autre dans le Rapport de M. Schœnflies : l'histoire et la bibliographie d'un sujet sont l'essence même d'un Rapport : s'il est assez clairement rédigé pour que le lecteur saisisse bien les définitions et les idées essentielles, qu'il puisse suivre le développement de celles-ci, s'il trouve en outre les renvois aux Mémoires et Livres qu'il devra lire s'il veut approfondir le sujet, il n'a rien à reprocher à l'auteur; mais M. Schœnflies a voulu davantage, il a voulu que le lecteur pût apprendre la théorie même dans son Livre et il en a démontré toutes les propositions fondamentales; il l'a fait d'une façon claire, concise et élégante. La plupart des Chapitres s'ouvrent par un exposé critique du sujet qui sera traité. Au lecteur, déjà orienté par cet intéressant exposé, M. Schœnflies a soin de montrer l'importance relative des propositions qu'il déduit; enfin les lacunes, là où elles subsistent, sont nettement indiquées. Son Livre ne peut manquer de rendre de très grands services.

Il est divisé en trois sections : la théorie générale des ensembles infinis, la théorie des ensembles de points, les applications aux fonctions de variables réelles.

I. L'auteur développe d'abord la notion de puissance d'un ensemble infini, de son nombre cardinal si l'on veut. La question, non encore résolue, de savoir si les puissances ont le caractère des grandeurs, si les notions $<$, $=$ telles qu'elles ont été définies par M. Cantor, s'excluent, est nettement posée. M. Schœnflies reproduit, après M. Borel, l'ingénieuse analyse par laquelle M. Bernstein a établi, comme M. Schröder l'a fait de son côté,

que deux ensembles M, N sont équivalents lorsqu'une partie de M est équivalente à N et une partie de N équivalente à M. Un chapitre est consacré aux plus simples des ensembles non dénombrables (continu à une dimension, nombres irrationnels, transcendants compris dans un intervalle donné; continu à plusieurs et à une infinité dénombrable de dimensions; ensemble des fonctions d'une variable réelle, des fonctions continues, des fonctions analytiques, etc.). L'auteur passe ensuite aux ensembles *ordonnés,* tels que de deux éléments appartenant a l'ensemble, l'un précède l'autre; il s'étend comme il convient sur l'importante notion des ensembles *bien ordonnés,* pour lesquels tout ensemble partiel a un premier élément et sur la propriété essentielle de ces ensembles. En regardant comme *semblables* deux ensembles ordonnés dont on peut faire correspondre les éléments de manière que les éléments de l'un soient rangés dans le même ordre que les éléments correspondants de l'autre, en désignant par *section d'un ensemble bien ordonné,* relative à un élément de cet ensemble, l'ensemble (évidemment bien ordonné) des éléments qui précèdent cet élément, on peut affirmer que, étant donnés deux ensembles bien ordonnés, il y a l'un des deux qui est semblable à l'autre ou à une section de l'autre. A chaque ensemble bien ordonné correspond un nombre ordinal (*Ordnungszahl*), et ces nombres ont le caractère des grandeurs. Aux ensembles finis bien ordonnés correspondent les numéros 1, 2, 3, . . . ; aux ensembles dénombrables bien ordonnés correspondent les nombres transfinis de M. Cantor :

$$\omega,\quad \omega+1,\quad \omega+2,\quad \ldots$$
$$\omega.2,\quad \omega.2+1,\quad \omega.2+2,\quad \ldots;\quad \ldots.\quad \omega.\lambda+\mu$$
$$\omega^2,\quad \ldots.\quad \omega^2\lambda+\omega\mu+\nu,\quad \ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'ensemble (transfini) des nombres finis constitue la première classe Z_1 de nombres, il est de la première puissance. L'ensemble des nombres qui correspondent aux ensembles bien ordonnés de la première puissance constitue la seconde classe de nombres; il est de la seconde puissance. L'ensemble des nombres qui correspondent aux ensembles bien ordonnés de la seconde puissance constitue la troisième classe de nombres, il est de la troisième

puissance, etc. La question de savoir si tout ensemble déterminé peut être mis sous la forme d'un ensemble bien ordonné, si en particulier la puissance du continu fait partie de la suite de puissances précédemment définie, reste à éclaircir. M. Schœnflies signale diverses applications intéressantes : par exemple le théorème de M. Vivanti sur le caractère dénombrable ou fini de l'ensemble des valeurs distinctes que prend une fonction analytique en un point de son domaine de convergence, celui de M. Volterra sur le nombre de points d'embranchement, etc. Il termine cette première section en développant les notions importantes que l'on doit à M. du Bois-Reymond sur l'infinitude des fonctions, sur les rapports et les différences de ces notions avec la théorie de M. Cantor.

II. Ce sont les ensembles de points que l'on a considérés tout d'abord; ils se sont présentés d'une façon nécessaire daus l'étude des fonctions et c'est à leur occasion que M. Cantor a commencé d'édifier sa théorie. Un tel ensemble conduit naturellement à la notion de point limite ou d'accumulation, puis à celle d'ensemble dérivé; l'emboîtement des dérivées successives d'un ensemble P amène l'introduction des nombres de seconde classe, des dérivées $P^{(\alpha)}$ dont l'indice est un nombre de seconde classe, de la dérivée $P^{(\Omega)}$ formée par les points communs à toutes les dérivées dont l'indice est un nombre de première ou de seconde classe. La décomposition d'un ensemble infini P, de dérivée P', en deux ensembles P_i, P_g dont le premier est *isolé* et le second formé des points limites de P' qui appartiennent à P, conduit aux notions d'ensemble *fermé* (*abgeschlossen*, *parfait* au sens de M. Jordan), *dense en soi*, *parfait* (au sens de M. Cantor), suivant que l'on a $P_g = P'$, $P_i = 0$ ou que ces deux égalités ont lieu simultanément; puis, relativement au domaine de H où sont situés les points de P, aux notions d'ensemble *dense partout*, quand toute partie de H contient des points de P; d'ensemble dense nulle part en H, etc. La question de la puissance d'un ensemble de points n'est pas élucidée, puisque l'on ne connaît que des ensembles de points dénombrables, ou ayant la puissance du continu, et que l'on ignore s'il y a d'autres cas possibles. La considération des ensembles dérivés conduit toutefois à un résultat important : si, en effet, la

dérivée P' est dénombrable, on parvient sûrement, par une suite finie ou dénombrable d'opérations consistant à supprimer successivement des ensembles isolés, à une première dérivée $P^{(\alpha)}$ qui est nulle, tandis que si P' n'est pas dénombrable, on parvient par le même procédé à une première dérivée $P^{(\alpha)}$ qui est un ensemble parfait. Ce théorème donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble *fermé* soit dénombrable : un tel ensemble, s'il n'est pas dénombrable, a la puissance du continu ; c'est le cas des ensembles parfaits. Outre ces propositions fondamentales, M. Schœnflies développe les propositions relatives à la *structure* d'un ensemble fermé, qui n'est dense nulle part relativement à un domaine H, propositions qu'ont mises en lumière les recherches de du Bois-Reymond et de Harnack sur les ensembles linéaires, celles de M. Schœnflies lui-même, de MM. Vivanti et Baire sur les ensembles fermés dans le plan et dans l'espace.

La notion relative au contenu d'un ensemble de points a donné lieu à d'importantes recherches dues à M. Cantor, à Hankel, du Bois-Reymond, Harnack, à MM. Veltmann, Volterra, Peano, Jordan, Borel, etc., que développe ensuite M. Schœnflies.

De nombreux exemples d'ensembles de points viennent, à la fin de cette section, illustrer les théories précédentes.

III. Nous entrons maintenant dans les applications.

Tout d'abord la théorie des ensembles a singulièrement contribué à élucider la notion de continuité, et en particulier ce qui touche à l'uniformité de la continuité. La représentation d'un ensemble sur un ensemble forme, comme l'a montré M. Jordan dans les premières pages de son *Traité d'Analyse*, un point de départ très naturel pour établir les principes de la théorie des fonctions. Signalons encore la construction d'une fonction continue au moyen de ses valeurs pour un ensemble dense partout des valeurs de la variable. Au même ordre d'idées appartient cette représentation uniforme et uniformément continue d'un ensemble dénombrable de points dense partout dans un carré sur un ensemble dénombrable de points dense partout sur un segment de droite, laquelle conduit à la représentation uniforme et continue de tous les points d'un carré sur tous les points d'un segment (Peano, Hilbert) : M. Schœnflies analyse avec soin cette représen-

tation et montre comment elle fait correspondre aux points d'une portion de droite située dans le carré un ensemble de points du segment qui n'est dense nulle part. Il passe ensuite aux fonctions ponctuellement discontinues, dont une remarque simple, due à M. Borel, permet d'éclairer la nature : il analyse les principaux résultats dus à du Bois-Reymond, à MM. Bettazzi, Brodén, Dini ; les recherches récentes de M. Baire sur les fonctions de deux variables, continues séparément par rapport à chacune des variables. En se bornant d'ailleurs aux fonctions monotones, c'est-à-dire qui ne croissent jamais ou qui ne décroissent jamais, il introduit, d'après du Bois-Reymond, ces quatre fonctions auxquelles Scheeffer a donné le nom de *dérivées supérieure* ou *inférieure, à gauche* ou *à droite,* et résume divers résultats intéressants sur la structure d'une fonction dont les dérivées se comportent d'une façon ou d'une autre aux points d'un ensemble dénombrable ou non. Il consacre ensuite un important chapitre à ces fonctions continues qui ont une infinité d'oscillations, et qui fournissent le plus grand nombre d'exemples de fonctions qui n'admettent nulle part de dérivées : elles peuvent toutefois en admettre pour certaines classes de points (Brodén) et même pour tous les points (Köpcke), bien qu'elles oscillent partout. M. Schœnflies a obtenu lui-même d'intéressants résultats sur l'ensemble des valeurs qui font acquérir à une fonction continue oscillatoire des maxima ou des minima. Passant aux intégrales définies simples et doubles, propres et impropres, l'auteur expose les principaux résultats obtenus sur ce sujet par Hankel, Harnack, par MM. Dini, Volterra, de la Vallée-Poussin, etc. C'est du Bois-Reymond qui, le premier, a observé la nécessité de soumettre à la critique le théorème fondamental du Calcul intégral, à savoir que si $F(x)$ admet la dérivée $f(x)$, inversement $F(x)$ résulte par intégration, à une constante près, puisque ce théorème devient illusoire quand la dérivée $f(x)$ n'est pas intégrable. Cette critique et celle des propositions connexes est développée dans l'avant-dernier chapitre. Dans le dernier chapitre, enfin, l'auteur traite de la convergence des séries et des suites de fonctions. On y trouvera, outre le principe de la condensation des singularités de Hankel, l'étude des points où une série convergente cesse d'être uniformément convergente, la notion de fonction de convergence d'après M. Osgood ;

la condition donnée par ce dernier, sous laquelle une série non uniformément convergente est intégrable terme par terme; les recherches de M. Baire sur la représentation d'une fonction ponctuellement discontinue au moyen d'une série de fonctions continues, l'étude des séries ponctuellement convergentes, etc.

Nous avons essayé, dans l'analyse succincte qui précède, de donner quelque idée, non des matières traitées par M. Schœnflies, mais de la richesse, de la variété et de l'importance de ces matières.

J. T.

MÉLANGES.

VALEURS ASYMPTOTIQUES DE CERTAINES SÉRIES PROCÉDANT SUIVANT LES PUISSANCES ENTIÈRES ET POSITIVES D'UNE VARIABLE RÉELLE;

Par M. Édouard LE ROY.

1. Soit une série entière

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{0}^{\infty} \alpha_n z^n.$$

Je désigne par z une variable réelle et je suppose tous les coefficients α_n positifs.

Si la série (1) converge dans tout intervalle, elle augmente indéfiniment quand z croît sans limite par valeurs positives.

Si la série (1) possède un intervalle de convergence fini, on ne restreint pas la généralité en supposant que c'est l'intervalle $(-1, +1)$. Si alors la série numérique $\sum_{0}^{\infty} \alpha_n$ est divergente, la série (1) augmente indéfiniment quand z tend vers 1.

Dans ces deux cas, je me propose de déterminer la valeur asymptotique de $f(z)$.

Les propositions que je vais établir peuvent être de quelque utilité pour la théorie des fonctions définies par un développement de Taylor. Quelques-unes d'entre elles se présentent comme les réciproques de certains théorèmes démontrés par M. Darboux dans son Mémoire *Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres*.

Je chercherai moins des résultats très généraux que des résultats simples permettant une étude facile des cas les plus usuels.

2. Examinons d'abord le cas où les coefficients positifs α_n décroissent constamment et tendent vers zéro quand n augmente indéfiniment.

J'écarte le cas où α_n tendrait vers une limite A non nulle, parce qu'alors on aurait

$$f(z) = \frac{A}{1-z} + \sum_0^\infty \beta_n z^n,$$

β_n tendant cette fois vers zéro.

Il suffit évidemment que les conditions indiquées soient remplies par les α_n *à partir d'un certain rang*. Mais, pour simplifier l'écriture, je les supposerai vérifiées dès le premier terme α_0.

Posons

$$\alpha_n = e^{-\varphi(n)}.$$

On peut toujours imaginer une fonction $\varphi(x)$ continue, positive et croissante telle que cette égalité ait lieu à partir d'une certaine valeur de n : je suppose que ce soit à partir de $n = 0$, ce qui ne diminue en rien la généralité.

Soit

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{n} = 0.$$

Alors la série (1) converge pour $|z| < 1$. Si l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\varphi(x)}\, dx$$

est divergente, il en sera de même de la série

$$\sum_0^\infty \alpha_n.$$

en vertu d'un théorème de Cauchy. Dans ces conditions, le point $z = 1$ sera un point singulier de $f(z)$ où cette fonction deviendra infinie.

Proposons-nous de voir quelle est l'allure de $f(z)$ quand z tend vers 1 par valeurs réelles et plus petites que 1.

Le théorème que je vais démontrer est la généralisation d'une remarque déjà faite par M. Appell dans le cas particulier où α_n a une valeur principale de la forme kn^{-p} [1].

Posons

$$z = e^{-\alpha}, \qquad \psi(x) = e^{-\varphi(x) - \alpha x},$$

α étant réel et positif. Comparons la série

$$f(z) = \psi(0) + \psi(1) + \ldots + \psi(n) + \ldots,$$

à l'aire de la courbe

$$y = \psi(x)$$

qui est donnée par l'intégrale

$$\mathrm{J} = \int_0^\infty e^{-\varphi(x) - \alpha x}\, dx.$$

On trouve immédiatement, par un procédé classique [2], la double inégalité

$$\mathrm{J} < f(z) < \mathrm{J} + \psi(0).$$

D'où l'égalité asymptotique

$$f(z) \backsim \mathrm{J},$$

quand α tend vers zéro [3]. On est ainsi ramené au calcul asymptotique d'une intégrale définie.

Posons

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\varphi(x)}\, dx,$$

---

(1) *Comptes rendus*, tome LXXXVII, 1878. — *Cf.* Picard, *Traité d'Analyse*, tome I, p. 207-211.

(2) Considération des rectangles de bases 1 et de hauteurs $\psi(n)$ intérieurs et extérieurs à la courbe.

(3) En effet le rapport $\frac{\psi(0)}{\mathrm{J}}$ tend vers zéro avec α, puisque le numérateur est une constante et que le dénominateur grandit indéfiniment. Donc $\frac{f(z)}{\mathrm{J}}$ tend vers 1.

et formons le rapport

$$\frac{J}{I}.$$

On a

$$0 < \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\infty} e^{-\varphi(x)-\alpha x}\,dx < e^{-\varphi\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\infty} e^{-\alpha x}\,dx < \frac{1}{\alpha}\,e^{-\varphi\left(\frac{1}{\alpha}\right)},$$

$$\frac{1}{e}\int_0^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\varphi(x)}\,dx < \int_0^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\varphi(x)-\alpha x}\,dx < \int_0^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\varphi(x)}\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\varphi(x)}\,dx > \frac{1}{\alpha}\,e^{-\varphi\left(\frac{1}{\alpha}\right)}.$$

D'où

$$\frac{1}{e} < \frac{J}{I} < 2.$$

Donc, pour α très petit, J est du même ordre de grandeur que I.

On peut aller plus loin dans la plupart des cas et montrer que $\frac{J}{I}$ tend vers une limite finie et différente de zéro quand α tend vers zéro. Il suffit d'appliquer à ce rapport la règle de L'Hospital. Si l'on pose

$$\alpha x = y, \qquad \beta = \frac{1}{\alpha},$$

le rapport des dérivées devient

$$\int_0^{\infty} e^{\varphi(\beta)-\varphi(\beta y)}\,e^{-y}\,y\,dy,$$

expression dont il est généralement facile de trouver la limite pour $\beta = \infty$ (¹). Soit, par exemple,

$$\alpha_n = \frac{1}{n^p}, \qquad (0 < p < 1).$$

(¹) Par exemple, si $x\varphi'(x)$ est une fonction décroissante, $\int_0^1 e^{\varphi(\beta)-\varphi(\beta y)}\,e^{-y}\,y\,dy$ décroît en restant supérieur à $\int_0^1 e^{-y}\,y\,dy$ et $\int_1^{\infty} e^{\varphi(\beta)-\varphi(\beta y)}\,e^{-y}\,y\,dy$ croît en restant inférieur à $\int_1^{\infty} e^{-y}\,y\,dy$, lorsque β augmente.

La limite de $\frac{J}{I}$ est alors $\Gamma(2-p)$, en sorte que l'on a

$$f(z) \backsim \frac{\Gamma(1-p)}{(1-z)^{1-p}}.$$

Mais je n'insisterai pas sur ces calculs très faciles.

Il est clair que, pour calculer I, on peut prendre telle limite inférieure d'intégration que l'on veut, pourvu qu'elle soit finie, puisqu'on peut toujours supprimer dans la série un nombre fini de termes.

On peut aussi remplacer dans I l'expression $e^{-\varphi(x)}$ par une autre expression dont le rapport à la première tende vers 1 quand x augmente indéfiniment. Soit, en effet, $\chi(x)$ une telle expression. Le rapport

$$\frac{I}{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\alpha}} \chi(x)\,dx}$$

a, d'après la règle de L'Hospital, la même limite que le rapport des dérivées

$$\frac{e^{-\varphi\left(\frac{1}{\alpha}\right)}}{\chi\left(\frac{1}{\alpha}\right)},$$

c'est-à-dire 1 par hypothèse. Ainsi, pour

$$\alpha_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n},$$

on pourrait prendre

$$e^{-\varphi(x)} = \frac{\Gamma(2x+1)}{2^{2x}\Gamma^2(x+1)}$$

et

$$\chi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}},$$

comme le montre l'emploi de la valeur asymptotique bien connue de la fonction Γ.

Enfin, on a

$$\frac{1}{1-z} - \frac{1}{\alpha} = \frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}-1} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2} + \frac{B_1}{1.2}\alpha + \ldots + (-1)^p \frac{B_{p+1}}{(2p+2)!}\alpha^{2p+1} + \ldots$$

pour

$$|\alpha| < 2\pi,$$

les coefficients B_p étant les nombres de Bernoulli. Donc la différence

$$\int_0^{\frac{1}{1-z}} e^{-\varphi(x)}\,dx - \int_0^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\varphi(x)}\,dx$$

tend vers zéro avec α. Par suite, on peut remplacer I par

$$\int_0^{\frac{1}{1-z}} e^{-\varphi(x)}\,dx$$

dans le calcul de la valeur asymptotique de $f(z)$.

Finalement, nous avons le théorème que voici. *Soit $\alpha(x)$ une fonction telle que*

$$\alpha_n = \alpha(n).$$

Soit $\beta(x)$ une fonction dont la dérivée $\beta'(x)$ soit telle que le rapport

$$\frac{\beta'(x)}{\alpha(x)}$$

tende vers 1 *quand x devient infini. La valeur asymptotique de $f(z)$ pour z voisin de* 1 *est de la forme*

$$C\beta\left(\frac{1}{1-z}\right) \qquad (C = \text{const.}),$$

pourvu que les coefficients positifs α_n aillent en décroissant jusqu'à zéro quand n croît sans limite.

On remarquera que l'on a

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \int_0^n \alpha(x)\,dx + C + \varepsilon_n,$$

C désignant une constante et ε_n une quantité qui tend vers zéro quand n augmente indéfiniment (¹). Donc la somme

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$$

(¹) Pour $\alpha_n = \frac{1}{n}$, C est la constante d'Euler.

devient infinie avec n comme l'intégrale

$$\int_0^n \alpha(x)\,dx.$$

Par conséquent, $f(z)$ augmente indéfiniment, quand z tend vers 1, de la même façon que la série des coefficients diverge.

Bref, il y a une relation étroite entre la valeur principale de α_n pour n infini, le mode de divergence de la série $\sum_0^\infty \alpha_n$ et l'ordre d'infinitude de $f(z)$ pour $z = 1$.

Voici une série d'exemples où j'ai mis dans une première colonne les valeurs de α_n et dans une seconde les valeurs asymptotiques correspondantes de $f(z)$ (¹)

$$\frac{1}{n^p} \cdots \frac{1}{(1-z)^{1-p}} \qquad (0 < p < 1),$$

$$\frac{1}{(\mathrm{L}n)^p} \cdots \frac{1}{(1-z)\left[\mathrm{L}\dfrac{1}{1-z}\right]^p} \qquad (p > 0),$$

$$\frac{(\mathrm{L}n)^p}{n^q} \cdots \frac{\left[\mathrm{L}\dfrac{1}{1-z}\right]^p}{(1-z)^{1-q}} \qquad (p > -1,\ 0 < q < 1),$$

$$\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^p \cdots \frac{1}{(1-z)^{1-\frac{p}{2}}} \qquad (0 < p < 2),$$

$$\frac{1}{n.\mathrm{L}n.\mathrm{L}^{(2)}n\ldots\mathrm{L}^{(p-1)}n.[\mathrm{L}^{(p)}n]^q} \cdots \left[\mathrm{L}^{(p)}\frac{1}{1-z}\right]^{1-q}$$

$$(\mathrm{L}^{(p)}n = \mathrm{L}\mathrm{L}^{(p-1)}n,\ q < 1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les résultats resteraient d'ailleurs les mêmes si les expressions inscrites dans la première colonne étaient seulement les valeurs principales de α_n.

3. Soit maintenant

$$\alpha_n = e^{\varphi(n)},$$

la fonction $\varphi(x)$ étant continue, positive et croissante pour $x > 0$.

(¹) A un multiplicateur constant près.

Je suppose encore

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{n} = 0,$$

en sorte que l'intervalle de convergence de la série (1) est toujours l'intervalle $(-1, +1)$. Rien n'interdit de choisir $\varphi(x)$ de telle manière que cette fonction possède des dérivées continues des deux premiers ordres : j'admets alors que $\varphi'(x)$ décroît et tend vers zéro, tandis que $\varphi''(x)$ croît et tend vers zéro lorsque x augmente indéfiniment [1]. Il suffit, bien entendu, que ces diverses conditions soient vérifiées à partir d'une certaine valeur de x : mais ce n'est pas restreindre la généralité que de les supposer remplies à partir de $x = 0$.

Cela posé, soit

$$z = e^{-\alpha} \qquad (\alpha > 0).$$

L'ordonnée de la courbe

$$y = \psi(x) = e^{\varphi(x) - \alpha x},$$

d'abord croissante, puis décroissante, passe par un maximum égal à

$$e^{\varphi(\xi) - \xi\varphi'(\xi)}$$

pour une valeur ξ de x telle que l'on ait

$$\varphi'(\xi) = \alpha.$$

Comparons la série

$$f(z) = \psi(0) + \psi(1) + \ldots + \psi(n) + \ldots$$

à l'aire de cette courbe

$$J = \int_0^{\infty} e^{\varphi(x) - \alpha x}\, dx.$$

Appelons p et $p+1$ les entiers immédiatement inférieur et supérieur à ξ. La considération des rectangles de bases 1 et de hauteurs $\psi(n)$ intérieurs et extérieurs à la courbe donne de suite la double inégalité

$$J - \int_p^{p+1} \psi(x)\, dx < f(z) < J + \psi(p) + \psi(p+1).$$

---

[1] On a donc $\varphi'(x) > 0$ et $\varphi''(x) < 0$ pour $x > 0$.

Or on a

$$\int_p^{p+1}\psi(x)\,dx<\psi(\xi),$$

$$\psi(p)+\psi(p+1)<2\psi(\xi).$$

D'autre part,

$$e^{\xi\varphi'(\xi)-\varphi(\xi)}\,\mathrm{J}>\int_\xi^\infty e^{\varphi(x)-\varphi(\xi)-(x-\xi)\varphi'(\xi)}\,dx>\int_\xi^\infty e^{\frac{(x-\xi)^2}{2}\varphi''(\xi)}\,dx.$$

D'où

$$e^{\xi\varphi'(\xi)-\varphi(\xi)}\,\mathrm{J}>\sqrt{\frac{\pi}{-2\varphi''(\xi)}}.$$

On voit par là que le produit

$$e^{\xi\varphi'(\xi)-\varphi(\xi)}\,\mathrm{J}$$

augmente indéfiniment, quand α tend vers zéro et que, par suite, ξ grandit au delà de toute limite. Donc les rapports

$$\frac{1}{\mathrm{J}}\int_p^{p+1}\psi(x)\,dx,\qquad \frac{\psi(p)+\psi(p+1)}{\mathrm{J}}$$

tendent vers zéro. Par conséquent $\frac{f(z)}{\mathrm{J}}$ tend vers 1 et l'on a

$$f(z)\backsim\mathrm{J},$$

comme au paragraphe précédent.

Pour trouver l'ordre d'infinitude de J, je distinguerai deux cas.

Soit d'abord

$$\alpha_n=n^p e^{-\varphi(n)}\qquad(p>0),$$

$\varphi(x)$ remplissant les mêmes conditions qu'au § 2. La série étudiée est alors *d'ordre fini* pour $z=1$ [au sens de M. Hadamard ([1])]. Posons

$$\mathrm{I}=\int_0^{\frac{1}{\alpha}}e^{-\varphi(x)}x^p\,dx.$$

On verrait comme au § 2 que J et I sont du même ordre de grandeur quand α tend vers zéro

$$\frac{1}{e}<\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{I}}<1+\Gamma(p+2).$$

([1]) *Thèse*, page 70.

Il y a plus : la règle de L'Hospital pourrait servir encore ici à montrer que $\frac{J}{I}$ tend en général vers une limite finie et non nulle. D'autre part, posons

$$K = \int_0^{\frac{1}{1-z}} e^{-\varphi(x)} x^p \, dx.$$

On a

$$\frac{1}{1-z} = \frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha_n}-1} = \frac{1}{\alpha} + h,$$

h tendant vers $\frac{1}{2}$ quand α tend vers zéro. Appliquons alors la règle de L'Hospital au rapport

$$\frac{K}{I}.$$

Le rapport des dérivées est

$$e^{\varphi\left(\frac{1}{\alpha}\right)-\varphi\left(\frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}-1}\right)} e^{(p+1)\alpha} \left(\frac{\alpha}{e^{\alpha}-1}\right)^{p+2}.$$

Or

$$\varphi\left(\frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}-1}\right) = \varphi\left(\frac{1}{\alpha}+h\right) = \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\right) + h\varphi'\left(\frac{1}{\alpha}+\theta h\right) \qquad (0 < \theta < 1).$$

Faisons tendre α vers zéro. Alors $\varphi'\left(\frac{1}{\alpha}+\theta h\right)$ tend vers zéro et $\frac{\alpha}{e^{\alpha}-1}$ vers 1. D'où

$$\lim_{\alpha=0} \frac{K}{I} = 1.$$

Nous retrouvons donc le même résultat qu'au § 2 : $f(z)$ est de l'ordre de K pour z voisin de 1.

On peut encore remplacer ici α_n par une expression asymptotique et, d'une façon générale, toutes les remarques faites au paragraphe précédent demeurent applicables.

Par exemple, si l'on a

$$\alpha_n = \frac{n^p}{(\mathrm{L}\, n)^q} \qquad (p > 0,\ q \text{ quelconque}),$$

il vient

$$f(z) \backsim \frac{C}{(1-z)^{p+1}\left[\mathrm{L}\,\frac{1}{1-z}\right]^q},$$

C désignant une constante, car le rapport des deux quantités

$$\frac{\beta^{p+1}}{(\mathrm{L}\beta)^q}, \quad \int_2^\beta \frac{x^p}{(\mathrm{L}x)^q}\,dx$$

tend vers 1 quand β augmente indéfiniment [1]. Ainsi, pour

$$\alpha_n = \mathrm{L}\,n!,$$

on trouve

$$f(z) \backsim \mathrm{C}\,\frac{\mathrm{L}\,\dfrac{1}{1-z}}{(1-z)^2},$$

d'après la formule

$$\Gamma(n+1) \backsim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n},$$

qui donne

$$\mathrm{L}\,n! \backsim n\,\mathrm{L}\,n.$$

De même, si l'on considère la série hypergéométrique

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\gamma+n)} z^n = \mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, z),$$

la formule

$$\Gamma(n+h) \backsim (n-1)!\,n^h$$

donne

$$\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\gamma+n)} \backsim n^{\alpha+\beta-\gamma-1}$$

et, par suite,

$$f(z) \backsim \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}}$$

pourvu que

$$\alpha+\beta > \gamma.$$

Bref, on voit que, d'une façon générale, *si $f(z)$ est d'ordre fini pour $z=1$, la partie principale de $f(z)$ ne dépend que de la partie principale de α_n*. On obtient la partie principale de $f(z)$ à un multiplicateur constant près en posant

$$n = \frac{1}{1-z}$$

dans l'expression

$$\int_0^n \alpha_n\,dn$$

---

(1) Cette règle s'applique si α_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre premier ou son inverse, le nombre des nombres premiers inférieurs à n ou son inverse, etc.

ou dans une expression asymptotiquement équivalente.

On a [1]

$$\int_0^n \alpha(x)\,dx < \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n < \int_0^{n+1} \alpha(x)\,dx.$$

D'où

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{\int_0^n \alpha(x)\,dx} \backsim 1$$

pour n infini. Donc, ici encore, $f(z)$ devient infini pour $z = 1$ de la même façon que la série des coefficients diverge. Mais nous allons voir que cela n'est plus vrai si $f(z)$ est d'ordre infini.

Supposons, en effet, que l'on ait

$$\alpha_n = \sum_0^\infty \frac{\lambda_p}{p!} n^p,$$

les λ_p étant tous positifs et la série

$$\sum_0^\infty \lambda_p x^p$$

définissant une fonction entière $G(x)$. On a

$$J = \frac{1}{\alpha} G\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Soit, par exemple,

$$\lambda_p = \frac{1}{p!};$$

il vient

$$J = \frac{1}{\alpha} e^{\frac{1}{\alpha}};$$

d'où

$$f(z) \backsim \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{1}{1-z} e^{\frac{1}{1-z}},$$

comme le montre un calcul facile. Ici $f(z)$ est d'ordre infini pour $z = 1$ et l'on constate sans peine que les règles précédentes ne s'appliquent plus.

Je vais indiquer une méthode pour traiter ce nouveau cas.

---

(1) Je pose $\alpha_n = \alpha(n)$.

4. Je poserai

$$x^2\varphi''(x) = -\psi(x)$$

et je supposerai la fonction $\psi(x)$ positive et indéfiniment croissante avec x. On verra que cette hypothèse est généralement réalisée dans les applications.

Écrivons

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = \int_0^{\xi(1-\varepsilon)} e^{\varphi(x)-x\varphi'(\xi)}\,dx + \int_{\xi(1-\varepsilon)}^{\xi(1+\varepsilon)} e^{\varphi(x)-x\varphi'(\xi)}\,dx$$
$$+ \int_{\xi(1+\varepsilon)}^{x} e^{\varphi(x)-x\varphi'(\xi)}\,dx,$$

ε désignant un nombre positif fixe aussi petit que l'on voudra ([1]) Nous allons étudier successivement J_1, J_2 et J_3 lorsque ξ grandit indéfiniment.

Occupons-nous d'abord de J_2. On a

$$e^{\xi\varphi'(\xi)-\varphi(\xi)}J_2 = \int_{\xi(1-\varepsilon)}^{\xi(1+\varepsilon)} e^{\varphi(x)-\varphi(\xi)-(x-\xi)\varphi'(\xi)}\,dx = \int_{\xi(1-\varepsilon)}^{\xi(1+\varepsilon)} e^{\frac{(x-\xi)^2}{2}\varphi''(\lambda)}\,dx,$$

λ étant compris entre x et ξ. Or $\varphi''(x)$ est négatif et décroît en valeur absolue quand x augmente. D'où

$$\int_{\xi(1-\varepsilon)}^{\xi(1+\varepsilon)} e^{\frac{(x-\xi)^2}{2}\varphi''[\xi(1-\varepsilon)]}\,dx < e^{\xi\varphi'(\xi)-\varphi(\xi)}J_2 < \int_{\xi(1-\varepsilon)}^{\xi(1+\varepsilon)} e^{\frac{(x-\xi)^2}{2}\varphi''[\xi(1+\varepsilon)]}\,dx.$$

Posons

$$(x-\xi)\sqrt{-\frac{\varphi''[\xi(1-\varepsilon)]}{2}} = y$$

dans la première intégrale et

$$(x-\xi)\sqrt{-\frac{\varphi''[\xi(1+\varepsilon)]}{2}} = y$$

dans la seconde. Il vient

$$\sqrt{-\frac{2}{\varphi''[\xi(1-\varepsilon)]}}\int_{-\xi\varepsilon\sqrt{-\frac{\varphi''[\xi(1-\varepsilon)]}{2}}}^{+\xi\varepsilon\sqrt{-\frac{\varphi''[\xi(1-\varepsilon)]}{2}}} e^{-y^2}\,dy$$
$$< e^{\xi\varphi'(\xi)-\varphi(\xi)}J_2 < \sqrt{-\frac{2}{\varphi''[\xi(1+\varepsilon)]}}\int_{-\xi\varepsilon\sqrt{-\frac{\varphi''[\xi(1+\varepsilon)]}{2}}}^{+\xi\varepsilon\sqrt{-\frac{\varphi''[\xi(1+\varepsilon)]}{2}}} e^{-y^2}\,dy.$$

([1]) Je rappelle que l'on a : $\alpha = \varphi'(\xi)$.

Or

$$\xi\varepsilon\sqrt{-\frac{\varphi''[\xi(1\pm\varepsilon)]}{2}} = \frac{\varepsilon}{1\pm\varepsilon}\sqrt{\frac{\psi[\xi(1\pm\varepsilon)]}{2}}.$$

Donc les limites d'intégration augmentent indéfiniment avec ξ et les deux intégrales tendent vers $\sqrt{\pi}$.

Par conséquent, si l'on désigne par η une quantité positive qui tend vers zéro quand ξ augmente indéfiniment, on peut écrire

$$e^{\varphi(\xi)-\xi\varphi'(\xi)}\sqrt{-\frac{2\pi}{\varphi''[\xi(1-\varepsilon)]}}(1-\eta) < J_2 < e^{\varphi(\xi)-\xi\varphi'(\xi)}\sqrt{-\frac{2\pi}{\varphi''[\xi(1+\varepsilon)]}},$$

ε étant aussi petit que l'on veut.

Considérons maintenant J_1. On a

$$J_1 = \int_0^{\xi(1-\varepsilon)} e^{\varphi(x)-x\varphi'(\xi)}\,dx < \xi e^{\varphi(\xi-\xi\varepsilon)-(\xi-\xi\varepsilon)\varphi'(\xi)},$$

puisque le coefficient différentiel va en croissant lorsque x varie de o à ξ. Or, on trouve

$$0 < \frac{J_1}{J_2} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-\eta)(1-\varepsilon)}\sqrt{\psi(\xi)}\,e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}\psi[\xi(1-\varepsilon)]}$$

en remplaçant J_1 par la limite supérieure qu'on vient de déterminer et J_2 par la limite inférieure qui a été calculée plus haut et en remarquant d'autre part que l'on a les inégalités

$$\varphi(\xi-\xi\varepsilon)-(\xi-\xi\varepsilon)\varphi'(\xi)-\varphi(\xi)+\xi\varphi'(\xi) = \frac{\xi^2\varepsilon^2}{2}\varphi''(\xi-\theta\varepsilon\xi) < -\frac{\varepsilon^2}{2}\psi[\xi(1-\varepsilon)],$$

$$\varphi''(\xi-\theta\varepsilon\xi) = -\frac{\psi[\xi-\theta\varepsilon\xi]}{\xi^2(1-\theta\varepsilon)^2} < -\frac{\psi[\xi(1-\varepsilon)]}{\xi^2} \qquad (0<\theta<1),$$

$$\psi[\xi(1-\varepsilon)] < \psi(\xi),$$

d'après les hypothèses faites. On conclut de là que $\frac{J_1}{J_2}$ tend vers zéro quand ξ devient infini. Donc J_1 est d'ordre moindre que J_2. Donc enfin J_1 disparaît devant J_2 dans le calcul de la valeur asymptotique de J.

Passons à J_3. Soit

$$\varphi(x)-x\varphi'(\xi) = -y.$$

Il vient

$$J_3 = \int_{\xi(1+\varepsilon)}^{\infty} e^{\varphi(x)-x\varphi'(\xi)}\,dx = \int_{-[\varphi(\xi+\xi\varepsilon)-\xi(1+\varepsilon)\varphi'(\xi)]}^{\infty} e^{-y}\frac{dy}{\varphi'(\xi)-\varphi'(x)}.$$

Or x varie ici de $\xi(1-\varepsilon)$ à l'infini. D'où, puisque φ' décroît,

$$\frac{1}{\varphi'(\xi)-\varphi'(x)} < \frac{1}{\varphi'(\xi)-\varphi'(\xi+\xi\varepsilon)} = -\frac{1}{\xi\varepsilon\varphi''(\xi-\theta\varepsilon\xi)} \qquad (0<\theta<1).$$

Or

$$-\varphi''(\xi-\theta\varepsilon\xi) = \frac{\psi(\xi-\theta\varepsilon\xi)}{\xi^2(1-\theta\varepsilon)^2} > \frac{\psi(\xi)}{\xi^2(1-\varepsilon)^2}.$$

Donc

$$\frac{1}{\varphi'(\xi)-\varphi'(x)} < \frac{\xi(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon\psi(\xi)}.$$

Par suite

$$0 < J_3 < \frac{\xi(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon\psi(\xi)} e^{\varphi(\xi+\xi\varepsilon)-\xi(1+\varepsilon)\varphi'(\xi)}.$$

Mais

$$\varphi(\xi+\xi\varepsilon)-\xi(1+\varepsilon)\varphi'(\xi)-\varphi(\xi)+\xi\varphi'(\xi) = \frac{\xi^2\varepsilon^2}{2}\varphi''(\xi+\theta\varepsilon\xi) \qquad (0<\theta<1)$$

et

$$\varphi''(\xi+\theta\varepsilon\xi) < -\frac{\psi(\xi)}{\xi^2(1+\varepsilon)^2}.$$

Donc

$$0 < \frac{J_3}{J_2} < \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon\sqrt{2\pi}(1-\eta)(1-\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{\psi(\xi)}} e^{-\frac{\varepsilon^2\psi(\xi)}{2(1+\varepsilon)^2}}.$$

Ainsi $\frac{J_3}{J_2}$ tend aussi vers zéro, puisque $\psi(\xi)$ augmente indéfiniment avec ξ, et par suite J_3 peut être négligé devant J_2.

La conclusion qui résulte de tous ces calculs, c'est l'égalité asymptotique

$$J \backsim J_2.$$

Dans cette formule, ε est un nombre positif quelconque.

Or on a

$$(1-\eta)\sqrt{\frac{\varphi''(\xi)}{\varphi''[\xi(1-\varepsilon)]}} < e^{\xi\varphi'(\xi)-\varphi(\xi)} J_2 \sqrt{-\frac{\varphi''(\xi)}{2\pi}} < \sqrt{\frac{\varphi''(\xi)}{\varphi''[\xi(1+\varepsilon)]}}.$$

Mais

$$\frac{\varphi''(\xi)}{\varphi''[\xi(1-\varepsilon)]} = \frac{\psi(\xi)}{\psi[\xi(1-\varepsilon)]}(1-\varepsilon)^2 > (1-\varepsilon)^2,$$

$$\frac{\varphi''(\xi)}{\varphi''[\xi(1+\varepsilon)]} = \frac{\psi(\xi)}{\psi[\xi(1+\varepsilon)]}(1+\varepsilon)^2 < (1+\varepsilon)^2,$$

puisque ψ est une fonction croissante. Donc

$$(1-\eta)(1-\varepsilon) < e^{\xi\varphi'(\xi)-\varphi(\xi)} J_2 \sqrt{-\frac{\varphi''(\xi)}{2\pi}} < (1+\varepsilon).$$

Puisque ε peut être choisi aussi petit que l'on veut, on conclut immédiatement de là que J_2 et, par suite, J sont de l'ordre de grandeur de

$$\frac{\sqrt{2\pi}\,.\,e^{\varphi(\xi)-\xi\varphi'(\xi)}}{\sqrt{-\varphi''(\xi)}}.$$

On a même, en général,

$$J \backsim \sqrt{2\pi}\,\frac{e^{\varphi(\xi)-\xi\varphi'(\xi)}}{\sqrt{-\varphi''(\xi)}},$$

comme on le verrait aisément en faisant d'abord croître ξ indéfiniment, puis tendre ε vers zéro (¹).

Pour avoir la valeur asymptotique de $f(z)$, il suffit maintenant de remplacer ξ, dans l'expression asymptotique de J, par sa valeur tirée de l'équation

$$\varphi'(\xi) = \alpha$$

et de poser ensuite

$$\alpha = \mathrm{L}\,\frac{1}{z}\cdot$$

Soit, par exemple,

$$\alpha_n = e^{n^p} \qquad (0 < p < 1).$$

Il vient

$$f(z) \backsim \sqrt{\frac{2\pi}{p(1-p)}}\,\xi^{1-\frac{p}{2}}\,e^{(1-p)\xi^p}.$$

Or ici

$$\xi = \left(\frac{p}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-p}}.$$

D'où

$$f(z) \backsim \sqrt{\frac{2\pi}{1-p}}\cdot p^{\frac{1}{2(1-p)}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2-p}{2-2p}} e^{(1-p)\left(\frac{p}{\alpha}\right)^{\frac{p}{1-p}}}.$$

Mais le rapport

$$\frac{1-z}{\alpha}$$

tend vers 1 quand α tend vers zéro, et la différence

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1-z}$$

(¹) Il suffit de poser $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{\psi(\xi)}}\cdot$

tend alors vers $-\frac{1}{2}\cdot$ On peut donc écrire, par exemple,

$$f(z) \backsim e^{-\frac{1}{8}}\,\frac{1}{1-z}\sqrt{\frac{\pi}{1-z}}\;e^{\frac{1}{4(1-z)}}$$

si $p=\frac{1}{2}\cdot$ En général on pourra facilement voir quelle est l'expression asymptotique de $f(z)$ en fonction de $1-z$.

Les calculs seront quelquefois un peu plus compliqués. Soit, par exemple,

$$\alpha_n = e^{-(\mathrm{L}n)^2}, \qquad \frac{2\,\mathrm{L}\xi}{\xi} = \alpha.$$

On a

$$f(z) \backsim \frac{1}{\xi}\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{L}\xi}}\;e^{(\mathrm{L}\xi)^2}.$$

Or

$$\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1+\eta} > \xi > \frac{2}{\alpha},$$

η étant un nombre positif quelconque. Par suite, la valeur asymptotique

$$\mathrm{H} = \frac{1}{\xi}\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{L}\xi}}\;e^{(\mathrm{L}\xi)^2}$$

donne lieu aux inégalités

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1+\eta}\sqrt{\frac{\pi}{(1+\eta)(\mathrm{L}2-\mathrm{L}\alpha)}}\;e^{(\mathrm{L}2-\mathrm{L}\alpha)^2} < \mathrm{H} < \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{L}2-\mathrm{L}\alpha}}\;e^{(1+\eta)^2(\mathrm{L}2-\mathrm{L}\alpha)^2}.$$

Dans la pratique, de telles inégalités peuvent en général rendre les mêmes services que la valeur asymptotique exacte.

5. Arrivons au cas où la série (1) définit une fonction entière de z. Soit

$$\alpha_n = e^{-\varphi(n)}.$$

La fonction $\varphi(x)$ est supposée continue et positive pour $x > 0$, ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres; φ et φ' croissent jusqu'à l'infini, φ'' décroît jusqu'à zéro. On a par hypothèse encore

$$x^2\varphi''(x) = \psi(x),$$

la fonction $\psi(x)$ étant positive et indéfiniment croissante avec x.

Enfin le rapport

$$\frac{\varphi(x)}{x}$$

devient infini avec x.

Posons

$$z = e^{\alpha} \qquad (\alpha > 0).$$

Des raisonnements tout semblables à ceux du § 3 montrent que l'on a

$$f(z) \backsim \mathrm{J} = \int_0^{\infty} e^{\alpha x - \varphi(x)}\, dx$$

quand α (et par suite z) augmente indéfiniment.

Cela étant, des calculs tout semblables à ceux du § 4 donnent l'égalité asymptotique

$$\mathrm{J} \backsim \sqrt{2\pi}.\ \frac{e^{\xi\varphi'(\xi)-\varphi(\xi)}}{\sqrt{\varphi''(\xi)}}$$

où l'on a

$$\varphi'(\xi) = \alpha.$$

Nous savons donc déterminer, dans ce nouveau cas aussi, la valeur asymptotique de $f(z)$ lorsque z augmente indéfiniment par valeurs positives. J'ajoute que les diverses remarques faites aux paragraphes précédents s'appliquent encore ici *mutatis mutandis*.

Voici un exemple

$$\alpha_n = \frac{1}{(n\,!)^p}.$$

On a ici

$$\varphi(x) = p\,\mathrm{L}\,\Gamma(x+1).$$

Or, on a, à des infiniment petits près,

$$\varphi(\xi) = p\,\mathrm{L}\,\Gamma(\xi+1) = p\left(\xi+\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}\,\xi - p\xi + \frac{p}{2}\,\mathrm{L}\,2\pi,$$

$$\varphi'(\xi) = p\,\mathrm{L}\,\xi + \frac{p}{2\xi} = \alpha,$$

$$\varphi''(\xi) = \frac{p}{\xi}.$$

D'où

$$f(z) \backsim (2\pi\xi)^{\frac{1-p}{2}}\,\frac{e^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{p}}\,e^{p\xi}.$$

Mais la formule de Gudermann

$$\begin{aligned}\mathrm{L}\Gamma(a+1) = \left(a+\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}a - a + \frac{1}{2}\mathrm{L}\,2\pi \\ + \frac{1}{12}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(a+n)^2} + \ldots + \frac{q-1}{2q(q+1)}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(a+n)^q} + \ldots\end{aligned}$$

permet d'écrire

$$\alpha = \mathrm{L}z = p\left[\mathrm{L}\xi + \frac{\mathrm{C}}{\xi}\right],$$

C tendant vers $\frac{1}{2}$ quand ξ devient infini. D'où

$$z^{\frac{1}{p}} = \xi e^{\frac{\mathrm{C}}{\xi}}.$$

Ainsi le rapport

$$\frac{z^{\frac{1}{p}}}{\xi}$$

tend vers 1 et la différence

$$z^{\frac{1}{p}} - \xi$$

vers $\frac{1}{2}$ quand ξ augmente indéfiniment. Par suite, on a

$$f(z) \backsim \frac{1}{\sqrt{p}}(2\pi)^{\frac{1-p}{2}} z^{\frac{1-p}{2p}} e^{pz^{\frac{1}{p}}}.$$

Cette formule donne l'ordre de grandeur de $f(z)$ avec plus de précision que ne le feraient les inégalités établies par M. Hadamard dans son Mémoire *Sur les fonctions entières*.

De même, pour

$$\alpha_n = e^{-n^p} \qquad (1 < p < 2),$$

on trouve

$$f(z) \backsim \sqrt{\frac{2\pi}{p(p-1)}}\left(\frac{\mathrm{L}z}{p}\right)^{\frac{2-p}{2p-2}} e^{(p-1)\left(\frac{\mathrm{L}z}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}}.$$

Et ainsi de suite.

6. Occupons-nous enfin du cas où $\varphi''(x)$ croît indéfiniment avec x, la série (1) définissant toujours une fonction entière et les autres hypothèses restant aussi les mêmes.

Si l'on pose

$$z = e^{\alpha}, \qquad \psi(x) = e^{\alpha x - \varphi(x)}, \qquad \mathrm{J} = \int_{0}^{\infty}\psi(x)\,dx.$$

on trouve encore

$$\mathrm{J} \backsim e^{\xi\varphi'(\xi)-\varphi(\xi)}\sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(\xi)}}$$

avec

$$\varphi'(\xi) = \alpha,$$

lorsque α augmente indéfiniment. La démonstration est d'ailleurs absolument la même qu'au § 4.

Cette formule nous permet déjà de calculer la valeur asymptotique d'un grand nombre d'intégrales définies : problème qui se présente dans une foule de questions.

Soit, par exemple,

$$\varphi(x) = e^x = y.$$

On a

$$\mathrm{J} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x - e^x}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-y}y^{\alpha-1}\,dx = \Gamma(\alpha).$$

D'où, en appliquant la formule trouvée,

$$\Gamma(\alpha) \backsim \alpha^\alpha e^{-\alpha}\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}},$$

résultat bien connu.

Soit encore

$$\mathrm{J} = \int_0^{\infty} e^{\alpha x - x^p}\,dx \qquad (p > 2).$$

Il vient

$$\mathrm{J} \backsim \sqrt{\frac{2\pi}{p(p-1)}}\left(\frac{p}{\alpha}\right)^{\frac{p-2}{2p-2}} e^{(p-1)\left(\frac{\alpha}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}}.$$

Et ainsi de suite.

Voyons dans ce cas quelle est la valeur asymptotique de $f(z)$: nous allons voir que ce n'est plus J.

Appelons p et $p+1$ les entiers qui comprennent ξ et posons

$$\mathrm{R}_{p+1} = \psi(p+1) + \psi(p+2) + \ldots.$$

On a

$$\frac{\mathrm{R}_{p+1}}{\psi(p+1)} = \sum_{q=0}^{q=\infty} e^{(p+1+q)\varphi'(\xi) - \varphi(p+1+q) + \varphi(p+1) - (p+1)\varphi'(\xi)}.$$

D'où

$$\frac{\mathrm{R}_{p+1}}{\psi(p+1)} = \sum_{q=0}^{q=\infty} e^{q\varphi'(\xi) - q\varphi'(p+1) - \frac{q^2}{2}\varphi''(p+1+\theta q)}.$$

θ étant compris entre o et 1. Mais φ' et φ'' croissent avec x. D'où

$$1 < \frac{R_{p+1}}{\psi(p+1)} < \sum_{q=0}^{q=\infty} e^{-\frac{q^2}{2}\varphi''(p+1)}.$$

Le second membre tend vers 1 quand ξ et, par suite, p augmentent indéfiniment. On peut donc écrire

$$R_{p+1} = \psi(p+1)(1+\varepsilon),$$

ε étant un infiniment petit quand ξ est un infiniment grand.

D'autre part, on a

$$\psi(0)+\psi(1)+\ldots+\psi(p-1) < \int_0^{p-1}\psi(x)\,dx + \psi(p-1).$$

Or

$$\frac{1}{\psi(p-1)}\int_0^{p-1}\psi(x)\,dx = \int_0^{p-1} e^{x\varphi'(\xi)-\varphi(x)+\varphi(p-1)-(p-1)\varphi'(\xi)}\,dx$$

ou bien

$$\frac{1}{\psi(p-1)}\int_0^{p-1}\psi(x)\,dx = \int_0^{p-1} e^{(x-p+1)[\varphi'(\xi)-\varphi'(p-1)]-\frac{(x-p+1)^2}{2}\varphi''[p-1+\theta(x-p+1)]}\,dx,$$

θ étant compris entre zéro et 1. D'où

$$\frac{1}{\psi(p-1)}\int_0^{p-1}\psi(x)\,dx < \int_0^{p-1} e^{(x-p+1)[\varphi'(\xi)-\varphi'(p-1)]}\,dx < \frac{1}{\varphi'(\xi)-\varphi'(p-1)}.$$

Or

$$\varphi'(\xi)-\varphi'(p-1) = (\xi-p+1)\varphi''[p-1+\lambda(\xi-p+1)],$$

λ étant compris entre zéro et 1. D'où

$$\varphi'(\xi)-\varphi'(p-1) > \varphi''(p-1),$$

et, par suite,

$$\frac{1}{\psi(p-1)}\int_0^{p-1}\psi(x)\,dx < \frac{1}{\varphi''(p-1)}.$$

On voit par là que le premier membre tend vers zéro quand ξ et, par suite, p augmentent indéfiniment. On peut donc écrire

$$\psi(0)+\ldots+\psi(p-1) = \psi(p-1)(1+\eta),$$

η étant infiniment petit avec $\frac{1}{\xi}$.

En définitive

$$f(z) = \psi(p) + (1+\varepsilon)\psi(p+1) + (1+\eta)\psi(p-1),$$

expression qui se simplifie souvent en se réduisant à l'un seulement de ses termes. Ce sont les plus grands termes de $f(z)$ qui seuls influent ici.

Soit, par exemple,

$$\varphi(x) = e^x.$$

Il vient

$$\xi = \mathrm{L}\,\alpha,$$
$$p = \mathrm{E}(\mathrm{L}\alpha).$$

Donc

$$f(z) \backsim e^{\alpha \mathrm{E}(\mathrm{L}\alpha) - e^{\mathrm{E}(\mathrm{L}\alpha)}} + e^{\alpha \mathrm{E}(\mathrm{L}\alpha) + \alpha - e.e^{\mathrm{E}(\mathrm{L}\alpha)}} + e^{\alpha \mathrm{E}(\mathrm{L}\alpha) - \alpha - \frac{1}{e} e^{\mathrm{E}(\mathrm{L}\alpha)}},$$

$\mathrm{E}(\mathrm{L}\alpha)$ désignant la partie entière de $\mathrm{L}\alpha$.

7. Je terminerai en présentant quelques observations sur les résultats obtenus dans ce Mémoire.

Des artifices de calcul très simples, sur lesquels il n'est pas utile d'insister, permettent aisément d'étendre le champ d'application des méthodes précédentes, par exemple en décomposant une série donnée en plusieurs autres qui rentrent chacune dans l'un des types étudiés.

L'emploi des fonctions majorantes permet aussi d'employer les mêmes méthodes à la recherche de certaines inégalités asymptotiques, lorsque les coefficients α_n et la variable z ne sont pas réels et positifs.

Enfin les mêmes raisonnements s'appliquent encore, comme on le verrait facilement, à d'autres types de séries, et même à des séries multiples.

Soit, par exemple,

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha(n) z^{\psi(n)},$$

$\alpha(n)$ remplissant les conditions du § 2 et $\psi(n)$ étant positif et croissant ([1]). Posons

$$z = e^{-\alpha} \qquad (\alpha > 0).$$

([1]) Je suppose la série convergente pour $|z| < 1$.

On trouvera dans bien des cas l'égalité asymptotique

$$f(z) \backsim \int_0^\infty \alpha(x)e^{-\alpha\psi(x)}\,dx,$$

lorsque z tend vers 1. Soit

$$\psi(x) = y, \qquad x = \chi(y),$$

avec

$$\psi(0) = 0, \qquad \psi(\infty) = \infty,$$

il viendra

$$f(z) \backsim \int_0^\infty \alpha[\chi(y)]e^{-\alpha y}\chi'(y)\,dy,$$

intégrale qui sera souvent de l'un des types étudiés. On aura ainsi montré l'équivalence asymptotique des deux séries

$$\sum_0^\infty \alpha(n)z^{\psi(n)}$$

et

$$\sum_0^\infty \alpha[\chi(n)]\chi'(n)z^n.$$

Tel est, par exemple, le cas pour les séries

$$\sum_0^\infty z^{n^2}$$

et

$$\frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{z^n}{\sqrt{n}}$$

quand z tend vers 1.

Voici un autre exemple, un peu différent,

$$f(z) = \sum_1^\infty \frac{(\mathrm{L}n)^z}{n^2} \backsim \int_1^\infty \frac{(\mathrm{L}x)^z}{x^2}\,dx.$$

On trouve

$$f(z) \backsim \Gamma(z+1)$$

pour z infini.

De même, pour la série de Lambert

$$L(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n},$$

on trouve, lorsque $z = e^{-\alpha}$ tend vers 1 :

$$L(z) \backsim \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{e^{\alpha x} - 1}.$$

Or

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{e^{\alpha x} - 1} = \frac{1}{\alpha} L \frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha} - 1}.$$

Par suite

$$L(z) \backsim \frac{1}{1 - z} L \frac{1}{1 - z}.$$

Et ainsi de suite.

Il serait facile de multiplier ces exemples. Le lecteur verra sans peine quelles conditions doivent être remplies dans chaque cas.

D'une façon générale, et je finirai par cette remarque, les méthodes exposées dans ce Mémoire sont surtout des méthodes pour le calcul asymptotique de certaines intégrales définies : elles s'appliquent à toutes les séries asymptotiquement équivalentes à une telle intégrale.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Encyklopädie *der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.* Herausgeg. von H. Burkhardt und W.-F. Meyer. 1. Thl. Reine Mathematik. 2. Bd. Analyse. Redig. von H. Burkhardt. 1 Heft. Gr. in-8°, 160 p. Leipzig, Teubner. 40 m. 80 pf.

Handwörterbuch *der Astronomie*, herausgeg. von W. Valentiner. 18. Lfg. Gr. in-8°, avec fig. Breslau, Trewendt. 3 M. 50 Pf.

Jahrbuch *über die Fortschritte der Mathematik,* begründet von C. Ohrtmann, herausgeg. v. E. Lampe. 28. Bd. Jahrg. 1897. (In 3 Heften.) 1. Heft. Gr. in-8°, 416 p. Berlin, G. Reimer. 13 M.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CARL-FRIEDRICH GAUSS WERKE. — ACHTER BAND HERAUSGEGEBEN VON DER K. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN. Leipzig, Teubner; 1900. 1 vol. in-4; 458 p.

Lorsque, il y a aujourd'hui près de cinquante ans, la Société Royale des Sciences de Gœttingue entreprit la publication des Œuvres de Gauss, les géomètres de tous les pays, en applaudissant à cette décision, attendirent avec impatience la réalisation d'un si noble et si utile projet. Gauss avait pour devise : *Pauca sed matura*. Aucun des écrits qui sont sortis de sa plume ne présente la moindre trace d'imperfection. S'il est quelquefois difficile de découvrir pleinement les principes supérieurs qui le guident dans la démonstration de ses théorèmes, s'il est permis aussi de préférer quelquefois d'autres modes d'exposition à ceux qu'il a adoptés, il est impossible de ne pas admirer, en se plaçant au point de vue qu'il a choisi, la rigueur, la précision élégante, la profondeur qui sont les caractères constants et essentiels de ses écrits. On savait depuis longtemps, d'ailleurs, que ces écrits ne contenaient qu'une partie de ses découvertes; sa correspondance avec Schumacher, le savant directeur de l'observatoire d'Altona, avait été publiée en 1860; grâce à elle, nous avions appris que Gauss avait profondément réfléchi sur les principes de la Géométrie; que, bien avant Abel et Jacobi, il avait découvert, dans la théorie des fonctions elliptiques, les propositions fondamentales relatives à l'inversion qui ont illustré dès le début la carrière mathématique de ces deux grands géomètres, et l'on espérait que la publication de ses Œuvres complètes, confiée à un géomètre justement estimé, M. E. Schering, aurait le double avantage de remettre sous les yeux de tous des écrits devenus rares et de nous faire connaître en même temps la partie essentielle des travaux auxquels Gauss n'avait pas eu le temps de mettre la dernière main.

Cette attente n'a pas été trompée par la publication des sept Volumes in-4° qui, de 1860 à 1871, nous ont été donnés par M. Schering. La partie des manuscrits inédits de Gauss qui nous a été

ainsi révélée a été accueillie avec grande faveur. Mieux connus et plus répandus grâce à leur réunion, les écrits de Gauss ont contribué à former et à instruire les nouvelles générations d'étudiants de la Science mathématique. Mais depuis trente ans, bien des branches de cette science, la géométrie non-euclidienne par exemple, dont Gauss avait reconnu toute l'importance et qu'il n'avait cessé d'approfondir, ont pris un développement extraordinaire; et il a semblé qu'il serait possible de tirer encore des papiers de Gauss bien des fragments nouveaux, de nature à mettre de plus en plus en lumière le génie du grand géomètre, de nature surtout à intéresser tous ceux qui se préoccupent avec tant de raison de l'introduction et du développement des notions fondamentales dans la Science. C'est ainsi qu'après trente ans d'intervalle, la Société de Gœttingue a été conduite à reprendre et à poursuivre la publication des œuvres de Gauss. A défaut de M. Schering qui avait préparé cette continuation, mais que la mort aura empêché de la réaliser, elle a confié la direction de ce travail à M. Félix Klein qui a su s'entourer d'une élite de collaborateurs dévoués et préparés à leur tâche.

D'après le plan adopté par M. Klein, il y aura lieu de compléter le Tome VII qui terminait la première publication et d'ajouter trois nouveaux Volumes.

Le Tome VII, en dehors de la réimpression déjà faite du *Theoria motus corporum cœlestium,* comprendra des morceaux étendus sur les perturbations en Astronomie.

Le Tome VIII, qui vient de paraître et que nous avons sous les yeux, renferme une série de morceaux inédits sur l'arithmétique, l'analyse et la géométrie. On y a fait figurer tous les fragments qui se rapportaient aux quatre premiers volumes déjà publiés; il contient en particulier tout ce que l'on a pu rassembler des travaux de Gauss sur les fondements de la géométrie.

Le Tome IX contiendra des compléments sur la physique mathématique, sur la géodésie et sur la triangulation du Hanovre, faite par Gauss.

Enfin le Tome X nous apportera les renseignements bibliographiques et des fragments de la correspondance.

On voit assez par ces renseignements quelles sont l'étendue et l'importance du complément que l'on se propose d'ajouter aux

Œuvres de Gauss. Nous serions tenté cependant de demander bien davantage. On nous promet seulement des fragments de la correspondance; nous la voudrions tout entière et rangée par ordre chronologique. C'est ainsi que procèdent actuellement les éditeurs des Œuvres de Huygens et de Descartes, pour le plus grand bénéfice de la science et de l'histoire. Ce qui a été déjà publié de la correspondance de Gauss avec des hommes tels que Schumacher, Bolyai, Bessel, Olbers, nous est un sûr garant que la publication intégrale réclamée par nous serait accueillie avec reconnaissance et rendrait les plus grands services. Les génies tels que Gauss doivent avoir partout le premier rang; et les pièces qui les concernent ont leur place marquée dans le recueil de leurs œuvres complètes. Il ne nous semble pas impossible d'ailleurs de lever les objections que nous prévoyons et qui pourraient s'opposer à la publication intégrale; le succès même qui est assuré d'avance à cette publication permettrait sans doute de désintéresser les éditeurs antérieurs dont nul ne songe à méconnaître les droits.

Quoi qu'il advienne de la demande que nous adressons à M. Klein, on peut être assuré que, sous son impulsion à laquelle nous devons la publication si rapide de la *Nouvelle Encyclopédie mathématique,* les volumes nouveaux des Œuvres de Gauss seront bientôt entre nos mains. Nous allons analyser aujourd'hui le Tome VIII, qui se divise en deux parties d'inégale étendue : la première, de 156 pages, comprend des compléments analytiques se rapportant aux trois premiers Volumes; la seconde, de 300 pages environ, sert de complément au quatrième Volume et se rapporte à la géométrie. Elle a été préparée par M. Stäckel.

Les fragments qui composent la première section ont été rangés sous des titres divers. L'arithmétique et l'algèbre, l'analyse et la théorie des fonctions ont été mises en œuvre par M. Fricke; les sections relatives au calcul numérique et au calcul des probabilités ont été préparées par MM. Börsch et Krüger, de Postdam.

Parmi les morceaux d'arithmétique, d'analyse et de théorie des fonctions, il faut signaler différentes recherches particulières relatives à la série de Lagrange, mais surtout la lettre mémorable du 8 décembre 1811 dans laquelle Gauss, écrivant à Bessel, donne d'une manière complète la définition d'une intégrale prise entre des limites imaginaires. A la suite de cette lettre viennent des frag-

ments qui méritent aussi d'être signalés : ils se rapportent à l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ et à la fonction modulaire.

Dans les fragments relatifs au calcul des probabilités, on a réuni un assez grand nombre de documents relatifs à la découverte de la méthode des moindres carrés dans laquelle Gauss s'est rencontré avec Legendre. Dans une lettre à Olbers, datée de juillet 1806, Gauss fait à ce sujet la remarque suivante :

« Es scheint mein Schicksal zu sein, fast in allen meinen theoretischen Arbeiten mit *Legendre* zu concurriren. So in der höhern Arithmetik, in den Untersuchungen über transcendente Functionen die mit der Rectification der Ellipse zusammenhangen, bei den ersten Gründen der Geometrie und nun wieder hier. So ist z. b. auch das von mir seit 1794 gebrauchte Princip, dass man, um mehrere Grössen, die man nicht alle genau darstellen kann, am besten darzustellen, die Summe der Quadrate zu einem Minimum machen müsse, auch in *Legendres* Werke gebraucht und recht wacker ausgeführt. »

Nous aurons sans doute à revenir sur l'analyse et la théorie des fonctions; cette fois nous avons fait une étude plus particulière des morceaux relatifs à la géométrie. Nous avons plaisir à le reconnaître, ils justifient pleinement toutes les espérances que nous avions conçues.

Nous noterons en premier lieu une série de lettres et de morceaux détachés concernant le *postulatum* d'Euclide et cette théorie des parallèles que Gauss appelle quelque part (en français) la *partie honteuse* des mathématiques. Nous voyons qu'il faudra, dans l'histoire de cette théorie, ajouter aux noms de Bolyai et de Lobatschefsky celui de F.-L. Wachter, qui fut en 1809 un des élèves de Gauss à l'Université de Gœttingue et aussi celui d'un professeur de droit à l'Université de Marbourg, Schweikart, qui, sans connaître les idées de Gauss, s'était élevé de lui-même en 1818 à la notion d'une géométrie non-euclidienne. En recevant des mains de son ancien élève Gerling un résumé du travail de Schweikart, Gauss s'empresse de répondre :

« Die Notiz von Hrn Prof. Schweikart hat mir ungemein viel Vergnügen gemacht und ich bitte ihm darüber von mir recht viel Schönes zu sagen. Es ist mir fast alles aus der Seele geschrieben. »

Les fragments qui accompagnent cette section consacrée à la géométrie non-euclidienne se rapportent aux sujets les plus variés. La raison en est facile à donner : Gauss s'intéressait à tout. Son biographe, Sartorius von Waltershausen, nous apprend qu'il se préoccupait sans cesse d'ouvrir des voies nouvelles à l'application des Mathématiques. Il tenait registre de tout : de la date et du nombre des orages dans les différentes années, du nombre de pas qui séparaient l'observatoire, où il demeurait, de tous les endroits où il avait coutume de se rendre; de la durée de la vie, évaluée en jours, des hommes les plus remarquables et, plus particulièrement, de ses amis décédés. Il ne dédaignait pas d'ailleurs de se mettre à la portée de ses correspondants, de les aider dans des travaux et dans des recherches qui pourraient paraître au-dessous de son génie. C'est ainsi que nous le voyons indiquer à Gerling une méthode élégante et irréprochable pour démontrer une formule élémentaire de trigonométrie sphérique. Gerling s'occupe de la réimpression d'un Ouvrage classique de Lorenz et il ne craint pas de consulter Gauss sur les plus petits détails; Gauss lui répond toujours avec beaucoup de bonté et d'empressement. Nous signalerons plus particulièrement dans cette correspondance ce qui concerne la symétrie des polyèdres. Sur la déclaration de Gauss qu'il est vraiment fâcheux de faire appel à la méthode d'exhaustion pour démontrer l'égalité de volume de deux polyèdres symétriques, Gerling lui communique une méthode toute semblable à celle que l'on connaît pour les triangles sphériques, et Gauss, en lui faisant ses compliments, a soin de bien dégager les principes sur lesquels elle repose (1). Gauss de son côté, sans

(1) Pour démontrer que deux polyèdres symétriques sont équivalents, il suffit évidemment d'établir la proposition pour le tétraèdre. Or la proposition devient évidente si l'on admet le volume de la pyramide; mais ce volume est toujours obtenu par la méthode d'exhaustion.

Pour établir cette égalité de volumes de deux tétraèdres symétriques, sans utiliser l'expression du volume du tétraèdre, Gerling décompose chaque tétraèdre en douze tétraèdres isoscèles qui ont pour sommet commun le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre et ont pour bases les triangles isoscèles dans lesquels chaque face est décomposée par les trois rayons du cercle circonscrit à cette face par les trois rayons qui aboutissent à ses trois sommets. Chacune de ces douze pyramides, admettant un plan de symétrie, est superposable à sa symétrique et, par suite, lui est équivalente. Cette équivalence s'étend évidemment au tétraèdre

faux amour-propre, ne craint pas d'avouer son ignorance sur des points de peu d'importance et de faire appel à l'érudition toujours empressée de ses correspondants. C'est ainsi qu'il écrit à son ami Schumacher, tantôt pour lui demander s'il connaît une construction élégante du centre de la conique déterminée par cinq points, tantôt pour réclamer des renseignements au sujet du théorème de Lexell relatif au lieu des sommets des triangles sphériques de base donnée et de surface constante. Dans une autre lettre, nous remarquons que Gauss parle à Schumacher de son ancien élève Möbius, l'auteur du *Calcul barycentrique,* en des termes qui seront allés au cœur de Möbius si, comme cela est à croire, il en a reçu tôt ou tard communication.

Parmi les questions résolues aujourd'hui dans nos traités élémentaires d'arpentage s'en trouve une qui a reçu le nom de *problème de la carte* et qui est aussi connue sous le nom de *problème de Pothenot*. Pothenot vivait du temps de Louis XIV; il a été professeur de mathématiques au Collège de France de 1684 jusqu'à sa mort survenue en 1732; il fut membre de notre Académie des Sciences de 1682 jusqu'à 1699, époque où il fut rayé par suite d'une absence trop prolongée. Dans un Mémoire de 1692 inséré en 1730 au tome X des *Mémoires de l'Académie des Sciences*, il aborda et résolut ce problème de géographie pratique : Trouver la position d'un lieu que l'on ne peut voir des principaux points où l'on observe. Par exemple, un navigateur, passant sur un écueil caché par les hautes eaux, veut pouvoir le signaler à ceux qui le suivent. Il suffit de viser trois points que l'on aperçoit, déjà rapportés sur la Carte de la contrée, et de mesurer les angles que font entre elles les trois lignes de visée. Si l'on a la bonne fortune de ne pas se trouver sur le cercle passant par les trois

---

dont le volume est la somme algébrique des volumes des douze pyramides.

Cette démonstration est fort élégante, il est facile de voir que l'on pourrait éviter les pyramides négatives qui en troublent la netteté et exigent la considération de plusieurs cas en substituant la sphère inscrite à la sphère circonscrite et en faisant la remarque que les solides à six faces admettant pour sommets les extrémités de l'une des arêtes du tétraèdre, le centre de la sphère inscrite et les projections de ce centre sur les deux faces qui se coupent suivant l'arête considérée ont un plan de symétrie qui est le plan bissecteur du trièdre suivant cette arête et, par suite, sont superposables à leur symétrique. Le tétraèdre se trouve ainsi décomposé en six solides pareils dont les volumes sont toujours additifs.

points et appelé cercle dangereux, le problème est déterminé et ne comporte qu'une solution. Si l'on est sur le cercle dangereux lui-même, il en admet une infinité.

Tel est le problème de Pothenot que l'on devrait appeler plutôt le problème de Snellius; car Willebrord Snellius, à qui l'on doit la première méthode de mesure quelque peu exacte du degré terrestre, en avait donné l'énoncé et la solution dès 1517 dans son *Eratosthenes Batavus de terræ ambitus vera quantitate*. Il a été traité aussi par John Collins dans les *Transactions Philosophiques* de 1671, d'après une question proposée par Townley.

Dans les fragments que nous donne M. Stäckel, il n'y a pas moins d'une trentaine de pages consacrées à ce problème si simple que nos écoliers les moins avancés résolvent sans grande difficulté. Comment se fait-il que Gauss s'en soit occupé avec tant de soin? comment se fait-il que, communiquant à Gerling les plus essentiels de ses résultats, il lui recommande de les garder par devers lui; car il se réserve de les publier, le moment venu? On peut répondre à cette question en rappelant ce que nous avons déjà dit : que Gauss ne traitait jamais à moitié les questions auxquelles peuvent s'appliquer les mathématiques. C'est ainsi que, dans son étude du problème de Pothenot, il examine complètement une question laissée de côté par tous les Auteurs : si les données du problème n'ont pas été empruntées à un exemple concret, si elles ont été choisies *a priori* et au hasard, le problème a-t-il encore une solution? A cette première raison il faut en ajouter une autre, plus importante et plus sérieuse : c'est que la solution de Gauss constituait l'application et, en quelque sorte, l'illustration d'une méthode générale à laquelle il ajoutait, à juste titre, beaucoup de prix : je veux parler de l'emploi des grandeurs complexes pour définir la situation des points en géométrie. Gauss n'a pas publié le Travail qu'il avait préparé sur ce sujet; il l'a négligé pour d'autres, sans doute plus importants et plus difficiles; mais Bellavites, Beltrami, Laguerre et bien d'autres géomètres, en se plaçant au même point de vue que lui, ont montré toute la fécondité du champ qu'il avait commencé à explorer [1].

---

[1] Au sujet de la représentation d'une imaginaire par un point du plan, on pourra voir, dans la premiere partie du Volume, un théorème de mécanique que

La solution du problème de Pothenot qui se trouve dans les fragments mis sous nos yeux par M. Stäckel est distincte de celle à laquelle s'attachent nos traités élémentaires. Elle repose sur la considération de trois points remarquables qui ont reçu le nom de points de Collins [1]. Nous n'y insisterons pas, mais nous remarquerons qu'en étudiant les conditions de possibilité du problème, le grand géomètre les rattache à une propriété du quadrilatère plan; il introduit la considération de ce triangle qui intervient dans toutes les démonstrations du théorème de Ptolémée et qui a pour côtés le produit des diagonales et les produits des côtés opposés du quadrilatère. C'est celui que, dans un travail déjà ancien *sur les relations entre les groupes de points, de plans et de sphères dans le plan et dans l'espace,* inséré en 1872 aux *Annales de l'Ecole Normale* nous avons étudié sous le nom de *triangle invariable* parce qu'en effet sa forme demeure invariable lorsqu'on soumet le quadrilatère, plan ou gauche, à une inversion d'ailleurs quelconque.

Gauss ne s'est pas borné à cette application restreinte des quantités complexes. Par une voie qui nous paraît aujourd'hui tout à fait naturelle, il les a appliquées non seulement à la géométrie du plan, mais aussi à celle de la sphère et à la théorie de la projection stéréographique, qui fournit, comme on sait, le moyen le plus élégant pour passer de la sphère au plan et *vice versa*. Ici, nous devons constater qu'il a connu une proposition du plus haut

---

Gauss déduit de la considération des points-racines. Il a fait le premier la remarque que, si l'on considère une équation algébrique

$$f(x) = 0$$

et si l'on place aux points racines de cette équation des masses égales attirant en raison inverse de la distance un point matériel du plan, les points-racines de la dérivée seront les positions d'équilibre de ce point matériel.

[1] Si A, B, C sont les trois points de la Carte et si M est le point à reporter, on connaît les angles que font entre elles les trois droites MA, MB, MC; le point M sera donc sur trois segments capables respectivement de ces angles et passant par deux des trois points A, B, C. Les points de Collins se construisent comme il suit : A', par exemple, est le point où la droite MA coupe, en dehors de M, le cercle MBC. En introduisant les trois points A', B', C', Gauss présente sous la forme la plus élégante les propositions auxquelles il est parvenu : les triangles A'BC, AB'C, ABC' sont directement semblables et ont pour angles ceux que font entre elles les trois droites MA, MB, MC.

intérêt, fréquemment employée aujourd'hui en analyse, en mécanique et en géométrie; nous voulons parler de la représentation d'une rotation finie quelconque par une substitution linéaire. Cette représentation n'est pas indiquée d'une manière explicite; elle résulte clairement aujourd'hui des formules données aux pages 354, 355. Ajoutons d'ailleurs qu'à la page suivante nous voyons que Gauss avait trouvé dès 1819 la construction géométrique la plus simple et la plus élégante qui soit aujourd'hui connue pour la composition de deux rotations finies.

Le chapitre suivant, intitulé *Mutations de l'espace,* nous avait été signalé à l'avance par M. Klein. Gauss y considère sous le nom de *mutations* tous les déplacements finis autour d'un point fixe suivis d'une homothétie dont le pôle est en ce point et il définit les mutations à l'aide de quatre paramètres.

Ces quatre paramètres sont précisément ceux qui figurent aujourd'hui dans la composition d'un quaternion. Gauss appelle leur ensemble l'*échelle de la mutation*. Il nous apprend comment on combine les mutations successives et il obtient ainsi des règles nécessairement identiques à celles que nous fournit maintenant la multiplication des deux quaternions correspondants; il remarque même que cette combinaison n'a pas la propriété d'être *commutative*. Tout cela est très intéressant, nous le reconnaissons volontiers avec M. Klein; nous nous permettrons toutefois de faire remarquer qu'il restait encore à faire un pas décisif avant de parvenir à ces trois unités fondamentales dont l'emploi constitue le caractère essentiel de la théorie des quaternions, une des plus belles et des plus intéressantes découvertes de l'illustre géomètre anglais Hamilton.

Nous dirons aussi un mot de quelques fragments incomplets, mais originaux, qui se rapportent à la géométrie de situation. Gauss y a abordé une question des plus difficiles : si l'on trace sur le plan une courbe fermée de forme plus ou moins complexe, faisant sur elle-même une ou plusieurs révolutions, elle pourra se couper elle-même et présenter des points doubles ou des *nœuds* en nombre plus ou moins grand. Gauss s'était proposé d'étudier les lois qui président à la distribution de ces nœuds. Il cherche d'abord quel sera leur nombre minimum quand le nombre des révolutions de la courbe sur elle-même sera donné; il cherche aussi

à reconnaître et à classer toutes les courbes qui ont un nombre déterminé de nœuds. Deux notations différentes et des plus ingénieuses permettent de définir et de représenter, dans une certaine mesure, chaque trait fermé. Gauss nous donne même l'énumération complète de tous les traits ayant cinq nœuds au plus. Ces essais inachevés susciteront, il n'en faut pas douter, des recherches intéressantes.

Nous arrivons, en terminant, à une dernière section ou M. Stäckel a réuni les fragments de manuscrits qui se rapportent aux propriétés infinitésimales des surfaces courbes. On sait que Gauss a publié deux Mémoires véritablement fondamentaux sur cette belle théorie. Le premier, qui date de 1822, avait été envoyé à l'Académie de Copenhague, en réponse à une question de prix posée sans doute sur l'initiative de Schumacher. Il porte la devise bien justifiée : *Ab his via sternitur ad majora,* et a été, nous n'avons pas besoin de le dire, couronné par l'Académie. Il a pour objet le problème des cartes géographiques. Cette belle question, que Lagrange avait résolue dans le cas des surfaces de révolution et à laquelle il avait consacré deux Mémoires dignes de son génie, se trouve abordée dans le Mémoire de Gauss pour une surface quelconque et résolue autant qu'elle peut l'être lorsqu'on s'en tient au cas général. Le second Mémoire, les *Disquisitiones generales circa superficies curvas,* publié en 1828, celui qui contient les admirables propositions relatives à la courbure totale, aux lignes géodésiques, aux triangles géodésiques, est un des principaux titres de gloire de Gauss et demeure aujourd'hui encore l'introduction la plus parfaite et la plus utile aux études de géométrie infinitésimale.

Les fragments reproduits par M. Stäckel ont pour nous le plus haut intérêt, parce qu'ils permettent de comprendre la genèse des découvertes de Gauss et de saisir en quelque sorte tous les états par lesquels elles ont passé avant de revêtir la forme définitive et un peu synthétique que l'auteur nous a seule livrée. Nous voyons maintenant que Gauss a démontré son célèbre théorème relatif à l'invariabilité de la courbure totale dans une déformation de la surface en choisissant tout d'abord sur la surface un système de coordonnées particulières, les coordonnées isothermes.

Il a ensuite consacré un travail assez étendu à l'étude d'un élé-

ment des plus intéressants. Je veux parler de la *courbure géodésique* que Gauss appelle *die Seitenkrümmung*. Gauss ne l'a plus employé dans la rédaction définitive de son travail, mais on sait que cet élément a reparu avec Ossian Bonnet et Liouville et qu'il joue aujourd'hui le rôle le plus essentiel dans l'étude des courbes tracées sur les surfaces. Ce fragment sur la courbure géodésique nous donne aussi le secret des artifices de calcul grâce auxquels Gauss a obtenu les formes particulièrement élégantes de l'équation différentielle des lignes géodésiques qui figurent dans les *Disquisitiones*. Nous avons enfin une première rédaction de ces *Disquisitiones*, dans laquelle Gauss commence par la théorie des courbes planes pour bien mettre en évidence les analogies qui l'ont conduit à sa définition de la courbure totale d'une surface. Cette première rédaction contient également une démonstration du théorème relatif à la courbure totale d'un triangle géodésique, tout à fait distincte de celle qui figure dans la rédaction à laquelle Gauss s'est définitivement arrêté. La publication de ces fragments étendus donnera lieu à un examen à la fois intéressant et utile. Dans tous les cas, lorsqu'on voit Gauss supprimer dans la suite de son travail les morceaux si importants que nous venons de citer, on ne peut l'accuser d'être de ceux dont la coutume est de ne rien laisser perdre.

Les *Disquisitiones generales* sont rédigées avec un soin extrême et une parfaite unité. Il semble que Gauss y ait éliminé tous les éléments qui n'étaient pas nécessaires à la démonstration du théorème par lequel il termine son Mémoire, théorème qui constitue une généralisation si élégante et si utile du célèbre théorème de Legendre relatif aux triangles sphériques. Dans nos *Leçons sur la théorie des surfaces*, où nous avons commenté le Mémoire de Gauss, nous avons montré comment un simple rapprochement de deux systèmes de formules donnés par le grand géomètre conduit sans effort à la solution générale d'un problème important : formation de l'équation aux dérivées partielles des surfaces applicables sur une surface donnée. Un fragment reproduit par M. Stäckel, et que M. Weingarten était le plus qualifié pour commenter, nous apprend que Gauss s'était occupé de cette belle question. La solution qu'il en propose repose sur des principes cachés et méritera d'être approfondie.

Une dernière réflexion : dans une lettre à Schumacher, où Gauss insiste sur les difficultés qu'il rencontre dans la rédaction de son travail et où il exprime son désir de lui donner une forme telle *ut nihil amplius desiderari possit*, ce sont ses propres expressions, il se plaint beaucoup de l'obligation où il est d'avoir à se détourner de ses recherches pour s'occuper de son cours. Voici comment il s'exprime à ce sujet : « Wenn ich meinen Kopf voll davon habe, stellen Sie sich schwerlich vor, wie angreifend es manchmal für mich ist, vormittags nach einer schlaflosen Nacht, die ich leider jetzt häufig habe, mich mit Frische in die Sachen hineinzudenken die ich meinen Zuhörern vorzutragen habe, und nachher wieder mit Lebendigkeit gleich wieder in meinen Meditationen zu Hause zu sein. »

Voilà un passage dont Arago aurait tiré parti pour revenir sur les doléances qui lui étaient habituelles et pour demander que les savants ne fussent détournés de leurs travaux par aucune occupation étrangère à leurs études. Je crois bien qu'Arago n'aurait, aujourd'hui comme de son temps, aucune chance d'être écouté. Dans tous les cas, tout le monde conviendra que, si l'on avait créé pour les savants quelques pensions ou sinécures, Gauss aurait eu tous les droits possibles à être pourvu le premier, et la Science n'y aurait rien perdu. G. D.

WALRAS (L.). — Éléments d'Économie politique pure ou théorie de la richesse sociale; 4e édition. 1 vol. in-8°; xx-401 p. Lausanne, Rouge. Paris, Pichon; 1900.

« L'économie politique pure, dit l'auteur, est essentiellement la théorie de la détermination des prix sous un régime hypothétique de libre concurrence absolue. L'ensemble de toutes les choses, matérielles ou immatérielles, qui sont susceptibles d'avoir un prix, parce qu'elles sont *rares*, c'est-à-dire à la fois *utiles* et *limitées* en *quantité*, forme la *richesse sociale*. C'est pourquoi l'économie politique pure est aussi la *théorie de la richesse sociale*. »

On sait que M. Walras est un des premiers qui, après Cournot,

ont su montrer l'utilité des considérations mathématiques dans l'économie politique; si sur quelques points il s'est rencontré avec des prédécesseurs dont il ignorait les travaux, ces points n'en sont sans doute que mieux établis et, par la persévérance de ses recherches, il a contribué puissamment à un mouvement scientifique dont l'importance, dans plusieurs pays, ne peut plus être méconnue.

Cette quatrième édition de son principal Ouvrage a un caractère définitif. Outre plusieurs améliorations de détail, l'auteur a introduit une théorie nouvelle de la monnaie : l'équation d'égalité de l'offre et de la demande de la monnaie, au lieu d'être posée empiriquement, « est déduite rationnellement d'équations d'échange et de satisfaction maxima en même temps que les équations d'égalité de l'offre et de la demande des capitaux circulants. »

Voici le sommaire des sujets traités par M. Walras : Objet et divisions de l'économie politique et sociale. — Théorie de l'échange de deux marchandises entre elles. — Théorie de l'échange de plusieurs marchandises entre elles. — Théorie de la production. — Théorie de la capitalisation et du crédit. — Théorie de la circulation et de la monnaie. — Conditions et conséquences du progrès économique. Critique des systèmes d'économie politique pure. — Des tarifs, du monopole et des impôts. — Théorie géométrique de la détermination des prix. — Observations sur le principe de la théorie du prix de MM. Auspitz et Lieben.

J. T.

PICARD (E.) — SUR LE DÉVELOPPEMENT DEPUIS UN SIÈCLE DE QUELQUES THÉORIES FONDAMENTALES DANS L'ANALYSE MATHÉMATIQUE. Conférences faites à Clark-University (États-Unis). — Extrait de la *Revue générale des Sciences* des 30 janvier, 15 mars et 30 avril 1900. Un vol. in-8°; 91 p. Paris, A. Colin; 1900.

Tous les mathématiciens ont lu, dans la *Revue générale des Sciences,* les trois belles conférences que M. Émile Picard a faites l'an dernier à l'Université Clark (Massachusetts) et où il a retracé,

avec l'autorité et l'élévation de pensée qui lui sont propres, le développement, pendant un siècle, de quelques-unes des idées les plus importantes des Mathématiques : il a su embrasser le présent et le passé, jeter même un regard vers l'avenir, en montrant ce qui restait à faire et quelle moisson on pouvait espérer. Une analyse de ces conférences, qu'il ne nous appartiendrait pas de faire, serait oiseuse après la publicité et le retentissement qu'elles ont eus. Nous nous contentons de signaler leur publication à part, dans un petit volume que chacun sera heureux de posséder et de relire.

FORSYTH (A.-R.). — THEORY OF FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE. — Second edition. Cambridge University Press; in-4°, XXIV-782 p. 1900.

En 1893 nous rendions compte à nos lecteurs de l'Ouvrage que M. R. Forsyth venait de publier sur la théorie des fonctions. Nous donnions une analyse détaillée de ce consciencieux travail consacré à une des branches à la fois les plus récentes et les plus importantes des Sciences mathématiques. L'auteur nous y développait d'abord la théorie des fonctions uniformes ou multiformes suivant le point de vue de Cauchy et de Weierstrass. Il nous donnait ensuite un exposé des méthodes de Riemann qui lui permettait de faire connaître à ses lecteurs les points essentiels de la théorie des fonctions abéliennes. L'ouvrage se terminait par une application des théorèmes généraux à l'étude du problème de la représentation conforme et par un exposé très instructif des éléments de cette théorie des groupes discontinus de substitutions et des fonctions fuchsiennes dont on doit la création et les principes essentiels à M. Poincaré.

Comme il fallait s'y attendre, l'exposition systématique de M. Forsyth où se trouvaient mises en lumière et coordonnées une foule de théories éparses dans les Mémoires originaux a été accueillie avec grande faveur par les étudiants et les géomètres. La meilleure preuve que l'on puisse en donner, nous la trouvons dans cette édition nouvelle, succédant si rapidement à la première, que nous présente aujourd'hui M. Forsyth.

Le plan de l'Ouvrage est resté le même; l'auteur, bien entendu, a mis à profit, comme il arrive toujours en cas pareil, les remarques, les critiques de détail qui lui ont été faites par ses amis ou par ses correspondants; mais il n'a rien changé d'essentiel, par exemple, à son exposition de la théorie des fonctions suivant le point de vue de Cauchy et de Weierstrass.

Dans l'exposé de la méthode de Riemann, au contraire, M. Forsyth, sans rien modifier de la marche générale, a apporté des changements assez notables en un point important. Nous voulons parler du théorème célèbre par lequel Riemann a établi, en s'appuyant sur le principe de Dirichlet, l'existence de certaines classes de fonctions uniformes et continues dans toutes les régions de la surface, sauf le long des coupures où elles doivent avoir des modules de périodicité donnés. L'auteur, pour établir cette proposition, avait suivi la méthode de M. Schwarz; cette partie de son exposition a été beaucoup modifiée et simplifiée.

Dans son Ouvrage récent sur la théorie des équations différentielles, M. Forsyth avait reproduit tout un développement relatif à l'étude de ces équations différentielles qui ont été considérées par Briot et Bouquet et qui consistent en une simple relation algébrique entre la fonction et sa dérivée. Pour cette raison, il a cru inutile de maintenir ici encore cette théorie, qui figurait dans la première édition de la *Theory of functions* et il l'a remplacée par une exposition des éléments de la théorie des substitutions birationnelles et du théorème d'Abel. Ces additions avaient leur place naturellement indiquée dans une théorie des fonctions.

Ces courtes remarques suffiront, croyons-nous, à nos lecteurs; elles leur montreront que l'Ouvrage de M. Forsyth doit continuer à rendre les plus grands services à la branche des Mathématiques dont il contient une excellente exposition.

MÉLANGES.

SUR UNE TRANSFORMATION DE BÄCKLUND;

PAR M. J. CLAIRIN.

L'une des transformations de Bäcklund les plus intéressantes est celle qui a été indiquée d'abord par Lie et généralisée par M. Darboux et que l'on rencontre dans l'étude des surfaces à courbure totale constante : relativement au groupe des mouvements dans l'espace, il existe quatre invariants si l'on considère simultanément deux éléments du premier ordre (x, y, z, p, q), (x', y', z', p', q'); en égalant ces invariants à des constantes on trouve les équations de la transformation dont il s'agit.

Les grandes analogies qui existent entre le groupe des mouvements dans l'espace ordinaire et le groupe des mouvements dans l'espace non euclidien conduisent à penser que l'on peut trouver dans la géométrie non euclidienne une transformation analogue : il en est, en effet, ainsi comme on peut le montrer par une méthode toute semblable à celle de M. Darboux.

Si l'équation de la quadrique fondamentale (S) est

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0,$$

les équations de la transformation que nous voulons considérer seront

$$\frac{[xx' + yy' + zz' + 1]^2}{[x^2 + y^2 + z^2 + 1][x'^2 + y'^2 + z'^2 + 1]} = k^2,$$

$$\frac{[p(x - x') + q(y - y') - (z - z')]^2}{[p^2 + q^2 + (px + qy - z)^2 + 1][x'^2 + y'^2 + z'^2 + 1]} = m^2,$$

$$\frac{[p'(x' - x) + q'(y' - y) - (z' - z)]^2}{[x^2 + y^2 + z^2 + 1][p'^2 + q'^2 + (p'x' + q'y' - z')^2 + 1]} = n^2,$$

$$\frac{[pp' + qq' + (px + qy - z)(p'x' + q'y' - z') + 1]^2}{[p^2 + q^2 + (px + qy - z)^2 + 1][p'^2 + q'^2 + (p'x' + q'y' - z')^2 + 1]} = l^2,$$

où k, m, n, l désignent quatre constantes. Ces équations définissent une transformation de Bäcklund (Θ); un calcul facile montre en effet que les valeurs de r, s, t qui correspondent à

l'élément $x = y = z = p = q = 0$ doivent satisfaire à l'équation

$$(1 - n^2 - k^2)(rt - s^2) + (nl - km)(r + t) + 1 - m^2 - l^2 = 0;$$

$rt - s^2$ et $r + t$ sont les valeurs pour l'élément origine des deux invariants différentiels du second ordre I et J que possède le groupe des transformations projectives qui laissent (S) invariante

$$\mathrm{I} = \frac{[x^2 + y^2 + z^2 + 1]^2}{[p^2 + q^2 + (px + qy - z)^2 + 1]^2}(rt - s^2),$$

$$\mathrm{J} = \frac{[x^2 + y^2 + z^2 + 1]^{\frac{1}{2}}}{[p^2 + q^2 + (px + qy - z)^2 + 1]^{\frac{3}{2}}}$$
$$\times \left\{[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t][x^2 + y^2 + z^2 + 1] - (y + qz)^2 r - 2(y + qz)(x + pz)s - (x + pz)^2 t\right\}.$$

Étant donné un élément quelconque, il est toujours possible de le ramener à l'élément origine par une transformation du groupe considéré, par conséquent la transformation (Θ) définit un système de surfaces qui sont les intégrales de l'équation

$$(\alpha) \qquad (1 - n^2 - k^2)\mathrm{I} + (nl - km)\mathrm{J} + 1 - m^2 - l^2 = 0.$$

Par une transformation de contact simple et qui est de tous points analogue à la dilatation on peut toujours simplifier les équations de la transformation (Θ) et ramener m et n à la valeur 0. L'équation (α) devient alors, en remplaçant I par sa valeur,

$$(\beta) \qquad (1 - k^2)\frac{(rt - s^2)(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2}{[p^2 + q^2 + (px + qy - z)^2 + 1]^2} + 1 - l^2 = 0,$$

et définit les surfaces à courbure totale constante de la géométrie non euclidienne.

Il existe donc pour ces surfaces des transformations qui se rapprochent beaucoup de celles que l'on connaît dans le cas de la géométrie ordinaire.

La théorie précédente n'est du reste pas sans application à la géométrie euclidienne : étant donnée une surface, si ρ', ρ'' sont les rayons de courbure principaux, r le rayon vecteur et d la distance de l'origine au plan tangent, les intégrales de (β) sont caracté-

risées par la relation

$$\rho'\rho''(1+d^2)^2 + \frac{1}{c}(1+r^2)^2 = 0,$$

c désignant une nouvelle constante. La recherche de ces surfaces est liée à la solution du problème suivant : *Trouver toutes les surfaces dont l'élément linéaire peut être mis sous la forme*

$$\frac{1}{c^2}\frac{du^2}{(1+u^2)^4} - \frac{2}{c}\frac{u\,du}{(1+u^2)^2}\frac{dv}{(1+2v)^2} - \frac{2v\,dv^2}{(1+2v)^4}.$$

Cet élément linéaire convient au paraboloïde

$$2iz - \frac{1}{c} + cx^2 + y^2 = 0.$$

SUR QUELQUES PRINCIPES ÉLÉMENTAIRES DE NOMOGRAPHIE;

PAR M. M. D'OCAGNE.

Les principes de Nomographie qui sont le plus couramment applicables à la représentation cotée des équations à trois et à quatre variables pourraient figurer, à titre d'utile application, dans les Cours élémentaires de Géométrie analytique ([1]). C'est à ce point de vue que nous en reprenons ici l'exposé, renvoyant pour la théorie générale au Traité ([2]) dans lequel nous avons envisagé le sujet avec toute l'ampleur qu'il comporte non seulement pour les équations à trois et à quatre variables, de beaucoup les plus fréquentes dans la pratique, mais encore pour les équations à un nombre quelconque de variables.

([1]) Sur l'utilité d'une telle introduction, voir ce qu'a dit M. J. Tannery dans son analyse du Traité cité ci-dessous (*Bull. des Sc. math.*, 2e s., t. XXIII, p. 176).

([2]) *Traité de Nomographie* (Paris, Gauthier-Villars; 1899). Cet ouvrage sera, dans la suite de cet article, désigné par les lettres *T. N.* Un résumé en a été donné, en langue allemande, par M. F. Schilling, Professeur à l'Université de Göttingen, sous le titre : *Ueber die Nomographie von M. d'Ocagne* (Leipzig, Teubner; 1900).

I. — Systèmes d'éléments cotés.

1. *Éléments à une cote.* — Si l'on figure sur un plan un système d'éléments géométriques dépendant d'un paramètre, en inscrivant à côté de chacun d'eux une *cote* égale à la valeur correspondante de ce paramètre, on obtient un *système d'éléments à une cote.*

Ces éléments pourront être définis soit au moyen de coordonnées ponctuelles, par une équation de la forme

$$F(x, y, \alpha) = 0,$$

soit au moyen de coordonnées tangentielles par une équation de la forme

$$F(u, v, \alpha) = 0.$$

Ils seront dits les éléments (α). Il est bien clair, d'ailleurs, que, pratiquement, ces éléments ne seront effectivement figurés que pour quelques valeurs de α, choisies de préférence en progression arithmétique, et même seulement entre certaines limites définies par les besoins de l'application que l'on a en vue.

Les coordonnées ponctuelles x et y seront presque toujours des coordonnées cartésiennes rectangulaires, et les coordonnées tangentielles u et v des coordonnées parallèles [1], d'un emploi sensiblement plus commode pour ce genre d'application que les coordonnées plückériennes.

On obtient les systèmes d'éléments à une cote les plus simples en supposant l'équation $F = 0$ linéaire soit en x et y, soit en u et v. Dans le premier cas, on obtient un système de *droites à une cote* tangentes à une ligne qui est dite leur *enveloppe;* dans le second, un système de *points à une cote* distribués sur une ligne qui est dite leur *support.* L'enveloppe se réduit à un point, ou le

---

[1] Nous avons consacré en 1884, dans les *Nouvelles Annales*, à ces coordonnées une étude détaillée, reproduite ensuite dans notre brochure *Coordonnées parallèles et axiales* (Paris, Gauthier-Villars; 1885), tandis que M. K. Schwering publiait sur le même sujet sa brochure : *Theorie und Anwendung der Liniencoordinaten* (Leipzig, Teubner; 1884). Pour ce qui est indispensable aux applications nomographiques, voir : *T. N.*, p. 1-5.

support à une droite, lorsque l'équation $F = 0$ ne renferme α que dans une certaine fonction par rapport à laquelle elle est linéaire, c'est-à-dire lorsqu'elle est de la forme

$$F_1 + f(\alpha) F_2 = 0,$$

F_1 et F_2 étant des fonctions linéaires de x et y, ou de u et v seulement.

Un système de points à une cote prend le nom d'*échelle rectiligne* ou d'*échelle curviligne* suivant la nature de son support.

2. *Points à deux cotes.* — Un système d'éléments géométriques à deux paramètres donnera de même un *système d'éléments à deux cotes,* lorsque ces éléments seront susceptibles d'un certain mode de figuration sur un plan. Une telle figuration ne sera d'ailleurs généralement pas possible, comme il est facile de s'en rendre compte par la remarque que voici : Si, donnant à l'un des paramètres une valeur fixe, on fait varier l'autre, on obtient un système d'éléments à une cote que l'on peut représenter sur un plan ; mais, si l'on construit ainsi les systèmes correspondant aux diverses valeurs qu'il convient d'attribuer au premier paramètre, ces divers systèmes, en se superposant, produiront un enchevêtrement absolument inextricable, sauf dans les cas qui vont être examinés, et *seulement* dans ces cas.

En premier lieu, si les éléments dont il s'agit sont des points, chacun des systèmes à une cote qui viennent d'être envisagés ne comprenant que des points situés sur un certain support, les divers supports correspondant aux valeurs du premier paramètre pourront coexister sur un même plan, d'où la possibilité de représenter des *points à deux cotes.*

Soit

$$u f(\alpha, \alpha') + v \varphi(\alpha, \alpha') + \psi(\alpha, \alpha') = 0,$$

l'équation tangentielle définissant ces points. Suivant qu'on donne à l'un des paramètres α ou α' une valeur fixe et que l'on fait varier l'autre, on obtient des points situés soit sur une ligne (α), soit sur une ligne (α'). Ces deux systèmes de lignes (α) et (α') forment un *réseau* dans lequel le point (α, α') est celui qui se trouve à la rencontre de la ligne (α) et de la ligne (α').

3. *Lignes condensées à deux cotes.* — Lorsque les éléments (α, α') ne sont plus des points mais des lignes, ils ne peuvent coexister sur un même plan que dans le cas où les systèmes d'éléments à une cote correspondant aux diverses valeurs attribuées à l'un des deux paramètres coïncident, *aux cotes près*. Cette circonstance ne se produit que si, dans l'équation qui définit les éléments considérés, les paramètres α et α' peuvent être réunis sous un même signe fonctionnel, c'est-à-dire si cette équation est de la forme

$$F[x, y, \theta(\alpha, \alpha')] = 0.$$

En effet, tous les éléments (α, α') correspondant à des couples de valeurs de α et α', pour lesquels *la fonction* $\theta(\alpha, \alpha')$ *a une même valeur* t, sont alors coïncidents, et l'ensemble de tous les éléments (α, α') se réduit à un système d'éléments à une cote (t), chacun de ces éléments (t) correspondant à une infinité de couples de valeurs de α et α'. Les éléments (α, α') sont alors dits *condensés* en les éléments (t).

Comment, en ce cas, pourra-t-on figurer les divers couples de valeurs des paramètres α et α' correspondant à chaque élément (t)? Par le procédé bien simple que voici : A travers le faisceau des lignes (t) définies par l'équation [1]

$$F(x, y, t) = 0,$$

traçons un faisceau de lignes absolument quelconques que nous faisons dépendre de l'un des deux paramètres, α par exemple, par une équation telle que

$$\varphi(x, y, \alpha) = 0.$$

Si maintenant nous nous fixons une certaine valeur pour α' et si nous considérons tous les couples de valeurs correspondants de α et t résultant de l'équation

$$\theta(\alpha, \alpha') = t,$$

nous voyons que les points de rencontre des lignes (t) et (α) cor-

---

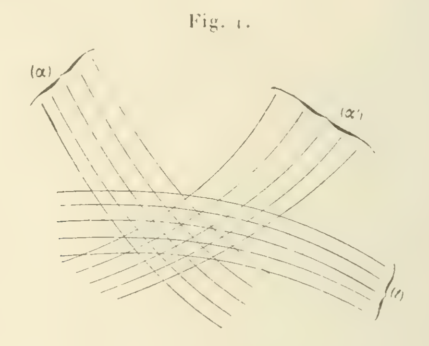
[1] S'il s'agit d'éléments définis en coordonnées tangentielles on peut toujours, pour la solution de ce problème, prendre leur équation en coordonnées ponctuelles, déduite par le procédé que l'on connaît de leur équation tangentielle.

respondantes se trouveront sur une ligne, dont l'équation

$$\psi(x, y, \alpha') = 0$$

résulte de l'élimination de α et t entre les trois dernières équations écrites, et qui pourra être cotée au moyen de la valeur choisie pour α'. En faisant varier cette valeur de α', on obtiendra un faisceau de lignes (α') défini par la dernière équation et qui, joint au faisceau des lignes (α), choisi arbitrairement, fait connaître les divers couples de cotes afférents aux lignes du système (t) (*fig.* 1).

Fig. 1.



L'ensemble des faisceaux (α) et (α') forme alors un réseau qui peut être dit le *réseau de cotes* du système (t), et nous voyons qu'*à chaque élément condensé* (t) *correspondent les couples de cotes de tous les points du réseau* (α, α') *par lesquels passe cet élément.*

Si les éléments condensés (t) sont des droites parallèles, leur ensemble, y compris leur réseau de cotes, constitue ce qu'on appelle une *échelle binaire*.

4. *Droites à deux cotes. Doubles enveloppes.* — Aux éléments qui viennent d'être examinés se bornent ceux qui sont susceptibles d'une représentation *permanente* sur un plan; mais, l'introduction de systèmes mobiles permet d'accroître le champ des éléments à deux cotes utilisables dans la construction des abaques. On conçoit, en effet, que les éléments d'un système à deux cotes puissent être obtenus, en certains cas, soit par les déplacements à deux paramètres d'une même ligne tracée sur un

plan mobile glissant sur le premier, soit par les déplacements à un paramètre d'un système de lignes tracées sur un tel plan mobile. Pour nous borner au cas le plus simple, en même temps que le plus intéressant au point de vue pratique, il est bien clair que, si les éléments à deux cotes sont des droites, on pourra les engendrer tous au moyen d'une droite mobile. Toute la question est de déterminer la position de cette droite pour un couple donné de valeurs des paramètres correspondants. Soit donc

$$xf(\alpha, \alpha') + y\varphi(\alpha, \alpha') + \psi(\alpha, \alpha') = 0,$$

l'équation d'une droite à deux cotes. Si, donnant à α une valeur fixe, on fait varier α', on obtient pour les droites correspondantes une enveloppe qui peut être cotée au moyen de la valeur choisie pour α. En faisant varier cette valeur nous obtiendrons ainsi le système des enveloppes (α). Nous définirons de même le système des enveloppes (α'). *La droite à deux cotes* (α, α') *sera alors une tangente commune aux enveloppes* (α) *et* (α').

On voit que ce mode de détermination des droites à deux cotes est exactement corrélatif de celui qui a été envisagé au n° 2 pour les points à deux cotes. Seulement ici la droite (α, α') n'existe pas à l'état permanent sur le tableau comme cela avait lieu pour le point (α, α'); elle est définie par ses enveloppes (α) et (α'), et il faut, au moment où l'on en a besoin, mener à ces deux lignes une tangente commune qui pourra être constituée par une droite tracée sur un transparent ou un fil tendu.

Il est bien évident, *a priori*, que les modes de représentation fondés sur l'emploi d'éléments à deux cotes tous *distincts* [qui, pratiquement, ne seront, en général, que des points (n° 2) ou des droites (n° 4)] auront bien plus de généralité que ceux qui ne font intervenir que des éléments *condensés*.

II. — Types d'abaques à trois et à quatre variables.

5. *Abaques ponctuels à trois variables.* — La relation de position la plus simple à établir entre trois lignes définies dans le domaine ponctuel consiste en ce qu'elles passent par un même point. De là le type le plus général d'abaque ponctuel à trois

variables (*fig* 2). Soient les trois systèmes de lignes à une cote définis respectivement par les équations

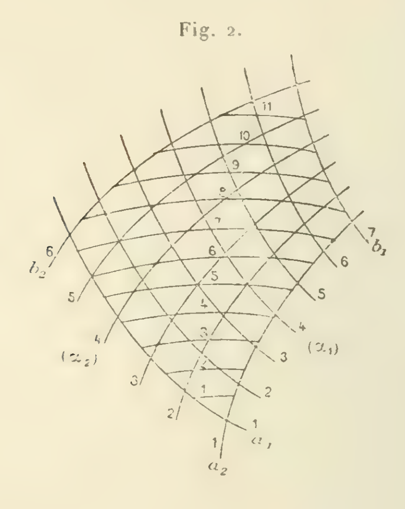
$$(1) \qquad F_1(x, y, \alpha_1) = 0,$$

$$(2) \qquad F_2(x, y, \alpha_2) = 0,$$

$$(3) \qquad F_3(x, y, \alpha_3) = 0.$$

Si trois lignes prises respectivement dans ces systèmes passent

Fig. 2.



par un même point, les cotes correspondantes sont liées par l'équation

$$(E) \qquad \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$$

obtenue par l'élimination de x et y entre les trois équations correspondantes.

Toute équation entre trois variables peut être ainsi représentée d'une infinité de façons. On voit, en effet, la dernière équation étant donnée, que l'on peut choisir arbitrairement deux des précédentes, (1) et (2) par exemple; la troisième résulte alors de l'élimination de α_1 et α_2 entre (1), (2) et (E).

En particulier, on peut toujours constituer deux des systèmes cotés au moyen de droites et même tout simplement au moyen des droites $x = \alpha_1$, $y = \alpha_2$, qui définissent un quadrillage régulier à travers lequel sont tracées les courbes (α_3). Pratiquement,

le choix des deux premiers systèmes est assujetti à la condition de conduire, par l'élimination indiquée ci-dessus, à un troisième système *réel*, et, d'autre part, ce choix sera guidé par le souci d'avoir, dans les trois systèmes, les lignes cotées les plus simples possible. C'est là un des buts principaux de la Nomographie. Il est bien clair, en particulier, que chaque fois que l'on pourra se borner au seul emploi de droites cotées, il n'y faudra pas manquer. Or, rien n'est plus facile que de former le type général des équations représentables par trois systèmes de droites à une cote. Les équations (1), (2) et (3) ci-dessus prennent, en effet, dans ce cas, la forme

(1′) $$x f_1(\alpha_1) + y \varphi_1(\alpha_1) + \psi_1(\alpha_1) = 0,$$

(2′) $$x f_2(\alpha_2) + y \varphi_2(\alpha_2) + \psi_2(\alpha_2) = 0,$$

(3′) $$x f_3(\alpha_3) + y \varphi_3(\alpha_3) + \psi_3(\alpha_3) = 0,$$

et l'équation (E) devient

(E′) $$\begin{vmatrix} f_1(\alpha_1) & \varphi_1(\alpha_1) & \psi_1(\alpha_1) \\ f_2(\alpha_2) & \varphi_2(\alpha_2) & \psi_2(\alpha_2) \\ f_3(\alpha_3) & \varphi_3(\alpha_3) & \psi_3(\alpha_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Parmi les équations rentrant dans ce type général, celles qui se rencontrent le plus souvent dans la pratique sont celles de la forme [1]

(E″) $$f_1(\alpha_1) f_3(\alpha_3) + \varphi_2(\alpha_2) \varphi_3(\alpha_3) + \psi_3(\alpha_3) = 0.$$

On voit qu'on les représente au moyen des systèmes de droites à une cote

(1″) $$x = f_1(\alpha_1),$$

(2″) $$y = \varphi_2(\alpha_2),$$

(3″) $$x f_3(\alpha_3) + y \varphi_3(\alpha_3) + \psi_3(\alpha_3) = 0.$$

Contentons-nous de remarquer ici qu'un abaque à droites cotées étant donné, on peut lui faire subir la transformation homographique la plus générale en conservant les cotes des diverses droites qui le constituent. Or, une telle transformation

---

[1] *Voir* divers exemples de telles équations : *T. N.*, Chap. II, § II.

dépendant, dans le plan, de huit paramètres, on peut juger *a priori* de la souplesse qu'elle introduit dans la construction des abaques en permettant de leur donner les dispositions les plus avantageuses ([1]).

Observons d'autre part que, bien qu'en pratique il soit généralement facile de rattacher une équation donnée à un des types généraux ci-dessus, il y a intérêt à définir les caractères analytiques auxquels on peut reconnaître *a priori* la possibilité d'un tel rattachement. Cette question soulève des problèmes de pure Analyse qui ne manquent ni d'intérêt ni de difficulté ([2]).

6. *Abaques tangentiels à trois variables.* — Corrélativement la relation de position la plus simple à établir entre trois lignes définies dans le domaine tangentiel consiste en ce qu'elles soient tangentes à une même droite. De là le type le plus général d'abaque tangentiel à trois variables dont le principe peut être exposé au moyen des mêmes équations que celles qui viennent de nous servir pour les abaques ponctuels, à la seule différence près que les coordonnées cartésiennes x et y y soient remplacées par des coordonnées parallèles u et v.

Moyennant cette substitution les équations (1), (2) et (3) ci-dessus définiront trois systèmes de lignes à une cote (α_1), (α_2), (α_3), et les cotes de trois de ces lignes seront liées par l'équation (E) lorsque ces trois lignes seront tangentes à une même droite. Il est, dès lors, nécessaire de recourir à une droite mobile, dite *index*, pour se servir de l'abaque.

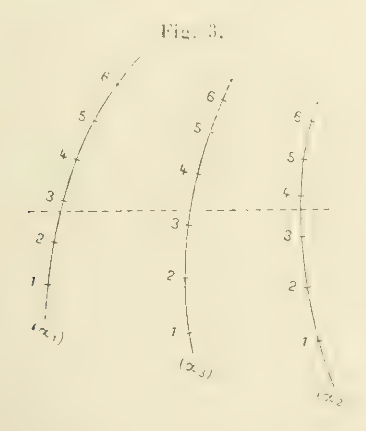
Remarquons en passant que de même que dans le cas d'un abaque ponctuel on peut toujours faire en sorte que deux des systèmes cotés soient constitués par des droites, on peut ici faire en sorte qu'ils le soient par des points. Donc, toute équation à trois variables α_1, α_2, α_3, est représentable par deux systèmes de points cotés (α_1) et (α_2) et un système de courbes cotées (α_3), les valeurs correspondantes de ces trois variables étant telles que *la droite joignant les points cotés α_1 et α_2 soit tangente à la courbe cotée α_3*.

([1]) *T. N.*, n°s 49 et 50.
([2]) *T. N.*, Chap. VI, § I.

La nécessité de recourir à l'emploi d'une droite mobile pour faire la lecture de l'abaque semble, au premier abord, constituer une infériorité aux abaques tangentiels par rapport aux abaques ponctuels. Il n'en est rien, comme on peut dès maintenant s'en convaincre par la seule observation que voici : la détermination d'une droite par deux points cotés est affranchie de la possibilité d'erreur afférente à la détermination d'un point par la rencontre de deux lignes cotées, et qui tient à ce qu'en suivant ces deux lignes pour arriver au point où elles se croisent, on peut, si l'on n'y prête pas une attention suffisante, risquer de passer sur des lignes voisines appartenant aux faisceaux dont elles font partie. Cette cause d'erreur n'existe pas avec les points cotés, pour lesquels une cote ne s'applique qu'à *un seul point*, au lieu de s'étendre à toute une ligne. Notons encore que cette circonstance rend aussi bien plus facile l'interpolation à vue entre les éléments cotés qui figurent effectivement sur l'abaque.

Ce double avantage s'accuse encore plus lorsque l'équation à représenter est de la forme (E′) ci-dessus [dont la forme (E″) n'est qu'un cas particulier] parce qu'alors les trois systèmes d'éléments cotés, définis par les équations (1′), (2′), (3′), où u et v rempla-

Fig. 3.



cent x et y, se réduisent à des systèmes de points à une cote entre lesquels, à l'aide de l'index, il suffit de prendre des alignements; d'où le nom d'*abaques à points alignés* (*fig.* 3) (¹).

(¹) *T. N.*, Chap. III.

Ceux de ces abaques qui se rencontrent le plus fréquemment en pratique sont ceux qui s'appliquent aux équations de la forme (E'') et que définissent les équations ($1''$), ($2''$), ($3''$) où u et v remplacent x et y (¹).

Si d'ailleurs on rapporte un tel abaque à des axes cartésiens, les équations qui définissent ses divers éléments cotés peuvent s'écrire, l étant une longueur fixe quelconque,

$$(\alpha_1) \qquad \begin{cases} x = -l, \\ y = f_1(\alpha_1), \end{cases}$$

$$(\alpha_2) \qquad \begin{cases} x = l, \\ y = \varphi_2(\alpha_2), \end{cases}$$

$$(\alpha_3) \qquad \begin{cases} x = l\,\dfrac{\varphi_3(\alpha_3) - f_3(\alpha_3)}{\varphi_3(\alpha_3) + f_3(\alpha_3)}, \\[2ex] y = \dfrac{-\psi_3(\alpha_3)}{\varphi_3(\alpha_3) + f_3(\alpha_3)}. \end{cases}$$

On trouvera, dans la *Remarque* qui termine le numéro suivant, un nouvel argument en faveur des abaques tangentiels.

Observons encore ici que l'emploi de l'homographie la plus générale sera d'un grand secours pour donner à un abaque à points alignés la disposition la plus commode (²).

7. *Abaques à quatre variables.* — Pour passer des types d'abaques à trois variables qui viennent d'être définis à un type d'abaque à quatre variables, il suffit évidemment de remplacer un des systèmes d'éléments à une cote qui y interviennent par un système d'éléments à deux cotes.

Ceci nous montre immédiatement qu'un abaque à quatre variables *sans élément mobile,* ne saurait comporter comme éléments à deux cotes *que des éléments condensés.* Nous avons vu, en effet, aux nᵒˢ 3 et 4 qu'on ne peut, dans le domaine ponctuel, engendrer de systèmes d'éléments à deux cotes non condensés qu'au moyen d'éléments mobiles. Le n° 2 nous a bien montré qu'on pouvait, dans le domaine tangentiel, figurer sur l'abaque

(¹) *T. N.*, Chap. III, § II et III, A.

(²) *T. N.*, nᵒˢ 60 et 62. Un exemple d'application particulièrement remarquable se trouve au n° 84.

des éléments à deux cotes distincts lorsque ces éléments se réduisaient à des points, mais il résulte du n° 6 que la lecture d'un abaque tangentiel ne peut se faire qu'au moyen d'un index mobile. La conclusion ci-dessus est donc bien justifiée.

Si nous reprenons le type général des abaques ponctuels à trois variables (n° 5) et si nous y remplaçons un des systèmes de lignes à une cote par un système de lignes condensées à deux cotes, nous obtenons pour l'équation à quatre variables ainsi représentée la forme

$$F[\alpha_1, \alpha_2, \theta(\alpha_3, \alpha_4)] = 0,$$

qui peut encore s'écrire

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = \theta(\alpha_3, \alpha_4) = 0.$$

Comme on peut, dans la représentation d'une équation à trois variables, choisir librement deux des systèmes de lignes cotées, on peut, en particulier, prendre, pour celui qui deviendra le système condensé à deux cotes, un système de droites parallèles. On peut donc dire que toute équation à quatre variables du type ci-dessus est représentable par un système de lignes à une cote tracées à travers le quadrillage formé par un système de parallèles à une cote et un systèmes de parallèles condensées à deux cotes, c'est-à-dire une échelle binaire.

Pour avoir un mode plus général de représentation d'équations à quatre variables, il faut avoir recours à ceux des éléments *distincts* à deux cotes dont l'emploi a été reconnu précédemment possible, et, plus particulièrement, à des droites à deux cotes.

Considérons donc l'abaque le plus général constitué par deux systèmes de lignes à une cote

$$F_1(x, y, \alpha_1) = 0,$$
$$F_2(x, y, \alpha_2) = 0,$$

et un système de droites distinctes à deux cotes

$$x f(\alpha_3, \alpha_4) + y \varphi(\alpha_3, \alpha_4) + \psi(\alpha_3, \alpha_4) = 0.$$

Le résultat de l'élimination de x et y entre ces trois équations sera de la forme

$$\theta(\alpha_1, \alpha_2) f(\alpha_3, \alpha_4) + \chi(\alpha_1, \alpha_2) \varphi(\alpha_3, \alpha_4) + \psi(\alpha_3, \alpha_4) = 0.$$

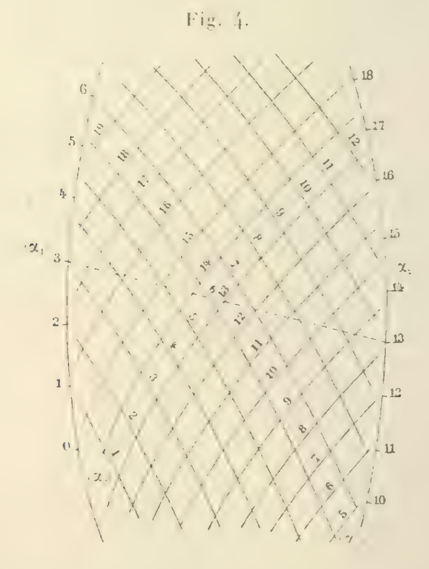
Tel est donc le type d'équation ainsi représentable. Il est très remarquable que la plupart des équations à quatre variables qui se rencontrent dans la pratique peuvent se ramener à ce type-là.

L'abaque correspondant comprendra, comme on voit, les quatre systèmes d'éléments à une cote (α_1), (α_2), (α_3) et (α_4), ces deux derniers constituant les doubles enveloppes des droites à deux cotes (α_3, α_4), et l'usage de cet abaque résulte de l'énoncé suivant : *la tangente commune aux courbes cotées α_3 et α_4 passe par le point de rencontre des courbes cotées α_1 et α_2.*

Cet énoncé équivaut à celui-ci : *la droite à deux cotes* (α_3, α_4) *passe par le point à deux cotes* (α_1, α_2). Et, sous cette forme, il montre que, par transformation corrélative, ce mode de représentation se reproduit lui-même. Il est d'ailleurs évident qu'en cherchant à réaliser la même extension que ci-dessus pour un abaque tangentiel, ce qui se fait au moyen des mêmes équations où u et v remplacent x et y, on aboutit au même résultat, à cette seule difféReéce près que c'est ici l'élément (α_3, α_4) qui est un point et l'élément (α_1, α_2) une droite.

Le cas le plus intéressant pour la pratique est celui où les enve-

Fig. 4.



loppes (α_1) et (α_2) des droites à deux cotes (α_1, α_2) se réduisent à des points, c'est-à-dire où l'abaque est à points alignés (n° 6).

l'un des trois systèmes de points étant à deux cotes (*fig.* 4). Dans ce cas, les équations des points à une cote (α_1) et (α_2) étant, en coordonnées parallèles,

$$uf_1(\alpha_1) + v\varphi_1(\alpha_1) + \psi_1(\alpha_1) = 0,$$
$$uf_2(\alpha_2) + v\varphi_2(\alpha_2) + \psi_2(\alpha_2) = 0,$$

et celle des points à deux cotes (α_3, α_4)

$$uf(\alpha_3, \alpha_4) + v\varphi(\alpha_3, \alpha_4) + \psi(\alpha_3, \alpha_4) = 0,$$

l'équation représentée est de la forme

$$(\varepsilon) \qquad \begin{vmatrix} f_1(\alpha_1) & \varphi_1(\alpha_1) & \psi_1(\alpha_1) \\ f_2(\alpha_2) & \varphi_2(\alpha_2) & \psi_2(\alpha_2) \\ f(\alpha_3, \alpha_4) & \varphi(\alpha_3, \alpha_4) & \psi(\alpha_3, \alpha_4) \end{vmatrix} = 0.$$

Celles des équations rentrant dans ce type qui se rencontrent le plus fréquemment dans les applications sont celles qui s'écrivent (¹)

$$(\varepsilon') \qquad f_1(\alpha_1) f(\alpha_3, \alpha_4) + \varphi_2(\alpha_2)\varphi(\alpha_3, \alpha_4) + \psi(\alpha_3, \alpha_4) = 0,$$

c'est-à-dire, d'après ce qui a été vu au n° 6, qui expriment l'alignement des points

$$(\alpha_1) \qquad \begin{cases} x = -l, \\ y = f_1(\alpha_1), \end{cases}$$

$$(\alpha_2) \qquad \begin{cases} x = l, \\ y = \varphi_2(\alpha_2), \end{cases}$$

$$(\alpha_3, \alpha_4) \qquad \begin{cases} x = l\,\dfrac{\varphi(\alpha_3, \alpha_4) - f(\alpha_3, \alpha_4)}{\varphi(\alpha_3, \alpha_4) - f(\alpha_3, \alpha_4)}, \\[2ex] y = \dfrac{-\psi(\alpha_3, \alpha_4)}{\varphi(\alpha_3, \alpha_4) - f(\alpha_3, \alpha_4)}. \end{cases}$$

D'ailleurs, pour former les équations des deux systèmes de lignes à une cote (α_3) et (α_4), dont l'ensemble constitue le réseau (α_3, α_4), il suffit, entre les deux dernières équations écrites, d'éliminer successivement α_4 et α_3.

L'abaque comprend alors, en outre des points à une cote (α_1) et (α_2), ces deux systèmes de lignes à une cote et son mode

---

(¹) *T. N.*, nos 121 à 126.

d'emploi tient dans l'énoncé suivant : *la droite joignant les points cotés α_1 et α_2 passe par le point de rencontre des lignes cotées α_3 et α_4.*

Remarque. — Nous nous bornerons ici aux équations à quatre variables, mais il est bien clair qu'on obtiendrait immédiatement des modes de représentation applicables à des équations à cinq et à six variables en remplaçant, dans un type d'abaque à trois variables, non pas seulement un des systèmes d'éléments à une cote, mais deux, ou même les trois, par des systèmes d'éléments à deux cotes. C'est ici que s'accusent les avantages des abaques tangentiels sur les abaques ponctuels. Si, en effet, dans un abaque ponctuel constitué par l'entre-croisement de trois systèmes de droites à une cote, nous remplaçons chacun de ces trois systèmes par un système de droites distinctes à deux cotes, il nous faudra, pour la lecture de cet abaque, faire usage de *trois droites mobiles* indépendantes, ce qui est évidemment fort peu pratique, tandis que si, dans un abaque à points alignés, nous remplaçons chacun des trois systèmes de points à une cote par un système de points à deux cotes, il nous suffira toujours d'*une seule droite mobile* pour faire la lecture.

III. — Application a la résolution nomographique des équations algébriques.

8. *Formes normales des équations algébriques.* — Les racines d'une équation algébrique du degré n en z dépendent des n coefficients de cette équation. Si donc on veut effectuer la résolution nomographique de cette équation dans le cas général, c'est-à-dire en supposant attribuées à ses coefficients des valeurs quelconques, on doit la considérer comme liant entre elles $n+1$ variables qui sont d'une part l'inconnue z, de l'autre les n coefficients. Mais on sait qu'il est possible, par des transformations n'exigeant que la résolution accessoire d'équations du premier ou du second degré, de ramener les équations d'un degré donné à certains types canoniques contenant un nombre moindre de coefficients. L'exemple le plus simple et le plus classique est celui de

l'équation du troisième degré

$$x^3 + nx^2 + px + q = 0,$$

qui, par la transformation

$$x' = x - \frac{n}{3},$$

se ramène à la forme réduite

$$x'^3 + p'x' + q' = 0.$$

Parmi les transformations de ce genre, la plus importante est celle de Tschirnhausen au moyen de laquelle, Bring, Jerrard, Brioschi et M. Klein ont obtenu pour l'équation du cinquième degré diverses formes normales ne renfermant plus qu'un seul paramètre (¹). Cette transformation permet notamment de ramener toute équation du septième degré à la forme normale

$$z^7 + \lambda z^3 + \mu z^2 + \nu z + 1 = 0$$

qui ne renferme, avec l'inconnue z, que les seuls paramètres λ, μ, ν, c'est-à-dire qui constitue, au point de vue qui nous occupe, une équation à quatre variables.

D'une manière générale, toute équation algébrique réductible, par l'emploi des transformations dont il vient d'être question, à une forme normale ne contenant que deux ou trois paramètres, s'écrit alors soit

$$(\mathrm{I}) \qquad Z_1 + \lambda Z_2 + \mu Z_3 = 0,$$

soit

$$(\mathrm{II}) \qquad Z_1 + \lambda Z_2 + \mu Z_3 + \nu Z_4 = 0,$$

Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 étant des polynomes en z à coefficients numériques.

Il suffit, dès lors, de montrer comment les principes nomographiques ci-dessus étudiés s'appliquent à ces types d'équations, respectivement à trois et à quatre variables, pour que l'abaque obtenu, joint aux transformations qui amènent l'équation à la

(¹) Voir le *Traité d'Algèbre supérieure* de M. Weber, traduit par M. J. Griess, chap. VI.

forme normale considérée, et qui elles-mêmes peuvent se traduire aisément en abaques, fournisse une solution complète des équations correspondantes.

9. *Équations du type* (I). — Si l'on fait correspondre les variables λ, μ et z respectivement à α_1, α_2 et α_3, on voit immédiatement que l'équation (I) appartient au type (E″) du n° 5. Donc, d'après ce qui a été vu au n° 6, elle exprime l'alignement des trois points

$$(\lambda)\qquad \begin{cases} x = -l, \\ y = \lambda, \end{cases}$$

$$(\mu)\qquad \begin{cases} x = l, \\ y = \mu, \end{cases}$$

$$(z)\qquad \begin{cases} x = l\dfrac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2}, \\ y = \dfrac{-Z_1}{Z_3 + Z_2}. \end{cases}$$

Les points (λ) et (μ) forment deux échelles régulières ayant respectivement pour supports des parallèles à l'axe Oy; les points (z) sont distribués sur une courbe dont l'équation, si on la désirait, s'obtiendrait par l'élimination de z entre les deux dernières équations écrites.

Remarquons, en outre, d'une manière générale, qu'on peut toujours se borner, dans la construction de l'abaque, aux points correspondant aux valeurs positives de z, les valeurs absolues des racines négatives d'une équation pouvant être obtenues comme racines positives de la transformée en $-z$.

Dans le type (I) en question rentrent immédiatement l'équation générale du second degré, pour laquelle

$$Z_1 = z^2, \qquad Z_2 = z, \qquad Z_3 = 1,$$

et l'équation réduite du troisième degré pour laquelle

$$Z_1 = z^3, \qquad Z_2 = z \qquad Z_3 = 1.$$

Les abaques correspondants, dont la construction est étudiée en détail dans les n°s 79 et 81 du *T. N.*, sont représentés à la fois sur la *fig.* 80 de cet Ouvrage.

10. *Équations du type* (II). — Si l'on fait, de même, correspondre les variables λ, μ, ν et z respectivement à α_1, α_2, α_3 et α_4, on voit que l'équation (II) appartient au type (E') du n° 7. Elle exprime donc l'alignement des points

$$(\lambda) \qquad \begin{cases} x = -l, \\ y = \mu, \end{cases}$$

$$(\mu) \qquad \begin{cases} x = l, \\ y = \lambda, \end{cases}$$

$$(\nu, z) \qquad \begin{cases} x = l\dfrac{Z_3 - Z_4}{Z_3 + Z_2}, \\ y = -\dfrac{Z_1 - \nu Z_4}{Z_3 + Z_2}. \end{cases}$$

Les points (λ) et (μ) sont les mêmes que précédemment. Quant aux points (ν, z), puisque leur x ne renferme pas ν, on voit qu'ils sont donnés par un réseau dans lequel les éléments (z) sont des droites parallèles à Oy. Les courbes (ν) qui, jointes à ces droites, constituent le réseau (ν, z), peuvent d'ailleurs être considérées comme définies par les deux dernières équations écrites dans lesquelles z serait pris comme paramètre de construction.

On a, en particulier, de cette façon l'abaque de l'équation générale du troisième degré en prenant

$$Z_1 = z^3, \qquad Z_2 = z^2, \qquad Z_3 = z, \qquad Z_4 = 1.$$

L'abaque ainsi obtenu, étudié en détail au n° 125 du *T. N.*, est représenté par la *fig.* 149 de cet Ouvrage.

Pour l'équation du quatrième degré on peut, par une transformation linéaire, amener le coefficient du terme en z^3 à être égal à zéro ou un. Dans ce second cas, par exemple, l'abaque est obtenu lorsqu'on fait

$$Z_1 = z^4 + z^3, \qquad Z_2 = z^2, \qquad Z_3 = z, \qquad Z_4 = 1.$$

L'abaque correspondant, étudié au n° 126 du *T. N.*, est représenté par la *fig.* 150 de cet Ouvrage. Quant à la transformation linéaire amenant une équation quelconque du quatrième degré à la forme réduite ci-dessus, elle est traduite en abaque sur la *fig.* 151.

Le mode de résolution nomographique envisagé ici s'étend jusqu'à l'équation du septième degré mise, grâce à la transformation de Tschirnhausen, sous la forme indiquée au n° 8. Il suffit, en effet, de faire

$$Z_1 = z^7 + 1, \qquad Z_2 = z^3, \qquad Z_3 = z^2, \qquad Z_4 = z.$$

Cet exemple fait bien ressortir l'intérêt qui s'attache à l'introduction d'éléments mobiles dans les abaques. Si l'on n'a pas recours à de tels éléments, on ne saurait obtenir d'abaques à plus de trois variables qu'au moyen de systèmes d'éléments *condensés* à deux cotes. De ce qui a été dit de ces éléments au n° 3, il résulte qu'en ce cas la résolution de l'équation proposée doit nécessairement se réduire à une suite d'opérations à deux paramètres; or, en ce qui concerne notamment l'équation du septième degré, une telle réduction doit, d'après M. Hilbert, pouvoir être démontrée impossible ([1]); et l'on voit combien, au contraire, par la seule introduction d'une droite mobile, la résolution nomographique d'une telle équation est devenue facile.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Jahresbericht *der deutschen Mathematiker-Vereinigung*. Herausgeg. im Auftrage des Vorstandes von G. Hauck u. A. Gutzmer. 1. Bd. 2. Heft, gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 8 m.

Contenu : E. Czuber, die Entwickelung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. VIII-279 p.

Loewy (M.) et Puiseux (P.). — *Atlas photographique de la Lune*, publié par l'Observatoire de Paris. 4ᵉ fascicule. In-4°, 68 p. Paris, impr. Nationale; librairie Gauthier-Villars.

([1]) Communication faite au Congrès international des Mathématiciens de 1900 (Probl. n° 13). Nous avons, dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. CXXXI, p. 522) établi le résultat ci-dessus, à savoir que l'impossibilité énoncée par l'éminent Géomètre allemand ne peut s'appliquer qu'aux abaques *sans élément mobile*.

Burnside (W.-S.) and Panton (A.-W.). — *Introduction to Determinants; being a Chapter from the theory of Equations.* In-8°, London, Longmans. 2 sh. 6 d.

— *Theory of Equations.* Vol. I, 4e édition. In-8°, Longmans, 9 sh. 6 d.

Encyklopädie *der mathematischen Wissenschaften* mit Einschluss ihrer Anwendungen. Herausgeg. von H. Burkhardt u. W.-F. Meyer. 1. Thl.: Reine Mathematik. 2. Bd.: *Arithmetik u. Algebra.* Redig. von W.-F. Meyer. 3. Heft. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 3m. 80 pf.

Jahrbuch *über die Fortschritte der Mathematik,* begründet von C. Ohrtmann, herausgeg. von E. Lampe. 28. Bd. Jahrg. 1897. 2. Heft. Gr. in-8°. Berlin, G. Reimer. 6 m.

Pinet (H.). — *Mémoire sur une nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques.* In-4°, 47 p. Paris, Nony et Cie.

Bianchi (L.). — *Vorlesungen über Differentialgeometrie.* Uebersetzt von M. Lukat. 3e livraison. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 4 m. (complet 22 m. 60 pf.).

Braunmühl (A. v.). — *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie.* 1. Thl. Von den ältesten Zeiten bis zur Erfindung der Logarithmen. Gr. in-8°, VII-260 p. avec 62 fig. Leipzig, Teubner. 9 m.

Festschrift *zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen.* Herausgegeben von dem Fest-Comité. (D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie.* — E. Wiechert, *Grundlagen der Electrodynamik.*) Gr. in-8°, 92 et 112 p. avec fig. Leipzig, Teubner. 6 m.

Gauss (C.-F.) u. Bolyai (W.). — *Briefwechsel.* Herausgeg. von F. Schmid u. P. Stäckel. Gr. in-4°, XIII-208 p. avec fig., planches, facsim. Leipzig, Teubner. Demi-reliure, 16 m.

Haas (A.). — *Lehrbuch der Integralrechnung.* 2e partie. Gr. in-8°, 284 p. Stuttgart, Maier. 9 m.

Klinkerfues (W.). — *Theoretische Astronomie.* 2e édition par von H. Buchholz. Gr. in-8°, XVII-935 p. avec fig. et portrait. Braunschweig, Vieweg und Sohn. 34 m., gebd. 36 m.

Picone-Gusmano (A.). — *Il metodo Gauss applicato alla compensazione degli errori nel rilevamento topografico.* Vol. I. Melfi, Grieco. 6 l.

Riemann (B.). — *Elliptische Functionen.* Vorlesungen. Mit Zusätzen

herausgeg. von H. Stahl. Gr. in-8°, VIII-144 p. avec fig. Leipzig, Teubner. 5 m. 60 pf.

SERRET (J.-A.). — *Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung.* Deutsch von A. Harnack. 2e édition, par G. Bohlmann. 2e vol. Integralrechng. Gr. in-8°, XII-428 p. avec 55 fig. Leipzig, Teubner. 8 m.

* SERVANT (M.). — *Essai sur les séries divergentes* (thèse). In-4°, 65 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars.

ZEITSCHRIFT *für Mathematik u. Physik.* Suppl. zum 44. Jahrg. Der Supplemente XIV. Leipzig, Teubner. 20 m.

Contenu : Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. 9e fascicule avec un portrait en héliograv., 2 planches et 55 fig. Herrn Hofrath Prof. Dr. M. Cantor zum 70. Geburtstage dargebracht von seinen Freunden, herausgeg. von M. Curtze u. S. Günther. Gr. in-8°, VIII-687 p.

APPELL (P.). — *Les mouvements du roulement en Dynamique.* Avec deux Notes de M. Hadamard. In-16, 70 p. avec fig. Paris, Carré et Naud. 2 fr.

BOER (F. DE). — *Bekuopte elementaire theorie der elliptische functiën.* In-8°, Groningen, Wolters. 4 fl. 50 c.

LAMPE (E.). — *Die reine Mathematik in den J.* 1884-1889. Nebst Actenstücken zum Leben von Siegfried Aronhold, weil. Professor der Mathematik (1860-1883) an der königl. techn. Hochschule in Berlin. Avec portrait. Gr. in-8°, 48 p. Berlin, Ernst und Sohn. 1 m. 60 pf.

MORGAN (A. DE). — *Elementary illustrations of differential and integral calculus.* In-8°. London, Paul. 5 sh.

TALLQVIST (H.). — *Grunderna af potential teorien.* In-8°. Helsingfors. Hagelstam. 4 kr.

TANNENBERG (W. DE). — *Leçons nouvelles sur les applications géométriques du calcul différentiel.* Gr. in-8°, 196 p. avec fig. Paris, Hermann.

VERHANDLUNGEN *der vom* 3. *bis* 12. X 1898 *in Stuttgart abgehaltenen Conferenz der internationalen Erdmessung.* Red. v. Ad. Hirsch. (Deutsch u. französisch). Gr. in-4°, 2 volumes, 582 et XXXV-454 p. avec fig. et 43 planches et cartes en couleurs. Berlin, G. Reimer. 12 m.

GREAVES (J.). — *Solutions to the Examples in a Treatise on Elementary Hydrostatics.* In-8°. London, Clay. 5 sh.

MEYER (O.-E.). — *Kinetic theory of gases. Elementary treatise with*

mathematical appendices. Transl. by R.-E. Baynes. In-8°, 490 p. London. Longmans. 15 sh.

VORREDEN *und Einleitungen zu klassischen Werken der Mechanik.* Galilei, Newton, d'Alembert, Lagrange, Kirchhoff, Hertz, Helmholtz. Uebersetzt u. herausgeg. von Mitgliedern der Philosoph. Gesellschaft an der Universität zu Wien. Gr. in-8°, VII-247 p. Leipzig, Pfeffer. 5 m.

Publications de la Philos. Gesellschaft de l'Université de Vienne. T. II.

PEARSON (K.) and LEE (ALICE). — *On the vibrations in the field round a theoretical Hertzian oscillator* (From *Philos. Trans.* A. vol. 193). London, Dulau. 3 sh. 6 d.

MITTHEILUNGEN *aus dem Maschinen-Laboratorium der königl. techn. Hochschule zu Berlin.* 2. Heft. Gr. in-4°. München, Oldenbourg. 2 m.

Herausgeg. zur Hundertjahrfeier der Hochschule von E. Josse. III-49 p. et 39 fig.

REULEAUX (F.). — *Der Konstrukteur. Ein Handbuch zum Gebrauch beim Maschinen-Entwerfen.* 4. Aufl. 4. Abdr. Gr. in-8°, LXXI-1197 p. avec fig. sur bois. Braunschweig, Vieweg und Sohn. 25 m.; relié, 27 m.

DAVENPORT (C.-B.). — *Statistical methods with special reference to biological variation.* New-York, John Wiley and Sons; London, Chapman, and Hall, 1899, in-12, cart. 148 p.

BAGNOLI (E.). — *Trattato delle corde nel circolo. Istrumenti descritti nel Trattato compasso poligonale, Trisettore angolare, Trisettore scolastico, Trisettore economico, Quadrante calcolatore.* Roma, E. Lœscher. In-8°, broché, 84 p. X pl.

E. B. — *Geometria rettilinea e curvilinea trattata con metodo preeuclidico.* Roma, E. Lœscher. In-8°, broché, 295 p. avec atlas de XXIV pl.

BOYER (J.). — *Histoire des Mathématiques.* In-8°, 226 p. avec fig. et portraits. Paris, Carré et Naud. 5 fr.

CANTOR (M.). — *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* T. II, 1550-1668, 2e édition, Gr. in-8° avec 97 fig. Leipzig, Teubner. 12 m.

GEER (P. VAN). — *Leerbock der analytische meetkunde.* T. II. In-8°. Leiden, Sijthoff. 12 fl. 90 c.

JAMET (V.). — *Sur les surfaces enveloppes de sphères.* In-4°, 18 p. Marseille, impr. Barlatier.

PASCAL (E.). — *Repertorio di matematiche superiori.* T. II. In-16, Milano, Hoepli. 9 l. 50 c.

RIQUIER (C.). — *Sur le calcul inverse des dérivées.* In-4°, 60 p. Marseille, impr. Barlatier.

STURM (CH.). — *Lehrbuch der Mechanik.* Uebersetzt von Th. Gross. 2e vol. Gr. in-8°, XXIII-403 p. Berlin, Calvary et Cie. Relié, 9 m.

OSTWALD'S *Klassiker der exacten Wissenschaften.* N° 109. In-8°, Leipzig, Engelmann. Cart. 1 m. 80 pf.

Contenu : A. R. Felici, Ueber die mathematische Theorie der elektrodynamischen Induction. Uebersetzt von R. Dessau. Herausgeg. von E. Wiedemann. 121 p.

MASSAU (J.), professeur à l'Université de Gand. — *Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles.* Premier fascicule : *Intégration fausse. Intégration pour les caractéristiques. Mouvement varié des eaux courantes. Mascaret.* Grande Impr. et Autographie F. Meyer, 1899. In-4° autographié, 144 p.

DÖLP (H.). — *Aufgaben zur Differential- u. Integralrechnung nebst den Resultaten u. den zur Lösung nöthigen theoretischen Erläuterungen.* 8. Aufl., neu bearb. von E. Netto. Gr. in-8°, IV-216 p. Giessen, Ricker. Relié, 4 m.

FORSYTH (A.-R.). — *Theory of Differential Equations.* Part 2. Vols 2, 3. In-8°, 758 p. London, Clay. 20 sh.

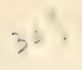
OLBERS (WILH.). — *Sein Leben u. sein Werke.* Im Auftrage der Nachkommen, herausgeg. von C. Schilling. 2. Bd. 1. Abtheilg. Briefwechsel zwischen Olbers u. Gauss. In-8°, VII-767 p. Berlin, Springer. 16 m.

KELVIN (Lord), professor of Natural Philosophy in the University of Glasgow, 1846-1899. — *With Essai on his Scientific Work* by G.-F. Fitzgerald. In-4°. London, Maclehose. 7 sh. 6 d.

VOLKMANN (P.). — *Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik, mit ein. Einleitung in die Theorie der physikal. Erkenntniss.* Vorlesungen. Gr. in-8°, XVI-370 p. Leipzig, Teubner. 14 m.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXIV.

TABLES



DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXIV; 1900. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MÉLANGES.

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXIV.

28260 Paris — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL,
GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, MANSION, MOLK,
POKROVSKY, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOUEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXIV. — ANNÉE 1900.

(TOME XXXV DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1900

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

SITZUNGSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN (1).

1er semestre 1897.

Planck (*Max*). — Sur des phénomènes de rayonnement qui sont irréversibles. Premier article. (57-68).

Si l'on admet l'universalité du principe de la conservation de l'énergie, il faut nécessairement que l'on admette aussi que tous les phénomènes peuvent être envisagés comme résultant d'actions dites *conservatrices*. L'explication que l'on donne actuellement d'un grand nombre de phénomènes, en admettant l'existence de forces de frottement, de forces résultant de chocs de corps imparfaitement élastiques, de forces de résistance à la conductibilité galvanique et autres forces qui ne sont pas conservatrices, n'est donc que provisoire et il convient de chercher à la remplacer par une autre, dans laquelle au lieu de forces non conservatrices, ne vérifiant pas par elles-mêmes le principe de la conservation de l'énergie, on n'introduirait que des forces conservatrices.

D'autre part, le principe de l'augmentation de l'entropie nous apprend que tous les changements ayant lieu dans la Nature ont toujours lieu d'une façon irréversible, que tous les systèmes limités, entièrement isolés du dehors, tendent toujours vers un état stationnaire, de sorte que l'on est également amené à chercher à expliquer ces changements en introduisant des actions conservatrices convenablement choisies.

Il semble très difficile de résoudre et même d'aborder la solution de ces problèmes, même dans des cas très particuliers. On a bien cherché à donner une

(1) Voir *Bulletin*, seconde Partie, p. 1; 1896.

théorie du frottement des gaz, par exemple, en se plaçant au point de vue de la théorie cinétique des gaz, mais il semble acquis aujourd'hui qu'une telle théorie du frottement des gaz ne saurait être ainsi établie d'une façon rigoureuse qu'à condition d'adjoindre une nouvelle hypothèse à celles qui servent de base à la théorie cinétique des gaz.

Dans ces conditions, il y a un grand intérêt à donner la solution d'un de ces problèmes, quelque spécial qu'il soit.

M. Planck envisage à cet effet un résonateur électrique rectiligne, situé dans le vide, qui, excité d'une certaine façon, oscille et exerce à son tour une action sur les ondes qui l'ont excité; les longueurs d'ondes sont supposées très grandes et l'amortissement très petit; on fait abstraction des frottements intérieurs et des résistances à la conductibilité.

M. Planck démontre que, dans l'espace indéfini, l'action du résonateur sur les ondes est irréversible, et qu'elle l'est également, au moins pendant un certain temps, dans un espace limité. Le phénomène envisagé s'expliquant par des actions conservatrices, M. Planck a donc donné un exemple d'un phénomène irréversible déterminé, pouvant être envisagé comme résultant d'actions conservatrices.

Kœnigsberger (*L.*). — Sur les mouvements cachés et sur les problèmes incomplets. (158-178).

1. Soient $p_1, p_2, \ldots, p_\rho, q_1, q_2, \ldots, q_\sigma$ les $\rho+\sigma$ paramètres indépendants dont dépend le potentiel cinétique H d'un système. Les équations différentielles du mouvement de ce système, analogues à celles de Lagrange (voir *Bulletin*, p. 13 de la *seconde Partie*; 1899) peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_r} - \frac{\partial H}{\partial p_r} = P_r, \qquad (r = 1, 2, \ldots, \rho),$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial q'_s} - \frac{\partial H}{\partial q_s} = Q_s, \qquad (s = 1, 2, \ldots, \sigma).$$

On suppose que, dans ces équations, H est une fonction quelconque donnée de $p_1, \ldots, p_\rho, p'_1, \ldots, p'_\rho, q_1, \ldots, q_\rho, q'_1, \ldots, q'_\rho$ ne dépendant pas de t explicitement.

Il s'agit d'étudier les différents cas où, par suite de la forme particulière donnée à la fonction H, on peut réduire les équations précédentes à un nombre moindre d'équations du même type.

On montre d'abord que, quand les seconds membres $P_1, P_2, \ldots, P_\rho$ des ρ premières de ces équations sont nuls, la condition nécessaire et suffisante pour que les premiers membres de ces ρ premières équations puissent se mettre sous la forme de dérivées totales prises par rapport à t, est que la fonction H soit de la forme

$$\begin{aligned} H = {} & p'_1\omega_1 + p'_2\omega_2 + \ldots + p'_\rho\omega_\rho \\ & + q'_1 \int \left[\frac{d\omega_1}{dq_1}dp_1 + \frac{d\omega_2}{dq_1}dp_2 + \ldots + \frac{d\omega_\rho}{dq_1}dp_\rho\right] + \ldots \\ & + q'_\sigma \int \left[\frac{d\omega_1}{dq_\sigma}dp_1 + \frac{d\omega_2}{dq_\sigma}dp_2 + \ldots + \frac{d\omega_\rho}{dq_\sigma}dp_\rho\right] \\ & + \Omega[q_1, q_2, \ldots, q_\sigma, q'_1, q'_2, \ldots, q'_\sigma, p'_1, p'_2, \ldots, p'_\rho]. \end{aligned}$$

où $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\rho$ désignent des fonctions quelconques de $p_1, p_2, \dots, p_\rho, q_1, q_2, \dots, q_\sigma$ satisfaisant à des équations de la forme

$$\frac{\partial \omega_{r_1}}{\partial p_{r_2}} - \frac{\partial \omega_{r_2}}{\partial p_{r_1}} = C_{r_1, r_2},$$

dans lesquelles les seconds membres C_{r_1, r_2} sont des constantes telles que l'on ait

$$C_{r_1, r_2} = -C_{r_2, r_1},$$

et où Ω désigne une fonction arbitraire de $q_1, \dots, q_\sigma, q'_1, \dots, q'_\sigma, p'_1, \dots, p'_\rho$.

S'il en est ainsi, on déduit des ρ premières équations de Lagrange les relations

$$C_{r,1}p_1 + C_{r,2}p_2 + \dots + C_{r,r-1}p_{r-1} + C_{r,r+1}p_{r+1} + \dots + C_{r,\rho}p_\rho + \frac{\partial \Omega}{\partial p'_r} = h_r,$$

$$(r = 1, 2, \dots, \rho),$$

où $h_1, h_2, \dots, h_\rho$ désignent des constantes d'intégration.

Pour que l'on puisse éliminer les paramètres $p_1, p_2, \dots, p_\rho$ entre ces ρ équations et les σ dernières équations analogues à celles de Lagrange, il faut que les paramètres $p_1, p_2, \dots, p_\rho$, ou que les dérivées $p'_1, p'_2, \dots, p'_\rho$ de ces paramètres ne figurent pas dans les ρ équations.

Examinons successivement ces deux cas.

La condition nécessaire et suffisante pour que les paramètres $p_1, p_2, \dots, p_\rho$ ne figurent pas dans les ρ équations que l'on vient d'écrire est que les constantes C_{r_1, r_2} soient toutes nulles. Dans ce cas, les σ dernières équations analogues à celles de Lagrange se transforment en

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial q'_s} - \frac{\partial K}{\partial q_s} = 0, \qquad (s = 1, 2, \dots, \sigma),$$

où l'on a posé

$$K = [\Omega] - h_1[p'_1] - h_2[p'_2] - \dots - h_\rho[p'_\rho],$$

les crochets devant indiquer que l'on a remplacé, dans les quantités entre crochets, $p'_1, p'_2, \dots, p'_\rho$ par leurs valeurs en fonction de $q_1, q_2, \dots, q_\sigma, q'_1, q'_2, \dots, q'_\sigma$ tirées des équations

$$\frac{\partial \Omega}{\partial p'_1} = h_1, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial p'_2} = h_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial p'_\rho} = h_\rho.$$

La détermination des paramètres $q_1, q_2, \dots, q_\sigma$ en fonction de t dépend donc de σ équations qui ont encore une forme analogue à celle des équations de Lagrange, mais dans lesquelles la fonction H est remplacée par la fonction K. Le type dont l'interprétation a donné naissance aux mouvements cachés d'Helmholtz et de Hertz, est donc le seul que l'on obtienne en envisageant le premier des deux cas que nous examinons.

Dans le second cas, bornons-nous à envisager l'hypothèse où l'on aurait $\rho = 2$, $\sigma = 1$. On voit alors que la condition nécessaire et suffisante pour que les premiers membres des deux premières équations analogues à celles de Lagrange, écrites plus haut, puissent être mis sous la forme de dérivées totales, prises

par rapport à t, de fonctions de p_1, p_2, q, q', est que la fonction H soit de la forme

$$H = p'_1[\omega_1 - \varphi_1] + p'_2[\omega_2 - \varphi_2] + \varphi + q\int\left[\frac{\partial\omega_1}{\partial q}dp_1 + \frac{\partial\omega_2}{\partial q}dp_2\right],$$

où ω_1 et ω_2 désignent des fonctions quelconques de p_1, p_2, q telles que l'on ait

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2} = \frac{\partial\omega_2}{\partial p_1},$$

et où φ, φ_1, φ_2 désignent des fonctions quelconques de q et q'. Supposons que l'on exprime p_1, p_2 en fonction de q, q' au moyen des relations

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_2} = 0,$$

et que l'on en déduise les expressions de p'_1, p'_2; si l'on remplace ensuite, dans la troisième équation analogue à celles de Lagrange, p_1, p'_1, p_2, p'_2 par les expressions ainsi obtenues, cette équation se transforme en

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial q'} - \frac{\partial K}{\partial q} = Q,$$

où l'on a posé pour abréger

$$K = q\int\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial q'}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial q}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q'}\right]dq' + q'\psi(q) + \varphi(q, q'),$$

ψ désignant une fonction arbitraire de q.

2. Il peut encore se présenter trois cas où les équations analogues à celles de Lagrange se réduisent, par suite de la forme particulière donnée à la fonction H, à un nombre moindre d'équations du même type.

On montre d'abord que la condition nécessaire et suffisante pour que dans les ρ premières équations envisagées ne figurent ni les paramètres $p_1, p_2, \ldots, p_\rho$, ni leurs dérivées $p'_1, p'_2, \ldots, p'_\rho$, est que la fonction H soit de la forme

$$\begin{aligned}H = &\sum_{r=1}^{\rho}\sum_{\delta=1}^{\rho} c_{r,\delta}p'_r p'_\delta + \sum_{\delta=1}^{\rho} p'_\delta[N_\delta + R_\delta]\\ &+ \sum_{\eta=1}^{\sigma} q'_\eta\int\left(\frac{\partial N_1}{\partial q_\eta}dp_1 + \frac{\partial N_2}{\partial q_\eta}dp_2 + \ldots + \frac{\partial N_\rho}{\partial q_\eta}dp_\rho\right) - \sum_{r=1}^{\rho} p_r T_r + U,\end{aligned}$$

où $R_1, R_2, \ldots, R_\rho$, $T_1, T_2, \ldots, T_\rho$ et U désignent des fonctions quelconques de $q_1, q_2, \ldots, q_\sigma, q'_1, q'_2, \ldots, q'_\sigma$ tandis que $N_1, N_2, \ldots, N_\rho$ désignent des fonctions de $p_1, p_2, \ldots, p_\rho, q_1, q_2, \ldots, q_\sigma$ choisies arbitrairement parmi celles pour lesquelles on a

$$\frac{\partial N_{r_1}}{\partial p_{r_2}} = \frac{\partial N_{r_2}}{\partial p_{r_1}};$$

$c_{1,1}, c_{1,2}, \ldots, c_{\rho-1,\rho}$ désignent des constantes arbitraires telles que l'on ait

$$c_{r,\delta} = c_{\delta,r}.$$

Pour que de même les paramètres $p_1, p_2, \ldots, p_\rho$ et leurs dérivées $p'_1, p'_2, \ldots, p'_\rho$ ne figurent pas dans les σ dernières équations envisagées, analogues à celles de Lagrange, il faut et il suffit que, dans l'expression précédente de H, les R_δ soient de la forme

$$R_\delta = R_{1,\delta} q'_1 + R_{2,\delta} q'_2 + \ldots + R_{\sigma,\delta} q'_\sigma, \qquad (\delta = 1, 2, \ldots, \rho),$$

et que les T_r soient de la forme

$$T_r = T_{1,r} q'_1 + T_{2,r} q'_2 + \ldots + T_{\sigma,r} q'_\sigma - c_r, \qquad (r = 1, 2, \ldots, \rho),$$

où $c_1, c_2, \ldots, c_\rho$ sont des constantes et les $R_{1,\delta}, R_{2,\delta}, \ldots, R_{\sigma,\delta}, T_{1,r}, T_{2,r}, \ldots, T_{\sigma,r}$ des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_\sigma$ choisies arbitrairement par celles pour lesquelles on a

$$\frac{\partial R_{\varepsilon\delta}}{\partial q_s} = \frac{\partial R_{s\delta}}{\partial q_\varepsilon}, \qquad \frac{\partial T_{\varepsilon,r}}{\partial q_s} = \frac{\partial T_{s,r}}{\partial q_\varepsilon},$$

$$(\delta = 1, 2, \ldots, \rho;\ \varepsilon = 1, 2, \ldots, \sigma;\ r = 1, 2, \ldots, \rho;\ s = 1, 2, \ldots, \sigma).$$

Lorsque l'on est dans ce cas, on peut éliminer les dérivées secondes $p''_1, p''_2, \ldots, p''_\rho$ entre les $\rho + \sigma$ équations analogues à celles de Lagrange, et l'on obtient alors, comme résultat de cette élimination, les σ équations du même type

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial q'_s} - \frac{\partial K}{\partial q_s} = 0, \qquad (s = 1, 2, \ldots, \sigma),$$

où l'on a posé pour abréger

$$\begin{aligned} K = U + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\sigma} q'^2_\nu \Big\{ & [C_{11} R_{\nu 1} + C_{21} R_{\nu 2} + \ldots + C_{\rho 1} R_{\nu\rho}] R_{\nu 1} + \ldots \\ & + [C_{1\rho} R_{\nu 1} + C_{2\rho} R_{\nu 2} + \ldots + C_{\rho\rho} R_{\nu\rho}] R_{\nu\rho} \Big\} \\ & - \sum_{\mu=1}^{\rho} C_\mu \int [R_{1\mu}\, dq_1 + R_{2\mu}\, dq_2 + \ldots + R_{\sigma\mu}\, dq_\sigma], \end{aligned}$$

$C_1, C_2, \ldots, C_\rho$ et $C_{11}, C_{21}, \ldots, C_{\rho\rho}$ désignant des constantes arbitraires telles que l'on ait

$$C_{ik} = C_{ki}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho;\ k = 1, 2, \ldots, \rho).$$

On montre ensuite que la condition nécessaire et suffisante pour que les ρ premières équations analogues à celles de Lagrange ne dépendent ni de $p''_1, p''_2, \ldots, p''_\rho$ ni de $p_1, p_2, \ldots, p_\rho$, et que les σ dernières équations analogues à celles de Lagrange ne dépendent pas de $p_1, p_2, \ldots, p_\rho$, est que la fonction H soit de la forme

$$\begin{aligned} H = {} & (\omega_1 + \Omega_1) p'_1 + (\omega_2 + \Omega_2) p'_2 + \ldots + (\omega_\rho + \Omega_\rho) p'_\rho \\ & + \sum_{s=1}^{\sigma} q'_s \int \Big(\frac{\partial \Omega_1}{\partial q_s} dp_1 + \frac{\partial \Omega_2}{\partial q_s} dp_2 + \ldots + \frac{\partial \Omega_\rho}{\partial q_s} dp_\rho \Big) \\ & - p_1 \Big(\frac{d\Phi_1}{dt} + C_1 \Big) + p_2 \Big(\frac{d\Phi_2}{dt} + C_2 \Big) + \ldots + p_\rho \Big(\frac{d\Phi_\rho}{dt} + C_\rho \Big) + \Phi. \end{aligned}$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$ désignent des constantes; $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\rho, \psi$ des fonctions quelconques de $q_1, q_2, \ldots, q_\sigma, q'_1, q'_2, \ldots, q'_\sigma$; $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\rho$ des fonctions quelconques de $q_1, q_2, \ldots, q_\sigma$; enfin $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_\rho$ des fonctions de $p_1, p_2, \ldots, p_\rho, q_1, q_2, \ldots, q_\sigma$ choisies arbitrairement parmi celles pour lesquelles on a

$$\frac{\partial\Omega_r}{\partial p_s} - \frac{\partial\Omega_s}{\partial p_r} = c_{r,s}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, \rho;\ s = 1, 2, \ldots, \rho),$$

où $c_{1,1}, c_{1,2}, \ldots, c_{\rho,\rho}$ sont des constantes, d'ailleurs arbitraires.

S'il en est ainsi, les ρ premières des $\rho + \sigma$ équations analogues à celles de Lagrange se réduisent à celles-ci :

$$\frac{d}{dt}[c_{r,1}p_1 + c_{r,2}p_2 + \ldots + c_{r,\rho}p_\rho + \omega_r + \Phi_r] = 0,$$
$$(r = 1, 2, \ldots, \rho),$$

tandis que les σ dernières peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q'_s}[p'_1\omega_1 + p'_2\omega_2 + \ldots + p'_\rho\omega_\rho + \psi] - \frac{\partial}{\partial q_s}[p'_1\omega_1 + p'_2\omega_2 + \ldots + p'_\rho\omega_\rho + \psi] = 0,$$
$$(s = 1, 2, \ldots, \sigma),$$

donc sous une forme qui est encore analogue à celle de Lagrange.

Si, pour simplifier, on se borne au cas où ρ et σ sont égaux à 1, on montre enfin que la condition nécessaire et suffisante pour que la première équation analogue à celle de Lagrange ne contienne ni p' ni p'' et que, en éliminant p entre les deux équations analogues à celles de Lagrange, on obtienne encore une équation du même type, est que la fonction H soit de la forme

$$H = \varphi_1(p, q)p' + \varphi(p, q, q'),$$

où φ et φ_1 désignent des fonctions arbitraires, la première de p, q, q', la seconde de p, q seulement. Si l'on pose

$$K = [\varphi] - q'\int\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial q}\right]\frac{\partial p}{\partial q'}\,dq',$$

où les crochets indiquent que l'on a remplacé p dans les expressions entre crochets par sa valeur en fonction de q, q', la seconde équation de Lagrange peut se mettre sous la forme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial q'} - \frac{\partial K}{\partial q} = 0.$$

Si ρ et σ ne sont pas égaux à 1, on obtient un théorème analogue.

3. M. Kœnigsberger étudie ensuite de plus près le problème suivant, qui rentre dans le cas du n° 1, où la fonction H ne dépend pas de $p_1, p_2, \ldots, p_\rho$.

Soient M_1, M_2, M_3 trois points matériels de masses m_1, m_2, m_3 et de coordonnées x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3, par rapport au trièdre trirectangle fixe qui oriente l'espace. Supposons qu'il n'y ait qu'une équation de liaison

$$z_1 = f(x_1, y_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3),$$

qu'il n'y ait pas de forces extérieures et que la fonction des forces intérieures

$$U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3)$$

soit donnée. Nous prendrons pour paramètres les huit quantités x_1, y_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3.

Pour que le potentiel cinétique $H = -T - U$ soit indépendant de x_1 et de y_1, il faut d'une part que l'équation de liaison soit de la forme

$$z_1 = ax_1 + by_1 + \omega[x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3],$$

où a et b désignent des constantes, ω une fonction quelconque ne dépendant que de x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, et, d'autre part, que U soit de la forme

$$U = F[z_1 - ax_1 - by_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3],$$

ce qui implique que la direction de la force résultante donnée, appliquée au point matériel M_1, reste la même dans l'espace.

Les deux équations de Lagrange correspondant aux paramètres x_1 et y_1 se réduisent alors à

$$(1 + a^2)x_1' + aby_1' = c_1 - a\frac{d\omega}{dt},$$

$$abx_1' + (1 + b^2)y_1' = c_2 - b\frac{d\omega}{dt},$$

où c_1 et c_2 désignent des constantes d'intégration. Si l'on élimine x_1' et y_1' entre ces deux équations et les six équations de Lagrange correspondant aux paramètres x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, on obtient les six équations du même type

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial x_2'} - \frac{\partial K}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial x_3'} - \frac{\partial K}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial y_2'} - \frac{\partial K}{\partial y_2} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial y_3'} - \frac{\partial K}{\partial y_3} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial z_2'} - \frac{\partial K}{\partial z_2} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial z_3'} - \frac{\partial K}{\partial z_3} = 0,$$

où la fonction K est égale à

$$K = -[T] - U - c_1 m_1[x_1'] - c_2 m_1[y_1'],$$

les crochets indiquant que l'on suppose que x_1' et y_1' sont remplacées par leurs valeurs en fonction de x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3.

4. Proposons-nous de rechercher, en particulier, les conditions nécessaires et suffisantes pour que, dans le problème précédent, la fonction K qui remplace le potentiel cinétique $H = -T - U$ dans celles des équations analogues à celles de Lagrange qui correspondent aux paramètres x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, soit de la forme

$$K = -\frac{1}{2}m_2(x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2) - \frac{1}{2}m_3(x_3'^2 + y_3'^2 + z_3'^2) - W(r, r'),$$

où W désigne une fonction quelconque de r et de r', r^2 étant égal à

$$r^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2,$$

et r' désignant la dérivée de r prise par rapport à t.

La solution de ce problème est comprise dans celle du problème du numéro précédent; W est nécessairement de la forme

$$W = \varphi_0(r) + \varphi_1(r)r' + \varphi_2(r)r'^2,$$

et l'on voit aisément qu'il faut et suffit que, d'une part, l'équation de condition soit de la forme

$$z_1 = ax_1 + by_1 + \sqrt{\frac{2(1+a^2+b^2)}{m_1}}\int\sqrt{\varphi_2(r)}\,dr,$$

où a et b désignent des constantes, et, d'autre part, que la fonction U soit de la forme

$$U = \Phi[z_1 - ax_1 - by_1, r],$$

où Φ est d'ailleurs une fonction quelconque de ses deux arguments.

Si l'on prend, en particulier, pour la fonction W, la fonction

$$W(r, r') = \frac{m_2 m_3}{r}\left(1 + \frac{r'^2}{k^2}\right),$$

où k désigne une constante, l'expression de K se réduit au potentiel cinétique correspondant à la loi d'attraction de William Weber. Le dernier théorème entraîne alors la proposition bien curieuse que voici et qui mettrait nettement en évidence, si elle ne l'était déjà autrement, l'importance de la notion de mouvement caché :

« Pour que l'on puisse identifier le mouvement de deux points matériels libres M_2 et M_3, s'attirant suivant la loi de William Weber, au mouvement de ces deux mêmes points s'attirant suivant la loi de Newton il suffit, sans changer leurs masses, de leur adjoindre un troisième point M_1 de masse quelconque donnée m_1 (le point caché), et de supposer que ce troisième point M_1 soit assujetti à se trouver à tout instant à une distance d'un plan fixe égale à

$$\frac{2}{k}\sqrt{\frac{2m_2m_3}{m_1}}\,r^{\frac{1}{2}},$$

r désignant toujours la distance des deux points envisagés M_2 et M_3. »

5. On démontre, de même, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble formé par trois points matériels soumis à deux liaisons bilatérales et sur lesquels n'agit aucune force extérieure, admette un potentiel cinétique indépendant de l'une des neuf coordonnées des trois points de l'ensemble, est, si x_1 désigne cette coordonnée : d'une part, que les deux équations de condition soient de la forme

$$y_1 = ax_1 + F, \qquad z_1 = bx_1 + \Phi,$$

où a, b désignent des constantes et F, Φ des fonctions, d'ailleurs quelconques, ne dépendant que des coordonnées x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, et, d'autre part, que la fonction des forces intérieures soit de la forme

$$U = \chi[y_1 - ax_1, z_1 - bx_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3],$$

où χ désigne une fonction quelconque de ses huit arguments.

Nous prendrons pour paramètres les sept variables indépendantes x_1, x_2, y_2,

z_2, x_3, y_3, z_3. L'équation de Lagrange correspondant au paramètre x_1 se réduit à

$$(1 + a^2 + b^2)\,x'_1 = c - a\frac{dF}{dt} - b\frac{d\Phi}{dt},$$

où c désigne une constante d'intégration. Si l'on élimine x'_1 entre cette équation et les six équations de Lagrange correspondant aux paramètres $x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$, on obtient les six équations du même type

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial x'_2} - \frac{\partial K}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial x'_3} - \frac{\partial K}{\partial x_3} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial y'_2} - \frac{\partial K}{\partial y_2} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial y'_3} - \frac{\partial K}{\partial y_3} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial z'_2} - \frac{\partial K}{\partial z_2} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial z'_3} - \frac{\partial K}{\partial z_3} = 0,$$

où la fonction K est égale à

$$K = -[T] - U - cm_1[x'_1],$$

les crochets indiquant que l'on a remplacé x'_1 par sa valeur

$$\frac{c - a\dfrac{dF}{dt} - b\dfrac{d\Phi}{dt}}{1 + a^2 + b^2}.$$

En particulier, pour que K soit de la forme

$$K = -\frac{1}{2}m_2(x'^2_2 + y'^2_2 + z'^2_2) - \frac{1}{2}m_3(x'^2_3 + y'^2_3 + z'^2_3) - W(r, r'),$$

où W désigne une fonction quelconque de r et de r', qui est nécessairement de la forme

$$W = \varphi_0(r) + \varphi_1(r)\,r' + \varphi_2(r)\,r'^2,$$

il faut et il suffit que les fonctions F et Φ ne dépendent que de r et soient égales à

$$F = \int \frac{-a(1+a^2+b^2)\,\varphi_1(r) + b\sqrt{2m_1c^2(a^2+b^2)\,\varphi_2(r) - (1+a^2+b^2)\,\varphi_1^2(r)}}{cm_1(a^2+b^2)}\,dr,$$

$$\Phi = \int \frac{-b(1+a^2+b^2)\,\varphi_1(r) - a\sqrt{2m_1c^2(a^2+b^2)\,\varphi_2(r) - (1+a^2+b^2)\,\varphi_1^2(r)}}{cm_1(a^2+b^2)}\,dr.$$

Si l'on prend pour W la fonction de William Weber,

$$W(r, r') = \frac{m_2 m_3}{r}\left(1 + \frac{r'^2}{k^2}\right),$$

où k désigne une constante, auquel cas U se réduit à

$$U = \frac{m_2 m_3}{r} - \frac{3}{2}m_1c^2,$$

on obtient un théorème analogue à celui du numéro précédent :

« Pour que l'on puisse identifier le mouvement de deux points matériels libres M_2 et M_3, s'attirant suivant la loi de William Weber, au mouvement de ces deux mêmes points s'attirant suivant la loi de Newton il suffit, sans changer leurs masses, de leur adjoindre un troisième point M_1 de masse quelconque donnée m_1 (le point caché), et de le supposer lié aux précédents par la condition de se trouver à tout instant à des distances de deux plans fixes, perpendiculaires entre eux, respectivement égales à

$$\frac{2}{k}\sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_1}}\, r^{\frac{1}{2}},$$

$$-\frac{2}{k}\sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_1}}\, r^{\frac{1}{2}},$$

r désignant toujours la distance des deux points envisagés M_2 et M_3. »

Von Bezold (*W.*). — Sur la théorie du magnétisme terrestre. (414-449).

Avec deux cartes se rapportant aux variations diurnes du magnétisme terrestre.

Röntgen (*W.-C.*). — Nouvelles observations sur les propriétés des rayons X. (576-592).

Fuchs (*L.*). — Contribution à la théorie des fonctions abéliennes. (608-621).

La dépendance des modules de périodicité de l'intégrale d'une fonction rationnelle d'un point analytique d'une surface de Riemann, des coefficients de la fonction rationnelle d'une part, et d'autre part des coefficients de l'équation algébrique qui définit la surface de Riemann, ne peut être mise en pleine lumière que par l'étude des équations différentielles qui vérifient les modules de périodicité envisagés comme des fonctions de ces coefficients.

Dans le tome 73 du *Journal de Crelle,* M. Fuchs a démontré que ces équations différentielles sont toujours linéaires, mais il s'est contenté d'indiquer sommairement leur mode de formation. Dans le tome 71 du même Journal il les a formées explicitement dans le cas des intégrales hyperelliptiques; dans le Mémoire actuel il se propose de montrer comment on peut les former dans le cas général d'une intégrale abélienne quelconque.

Première solution. — Soit

$$\mathrm{I} = \int s\, dz$$

une intégrale de première espèce correspondant à une surface de Riemann de genre p n'admettant que des points de ramification simples (z, s) correspondant aux valeurs

$$z = k, \qquad z = k_1, \qquad \ldots, \qquad z = k_{w-1},$$

où $k, k_1, \ldots, k_{w-1}$ sont des quantités indépendantes les unes des autres. Le coefficient différentiel s est déterminé par la condition de s'annuler en

$(p-1)$ points analytiques arbitrairement fixés sur la surface de Riemann envisagée, autres que les points de ramification de cette surface.

M. Fuchs démontre d'abord que, si μ désigne un quelconque des nombres entiers plus petits que $2p$, il est impossible de déterminer $\mu+1$ quantités β_0, $\beta_1, \ldots, \beta_\mu$ indépendantes de z et telles que l'expression

$$\beta_0 \mathrm{I} + \beta_1 \frac{d\mathrm{I}}{dk} + \ldots + \beta_\mu \frac{d^\mu \mathrm{I}}{dk^\mu}$$

soit une fonction algébrique de la variable z. Il en résulte que l'équation différentielle que vérifient les modules de périodicité d'une integrale abélienne de première espèce ne peut être d'ordre inférieur à $2p$. Elle ne peut d'ailleurs pas être irréductible et d'ordre supérieur à $2p$ (*Journal de Crelle*, t. 73); elle est donc nécessairement d'ordre $2p$. On peut aussi dire (Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algébriques*, p. 338) que

$$\mathrm{I}, \quad \frac{d\mathrm{I}}{dk}, \quad \frac{d^2\mathrm{I}}{dk^2}, \quad \frac{d^{p-1}\mathrm{I}}{dk^{p-1}}$$

forment un système fondamental.

Soit

$$\frac{d^{2p}\Pi}{dk^{2p}} + \beta_{2p-1}\frac{d^{2p-1}\Pi}{dk^{2p-1}} + \beta_{2p-2}\frac{d^{2p-2}\Pi}{dk^{2p-2}} + \ldots + \beta_0 \Pi = 0$$

l'équation différentielle que vérifie un module de périodicité quelconque Π de l'intégrale I. En suivant un procédé analogue à celui qu'il avait développé dans le cas des intégrales hyperelliptiques (*Journal de Crelle*, t. 71), M. Fuchs montre comment on peut former $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2p-2}, \beta_{2p-1}$.

Désignons pour abréger par

$$(\lambda, \mu)$$

la somme des résidus

$$\sum \mathrm{Res}\left[\frac{d^\mu \mathrm{I}}{dk^\mu}\,\frac{d^\lambda s}{dk^\lambda}\right],$$

en particulier par $(0, \mu)$ la somme des résidus

$$\sum \mathrm{Res}\left[\frac{d^\mu \mathrm{I}}{dk^\mu}\, s\right]:$$

les $2p$ relations linéaires

$$(\lambda, 2p) + \beta_{2p-1}(\lambda, 2p-1) + \beta_{2p-2}(\lambda, 2p-2) + \ldots + \beta_0(\lambda, 0) = 0,$$
$$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, 2p-1)$$

permettent alors d'évaluer les $2p$ inconnues $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2p-2}, \beta_{2p-1}$.

M. Fuchs montre d'ailleurs que l'on peut se contenter de calculer directement pour chaque entier μ plus petit que $4p-1$, la somme des résidus

$$(0, \mu) = \sum \mathrm{Res}\left[\frac{d^\mu \mathrm{I}}{dk^\mu}\, s\right];$$

on a, en effet, la relation

$$(q, \mu) = \frac{d^q}{dk^q}(0, \mu) - \frac{q}{1}\frac{d^{q-1}}{dk^{q-1}}(0, \mu+1) + \frac{q(q-1)}{1.2}\frac{d^{q-2}}{dk^{q-2}}(0, \mu+2) + \ldots$$
$$+ (-1)^q(0, \mu+q).$$

Deuxième solution. — Elle consiste à évaluer directement la fonction rationnelle R de (s, z) à laquelle est égale l'expression

$$\beta_{2p}\frac{\partial^{2p} I}{\partial k^{2p}}+\beta_{2p-1}\frac{\partial^{2p-1} I}{\partial k^{2p-1}}+\beta_{2p-2}\frac{\partial^{2p-2} I}{\partial k^{2p-2}}+\ldots+\beta_0 I,$$

et ce procédé est, lui aussi, analogue à un procédé déjà employé par M. Fuchs dans le cas particulier des intégrales hyperelliptiques (*Journal de Crelle*, t. 71). Cette fonction rationnelle R de (s, z) une fois connue, on déduit de la relation

$$\beta_{2p}\frac{\partial^{2p} s}{\partial k^{2p}}+\beta_{2p-1}\frac{\partial^{2p-1} s}{\partial k^{2p-1}}+\beta_{2p-2}\frac{\partial^{2p-2} s}{\partial k^{2p-2}}+\ldots+\beta_0 s=\frac{\partial R(s, z)}{\partial z}$$

(en comparant les développements de ses deux membres aux environs d'un même point z, d'ailleurs quelconque), les valeurs des rapports

$$\frac{\beta_m}{\beta_n}$$

de ses divers coefficients. Observons en passant qu'il est avantageux (*Journal de Crelle*, t. 71) de développer les deux membres de la relation précédente, aux environs du point $z = k$.

En intégrant les deux membres de cette même relation, le long d'une coupure quelconque et en désignant par Π le module de périodicité correspondant, on obtient l'équation différentielle cherchée

$$\beta_{2p}\frac{d^{2p}\Pi}{dk^{2p}}+\beta_{2p-1}\frac{d^{2p-1}\Pi}{dk^{2p-1}}+\beta_{2p-2}\frac{d^{2p-2}\Pi}{dk^{2p-2}}+\ldots+\beta_0\Pi=0.$$

Troisième solution. — Nous n'avons plus besoin ici de l'hypothèse restrictive faite au début des deux solutions précédentes. De plus, nous pouvons prendre pour la variable indépendante dont nous faisons dépendre les modules de périodicité, non plus nécessairement la valeur k de z correspondant à l'un des points de ramification de la surface de Riemann envisagée, mais, si nous le voulons, un paramètre quelconque ξ figurant dans les coefficients de l'équation algébrique $F = 0$ entre s et z qui définit cette surface de Riemann dont la classe de fonctions algébriques correspondante dépend essentiellement. Si μ est le degré de F envisagée comme fonction de s, on a alors

$$\frac{\partial s}{\partial z}=\alpha_0+\alpha_1 s+\ldots+\alpha_{\mu-1}s^{\mu-1},$$

$$\frac{\partial s}{\partial \xi}=\gamma_0+\gamma_1 s+\ldots+\gamma_{\mu-1}s^{\mu-1},$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\mu-1}, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{\mu-1}$ désignent des fonctions rationnelles de z que l'on sait former. On en déduit que, pour $l = 1, 2, \ldots, \mu-1$, la quantité

$$\frac{\partial^l s}{\partial \xi^l}$$

est égale à la somme, d'une part de dérivées, prises par rapport à z, de fonctions rationnelles de (s, z), et d'autre part, d'une expression de la forme

$$s[M_{l,0}+M'_{l,1}+M''_{l,2}+\ldots+M^{(\mu-1)}_{l,\mu-1}].$$

où $M_{i,0}$, $M_{i,1}$, $M_{i,2}$, ..., $M_{i,\mu-1}$ désignent des fonctions rationnelles de z (dont quelques-unes peuvent être identiquement nulles), et où les accents 1, 2, ..., $\mu-1$, indiquent des dérivées d'ordres 1, 2, ..., $\mu-1$, prises par rapport à z.

De ce qu'il existe, dans tous les cas, des quantités β_0, β_1, ..., β_{2p}, indépendantes de z et telles que la somme

$$\beta_0 s + \beta_1 \frac{ds}{d\xi} + \beta_2 \frac{d^2 s}{d\xi^2} + \ldots + \beta_{2p} \frac{d^{2p} s}{d\xi^{2p}}$$

puisse se mettre sous la forme de la dérivée, prise par rapport à z, d'une fonction rationnelle de (s, z), on déduit donc que l'expression

$$S = s[\beta_0 P_0 + \beta_1 P_1 + \ldots + \beta_{2p} P_{2p}],$$

où l'on a posé pour abréger

$$P_i = M_{i,0} - M'_{i,1} + M''_{i,2} - \ldots \pm M^{(\mu-1)}_{i,\mu-1},$$

peut être mise sous la forme d'une dérivée, prise par rapport à z, d'une fonction rationnelle de (s, z). Or, les conditions nécessaires et suffisantes données par M. Humbert (*Acta mathematica,* t. X) pour qu'une fonction rationnelle quelconque de (s, z) puisse être mise sous la forme d'une dérivée, prise par rapport à z, d'une fonction rationnelle de (s, z), se réduisent, dans le cas actuel, à ce que les sommes des résidus des quantités

$$s[\beta_0 P_0 + \beta_1 P_1 + \ldots + \beta_{2p} P_{2p}]\zeta_m, \qquad (m = 1, 2, \ldots, 2p),$$

où ζ_1, ζ_2, ..., ζ_{2p} désignent un système fondamental d'intégrales abéliennes, soient nulles. Ces $2p$ équations de condition sont linéaires en β_0, β_1, ..., β_{2p-1}; elles permettent d'évaluer les rapports de ces $2p+1$ inconnues.

Mais alors l'intégration, le long d'une coupure quelconque, de l'équation

$$\beta_0 s + \beta_1 \frac{ds}{d\xi} + \ldots + \beta_{2p} \frac{d^{2p} s}{d\xi^{2p}} = \frac{dR(s, z)}{dz},$$

fournit immédiatement l'équation différentielle

$$\beta_0 \text{II} + \beta_1 \frac{d\text{II}}{d\xi} + \ldots + \beta_{2p} \frac{d^{2p}\text{II}}{d\xi^{2p}} = 0,$$

qui vérifie les modules de périodicité II des intégrales abéliennes de première espèce, envisagés comme fonctions du paramètre ξ.

L'ordre de cette équation différentielle n'est pas nécessairement égal à $2p$; il peut être plus petit. On démontre que la condition nécessaire et suffisante pour que le système

$$\text{I}, \quad \frac{d\text{I}}{d\xi}, \quad \frac{d^2\text{I}}{d\xi^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{\mu-1}\text{I}}{d\xi^{\mu-1}},$$

forme un système fondamental, est que l'équation

$$s[\beta_0 P_0 + \beta_1 P_1 + \ldots + \beta_\mu P_\mu] = \frac{dR(s, z)}{dz},$$

où R désigne une fonction rationnelle quelconque de (s, z), ne puisse être

vérifiée par moins de

$$\mu + 1 = 2p - 1$$

quantités $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_\mu$, indépendantes de z.

Supposons que

$$I, \quad \frac{\partial I}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{2p-1} I}{\partial \xi^{2p-1}}$$

forment un système fondamental ; désignons alors par Ω une intégrale abélienne quelconque ne devenant pas infinie logarithmiquement, et par T un module de périodicité quelconque de Ω. On démontre que T est une fonction linéaire homogène (à coefficients indépendants de z, que l'on sait évaluer), d'un des modules de périodicité Π de I et des dérivées de Π d'ordres 1, 2, ..., $p-1$, prises par rapport à ξ. Nous dirons que T et Π se correspondent.

Si $\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}$ et $\frac{\partial I}{\partial z}$ contiennent ξ dans le même domaine de rationalité (*Journal de Crelle*, t. 71, t. 73 et *Sitzungsberichte*, 1888, p. 1275), T et Π font partie de la même classe d'équations différentielles linéaires homogènes précédentes, formées en prenant ξ comme variable.

Pour en donner un exemple, supposons que ξ et η désignent deux paramètres essentiels, indépendants l'un de l'autre, figurant dans les coefficients de l'équation algébrique qui définit la surface de Riemann envisagée, et prenons pour Ω la fonction

$$\Omega = \frac{\partial I}{\partial \eta} = \int \frac{ds}{d\eta}\, dz ;$$

on aura alors entre les modules de périodicité correspondants T et Π la relation

$$T = \frac{\partial \Pi}{\partial \eta}.$$

Il en résulte (*Sitzungsberichte*, 1888, p. 1278) que le groupe de substitutions appartenant à l'équation différentielle des modules de périodicité de l'intégrale I ne varie pas d'une façon continue avec η.

2e semestre 1897.

Boltzmann (*L*). — Sur des phénomènes de rayonnement qui sont irréversibles. (660-662).

Sans contester l'importance que peuvent avoir les formules établies par M. Planck dans trois Communications successives à l'Académie (*Sitzugsberitchte*, 1895, 1896 et 1897) pour relier des expériences faites ou à faire avec des résonateurs électriques, et peut-être aussi pour l'étude de la dispersion de la lumière, M. Boltzmann déclare être en désaccord absolu avec M. Planck, quant aux conséquences que M. Planck a tirées de ses formules pour donner une explication de phénomènes irréversibles, ou même seulement pour représenter schématiquement ces phénomènes, au moyen d'actions conservatrices. Il ne trouve, en particulier, dans les déductions mathématiques de M. Planck, aucun résultat pouvant servir à représenter le rôle joué par l'entropie dans les phénomènes envisagés ; or ce serait là ce qu'il faudrait trouver avant tout.

M. Boltzmann cite de plus un fait qui est en contradiction avec les résultats obtenus par M. Planck.

Eschenhagen (*M.*). — Sur des variations périodiques rapides du magnétisme terrestre, de faibles amplitudes. (678-686). Avec une carte.

Planck (*Max*). — Sur des phénomènes de rayonnement qui sont irréversibles (deuxième article). (715-717).

M. Planck répond aux critiques formulées par M. Boltmann sur le contenu de son premier article. Le fait cité par M. Boltmann et qui est en contradiction avec les résultats déduits des formules de M. Planck, concerne un cas singulier qui est exclu *a priori* par les hypothèses faites par M. Planck au début de ses recherches. Ce cas singulier ne se présente d'ailleurs jamais d'une façon absolue dans la nature; quand il s'y présente, c'est seulement d'une façon approchée, et alors le problème n'admet plus de solution déterminée tant qu'on ne donne pas au résonateur envisagé certaines propriétés particulières.

M. Planck résume ensuite les recherches contenues dans son premier article. Aux environs immédiats du résonateur envisagé, les phénomènes électromagnétiques dépendent d'une seule fonction F de t et de la distance r, vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right],$$

dont l'intégrale générale est, comme on sait,

$$F = \frac{1}{r}f\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}g\left(t+\frac{r}{c}\right),$$

où f et g désignent des fonctions arbitraires d'une seule variable. Ici f se rapporte aux ondes se propageant extérieurement, g aux ondes se propageant intérieurement. Or, les hypothèses sous lesquelles on étudie le problème permettent de montrer que la fonction g est constamment nulle; sous ces hypothèses, le phénomène est donc irréversible.

Cette déduction est rigoureuse; il ne reste donc plus des critiques de M. Boltzmann que celle concernant le grand nombre de questions se rapportant au même objet que le Mémoire de M. Planck, et qui sont encore laissées sans réponse dans ce Mémoire. M. Planck estime qu'il y a peut-être plus de chance de résoudre ces questions en suivant une voie analogue à celle qu'il a suivie, dans un cas très particulier, dans son premier Mémoire, qu'en cherchant à faire dépendre de l'état initial de l'univers les conditions sous lesquelles un phénomène actuel est irréversible.

Von Mangoldt (*H.*). — Démonstration de l'égalité d'Euler

$$\lim_{N=\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu(k)}{k} = 0.$$

où $\mu(k)$ est égal à 1 quand $k=1$ et quand k est le produit d'un nombre pair de nombres premiers inégaux, tandis que $\mu(k)$ est égal à -1 lorsque k est le produit d'un nombre impair de nombres premiers inégaux, et que $\mu(k)$ est nul lorsque k est divisible par le carré d'un nombre premier autre que 1. (835-852).

En s'appuyant sur ce que, comme l'a montré Möbius (*Journal de Crelle*, t. 9), la somme

$$\sum \mu(d),$$

étendue à tous les diviseurs d d'un entier positif quelconque plus grand que 1, est toujours nulle, et sur ce que, comme l'a montré M. Lipschitz (*Comptes rendus*, p. 949; 1879), la somme

$$\sum_{k=1}^{[n]} \mu(k)\left[\frac{n}{k}\right],$$

où $[n]$ désigne le plus grand entier contenu dans n, et $\left[\frac{n}{k}\right]$ le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{k}$, est égale à 1, quel que soit le nombre positif n, M. Mangoldt reproduit la démonstration du théorème de M. Gram (*Mémoires de l'Académie royale de Copenhague*, 6e série, classe des Sciences, volume II) :

Quel que soit le nombre positif $n \geqq 1$, la valeur absolue de la somme

$$\sum_{k=1}^{[n]} \frac{\mu(k)}{k}$$

n'est jamais plus grande que 1.

La relation bien connue

$$\sum_{\lambda=1}^{\left[\frac{n}{k}\right]} \frac{1}{\lambda} = \mathrm{L}\left[\frac{n}{k}\right] - \mathrm{C} + \frac{\theta}{2\left[\frac{n}{k}\right]},$$

où $\mathrm{L}\left[\frac{n}{k}\right]$ représente le logarithme népérien de $\left[\frac{n}{k}\right]$, tandis que C désigne la constante d'Euler dont la valeur approchée est 0,57721 et θ un nombre compris entre 0 et 1, permet ensuite à M. Mangoldt d'établir que la valeur absolue de l'expression

$$\mathrm{L}n \sum_{k=1}^{[n]} \frac{\mu(k)}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k}\mathrm{L}k$$

ne peut jamais dépasser le nombre $3+\mathrm{C}$, quelle que soit la valeur positive plus grande ou égale à 1 que l'on donne à n.

Les propositions que nous venons d'énoncer, quelques-unes des relations démontrées par M. Mangoldt lui-même dans son Mémoire : Sur le nombre de nombres premiers plus petits qu'un nombre entier donné (*Journal de Crelle*, t. 114) et les théorèmes importants sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann démontrés par M. Hadamard (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. IX) et par M. de la Vallée-Poussin (*Comptes rendus*, p. 1470; 1896) ont permis à M. Mangoldt d'établir en toute rigueur la relation

$$\lim_{n=\infty}\left\{\frac{1}{\mathrm{L}n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{L}k}{k}\sum_{\lambda=1}^{k}\frac{\mu(\lambda)}{\lambda}\right\}=0,$$

qui sert de base à la démonstration de l'égalité d'Euler, relation dans laquelle $\mathrm{L}n$ et $\mathrm{L}k$ désignent les logarithmes népériens de n et de k.

Il en résulte, en effet, immédiatement que si l'on fait croître n de $+1$ à $+\infty$, la limite supérieure d'indétermination de l'expression

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k}$$

ne peut être négative, et que la limite inférieure d'indétermination de cette expression ne peut être positive. Et il en résulte aussi, par des considérations moins immédiates, que si l'on fait croître n de $+1$ à $+\infty$, la limite supérieure d'indétermination de la même expression ne peut être positive et que sa limite inférieure d'indétermination ne peut être négative. Il faut donc nécessairement que l'on ait

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k}=0.$$

De cette égalité on déduit, comme corollaire, que l'on a

$$\lim_{n=\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[n]}\mu(k)\right\}=0,$$

et plus généralement que l'on a, quel que soit le nombre réel $\alpha \geqq -1$,

$$\lim_{n=\infty}\left\{\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{[n]}\mu(k)\,k^{\alpha}\right\}=0.$$

On montrerait de même que l'on a la relation

$$\lim_{n=\infty}\left\{\frac{1}{n\,\mathrm{L}n}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\,\mathrm{L}k\right\}=0.$$

Enfin, en envisageant, au lieu de la fonction discontinue $\mu(k)$, la fonction discontinue $\lambda(k)$ définie comme égale à $+1$ ou à -1 suivant que le nombre de nombres premiers, autres que 1, contenus dans l'entier k est pair ou impair, on montrerait aussi, en raisonnant toujours de la même façon, que l'on a des

relations analogues, en particulier la relation

$$\lim_{n=\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[n]}\lambda(k)\right\}=0,$$

de sorte que pour de grands nombres entiers positifs N, il y a, dans l'intervalle compris entre 1 et N, environ le même nombre d'entiers qui contiennent en facteur un nombre pair de nombres premiers que d'entiers qui en contiennent un nombre impair.

L. Kœnigsberger. — Sur la représentation de la force en Mécanique analytique. (885-900).

Soit

$$F(r_1, r_1', \ldots, r_1^{(\nu)}, r_2, r_2', \ldots, r_2^{(\nu)}, \ldots, r_k, r_k', \ldots, r_k^{(\nu)})$$

une fonction quelconque de k variables $r_1, r_2, \ldots, r_k$ et de leurs dérivées r_1', $r_2', \ldots, r_k'$; $r_1'', r_2'', \ldots, r_k''$; $\ldots$; $r_1^{(\nu)}, r_2^{(\nu)}, \ldots, r_k^{(\nu)}$ d'ordres 1, 2, ..., ν, prises par rapport à une variable indépendante t dont dépendent les variables $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Convenons de désigner sous le nom de *fonctions adjointes* à la fonction F tout système de k fonctions quelconques f de la forme

$$f\left[r_i, \frac{\partial F}{\partial r_i}, \frac{\partial F}{\partial r_i'}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial r_i^{(\nu)}}, \frac{dr_i}{dt}, \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r_i}, \ldots, \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r_i^{(\nu)}}, \frac{d^2 r_i}{dt^2}, \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial r_i}, \ldots\right]$$
$$(i=1, 2, \ldots, k),$$

telles que si l'on remplace $r_1, r_2, \ldots, r_k$ par des fonctions *arbitraires* de paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$, les μ relations

$$f\left(q_j, \frac{\partial F}{\partial q_j}, \ldots\right)=\sum_{i=1}^{i=n} f\left(r_i, \frac{\partial F}{\partial r_i}, \ldots\right)\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \qquad (j=1, 2, \ldots, \mu),$$

(où, dans les premiers membres, F est supposée exprimée en fonction de q_1, $q_2, \ldots, q_\mu$), soient vérifiées.

Dès les débuts de la Mécanique rationnelle, on rencontre des fonctions *adjointes* de fonctions données. Ainsi, dans l'étude du mouvement d'un système de n points matériels libres, on démontre que les composantes X_i, Y_i, Z_i, de la force totale donnée appliquée au point matériel de coordonnées x_i, y_i, z_i, sont liées à l'énergie cinétique $T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)$ du système par les relations

$$\left.\begin{aligned} X_i &= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i'}-\frac{\partial T}{\partial x_i} \\ Y_i &= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial y_i'}-\frac{\partial T}{\partial y_i} \\ Z_i &= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial z_i'}-\frac{\partial T}{\partial z_i} \end{aligned}\right\} \qquad (i=1, 2, \ldots, n);$$

si les n points du système envisagé sont soumis à des liaisons bilatérales, indépendantes de t explicitement, on peut exprimer les $3n$ coordonnées $x_1, \ldots, z_n$ de ces n points en fonction d'un certain nombre μ de paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$; on a alors, comme il est aisé de le vérifier, les μ relations

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial y'_i} - \frac{\partial T}{\partial y_i}\right)\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial z'_i} - \frac{\partial T}{\partial z_i}\right)\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right]$$

$$(j = 1, 2, \ldots, \mu);$$

les composantes X_i, Y_i, Z_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) des forces données appliquées aux n points de coordonnées x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), sont donc des *fonctions adjointes* de l'énergie cinétique du système formé par ces n points, supposés libres ou soumis à des liaisons bilatérales, indépendantes de t explicitement.

Si l'on désigne par U le potentiel des forces *intérieures*, d'ailleurs quelconques, appliquées aux points du système envisagé, et par H le *potentiel cinétique* de ce système, en sorte que

$$H = -T - U,$$

on vérifie, de même, aisément que l'on a

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial q'_j} + \frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x'_i} + \frac{\partial H}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right.$$

$$\left. + \left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial y'_i} + \frac{\partial H}{\partial y_i}\right)\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial z'_i} + \frac{\partial H}{\partial z_i}\right)\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right]$$

$$(j = 1, 2, \ldots, \mu);$$

les expressions

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x'_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial y'_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial z_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial z'_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

sont donc des *fonctions adjointes* du potentiel cinétique H du système matériel envisagé.

Si, plus généralement, on envisage le mouvement d'un système de n points soumis à des liaisons bilatérales quelconques, indépendantes de t explicitement, pour lequel le *potentiel cinétique* H soit une fonction *quelconque* donnée des $3n$ coordonnées des points du système et de leurs dérivées d'ordres $1, 2, \ldots, \nu$, sans être nécessairement la somme de deux fonctions analogues à l'énergie cinétique T du système et au potentiel U de ses forces intérieures, on démontre que l'on a entre les dérivées du potentiel cinétique H prises par rapport aux $3n$ coordonnées $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$, des n points du système et celles prises par rapport aux μ paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ au moyen

desquels on peut exprimer ces $3n$ coordonnées, les μ relations

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial q'_j} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial q''_j} - \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial q_j^{(\nu)}}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n}\left[\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x'_i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial x''_i} - \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(\nu)}}\right]\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

$$+\sum_{i=1}^{i=n}\left[\frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial y'_i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial y''_i} - \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial y_i^{(\nu)}}\right]\frac{\partial y_i}{\partial q_j}$$

$$+\sum_{i=1}^{i=n}\left[\frac{\partial H}{\partial z_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial z'_i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial z''_i} - \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial z_i^{(\nu)}}\right]\frac{\partial z_i}{\partial q_j}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, \mu),$$

en sorte que les expressions

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x'_i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial x''_i} - \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(\nu)}},$$

$$\frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial y'_i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial y''_i} - \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial y_i^{(\nu)}},$$

$$\frac{\partial H}{\partial z_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial z'_i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial z''_i} - \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial z_i^{(\nu)}}$$

sont, *quelles que soient les liaisons bilatérales, indépendantes de t explicitement, du système de n points que l'on envisage,* des *fonctions adjointes* du potentiel cinétique H de ce système.

L'objet du Mémoire de M. Kœnigsberger est de rechercher *toutes* les fonctions adjointes d'une fonction quelconque donnée

$$F(r_1, r'_1, \ldots, r_1^{(\nu)}, r_2, r'_2, \ldots, r_2^{(\nu)}, \ldots, r_k, r'_k, \ldots, r_k^{(\nu)}),$$

où $r_1, \ldots, r_k^{(\nu)}$ ont le sens précisé au début. Cette recherche comprend, comme cas particulier, celle de toutes les fonctions adjointes du potentiel cinétique H d'un système de points soumis à des liaisons bilatérales quelconques données indépendantes de t explicitement.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où F ne dépend que d'une fonction r d'un seul paramètre q, et de sa dérivée r' par rapport à t. M. Kœnigsberger montre que, dans ce cas, il existe une infinité de fonctions adjointes à F parmi lesquelles nous citerons les fonctions

$$\frac{\partial F}{\partial r'}, \quad \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r'}, \quad r''\left(\frac{\partial F}{\partial r'}\right)^2 + r'\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial r'}, \quad \ldots.$$

Plaçons-nous ensuite dans le cas où F est de la forme

$$F(r_1, r'_1, r_2, r'_2),$$

r_1 et r_2 désignant des fonctions quelconques d'un seul paramètre q, et r'_1, r'_2 les

dérivées de ces fonctions prises par rapport à t. On a alors manifestement

$$\frac{\partial F}{\partial r'_1}\frac{\partial r_1}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial r'_2}\frac{\partial r_2}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial q'},$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r'_1}\right)\frac{\partial r_1}{\partial q} + \left(\frac{\partial F}{\partial r_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r'_2}\right)\frac{\partial r_2}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q'},$$

de sorte que les expressions

$$\frac{\partial F}{\partial r'_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial r'_2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial r_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r'_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial r_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r'_2},$$

sont deux systèmes de fonctions adjointes de F. M. Kœnigsberger montre qu'il n'y en a pas d'autres.

Le même théorème a lieu lorsque F est de la forme

$$F(r_1, r'_1, r_2, r'_2, \ldots, r_k, r'_k):$$

il n'y a alors que deux systèmes de fonctions adjointes de F, à savoir

$$\frac{\partial F}{\partial r'_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial r'_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial r'_k}$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial r_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r'_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial r_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r'_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial r_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r'_k}.$$

Plus généralement, il existe précisément $\nu - 1$ systèmes de fonctions adjointes à une fonction F de la forme

$$F(r_1, r'_1, \ldots, r_1^{(\nu)}, r_2, r'_2, \ldots, r_2^{(\nu)}, \ldots, r_k, r'_k, \ldots, r_k^{(\nu)}):$$

ce sont les systèmes

$$\frac{\partial F}{\partial r_i^{(\nu)}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k);$$

$$\frac{\partial F}{\partial r_i^{(\nu-1)}} - \frac{\nu}{1}\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r_i^{(\nu)}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\frac{\partial F}{\partial r'_i} - \frac{2}{1}\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r''_i} + \frac{3.2}{1.2}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial r'''_i} - \ldots \pm (-1)^\nu \frac{\nu(\nu-1)\ldots3.2}{1.2\ldots(\nu-1)}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial F}{\partial r_i^{(\nu)}},$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k);$$

$$\frac{\partial F}{\partial r_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r'_i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial r''_i} - \ldots \pm (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial F}{\partial r_i^{(\nu)}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Ces théorèmes s'appliquent immédiatement au cas où l'on prend pour r_1, $r_2, \ldots, r_k$ les coordonnées des points d'un système de n points soumis à des liaisons bilatérales ne dépendant pas de t explicitement, et pour F le potentiel cinétique de cet ensemble. En particulier, dans le cas du mouvement d'un système de points matériels soumis à des liaisons bilatérales ne dépendant pas de t explicitement, cas où le potentiel cinétique est de la forme $H = -T - U$.

où T désigne l'énergie cinétique et U la fonction des forces intérieures appliquées aux points (x_i, y_i, z_i) de ce système, on voit donc que, sauf le système de fonctions formé par les dérivées partielles du potentiel cinétique prises par rapport aux composantes x'_i, y'_i, z'_i, suivant les axes coordonnés, des vitesses des n points du système, il n'y a qu'*un seul système de fonctions adjointes* au potentiel cinétique H du système de points matériels envisagé, savoir le système

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x'_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial y'_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial z_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial z'_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dont les éléments sont égaux aux composantes de forces appliquées aux n points matériels quand ces points sont libres de toute liaison. On peut ainsi rattacher la notion de forces appliquées aux points d'un système de points matériels à celle de fonction adjointe au potentiel cinétique de ce système.

Weber (H.). — Sur les équations différentielles des déplacements électrolytiques. (936-946).

Les équations différentielles à l'étude desquelles MM. Kohlrausch et Planck ont ramené l'étude du mouvement des ions dans des électrolyses sont des équations aux dérivées partielles qui ne sont pas linéaires. Dans certains cas particuliers très simples étudiés par M. Weber, elles ont une forme analogue à celle des équations aux dérivées partielles auxquelles se ramène l'étude de la propagation du son dans l'air. Ces dernières équations ont été, comme on sait, intégrées par Riemann; M. Weber montre comment on peut de même intégrer les équations auxquelles il est parvenu et en déduire des solutions élégantes des problèmes posés.

Schwarz (H.-A.). — Sur les fonctions implicites. (948-954).

Soient

$$y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_m, \; x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n$$

$m + n$ variables réelles pouvant prendre chacune toutes les valeurs plus petites en valeur absolue qu'un nombre positif δ' convenablement choisi; ces valeurs forment un domaine que nous désignerons par (δ'). Désignons aussi par

$$f_\lambda(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m),$$

m fonctions réelles univoques continues de $m + n$ variables $y_1, y_2, \ldots, x_n$ admettant des dérivées partielles du premier ordre par rapport à $y_1, y_2, \ldots, y_m$ en chacun des points analytiques $(y_1, y_2, \ldots, x_n)$ du domaine (δ'), dérivées qui soient, elles aussi, des fonctions continues de $y_1, y_2, \ldots, x_n$; désignons par

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial y_\mu} = f_{\lambda\mu}(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots, m \\ \mu = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix},$$

ces diverses dérivées, et posons

$$a_{\lambda\mu} = f_{\lambda\mu}(0, 0, \ldots, 0, 0, 0, \ldots, 0), \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots, m \\ \mu = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix};$$

convenons enfin de n'envisager que des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_m$ qui s'annulent lorsque les $m+n$ variables $y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'annulent simultanément et qui soient telles que le déterminant

$$D = |a_{\lambda,\mu}|, \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots, m \\ \mu = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

ait une valeur différente de zéro.

M. Schwarz démontre que, sous ces restrictions, il existe, aux environs du point analytique $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, un domaine déterminé tel que, pour chacun des points de ce domaine, les m équations

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_m = 0$$

soient identiquement vérifiées quand on y remplace $y_1, y_2, \ldots, y_m$ par les valeurs que prennent, en ce point analytique, m fonctions univoques, continues réelles $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ces fonctions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que M. Schwarz détermine, sont d'ailleurs infiniment petites lorsque les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont elles-mêmes infiniment petites.

Frobenius (*G.*). — Sur la représentation des groupes finis au moyen de substitutions linéaires. (994-1015).

Nous dirons qu'un nombre fini de substitutions linéaires, de *degré n*,

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1n}y_n, \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \ldots + b_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nn}y_n; \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dont les déterminants $|a_{\alpha\beta}|$, $|b_{\alpha\beta}|$, ... sont différents de zéro, forment un groupe H' de substitutions linéaires, lorsqu'en composant deux quelconques de ces substitutions on obtient quelqu'une d'entre elles. Nous conviendrons de désigner, pour abréger, par (A), (B), ... les substitutions envisagées et de désigner aussi par les mêmes symboles (A), (B), ... les matrices correspondantes de degré n dont les n^2 éléments sont les coefficients $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, \ldots$ de ces substitutions. D'après cela, la matrice $(C) = (A)(B)$ dont les n^2 éléments $c_{\alpha\beta}$ sont donnés par les n^2 relations

$$c_{\alpha\beta} = a_{\alpha 1}b_{1\beta} + a_{\alpha 2}b_{2\beta} + \ldots + a_{\alpha n}b_{n\beta}, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

correspond à une substitution linéaire (C) faisant partie du groupe H' envisagé.

Nous dirons que les substitutions (A), (B), ... du groupe H', ou encore que les matrices correspondantes (A), (B), ... *représentent* un groupe quelconque

donné H, lorsque l'on peut faire correspondre les éléments A, B, ... de ce groupe donné H aux matrices (A), (B), ..., de façon que le groupe H' soit isomorphe au groupe H, en sorte que l'élément AB de H corresponde à la matrice (A)(B) de H'. L'isomorphisme peut être méroédrique; dans ce cas, G désignant le sous-groupe invariant de H formé par les éléments de H auxquels correspond l'élément principal (E) de H', le groupe H' est isomorphe holoédrique au groupe $\frac{H}{G}$. La substitution (E) de H' correspond à l'élément principal E de H; elle est la substitution identique de H'.

Nous dirons aussi que la matrice

$$(A)x_A + (B)x_B + \ldots,$$

dont les n^2 éléments sont les fonctions linéaires

$$a_{\alpha\beta}x_A + b_{\alpha\beta}x_B + \ldots \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

d'un nombre de variables indépendantes x_A, x_B, ... égal à l'*ordre* du groupe donné H, *appartient* à ce groupe H. Nous désignerons par D le déterminant de cette matrice.

Un groupe quelconque donné H peut être *représenté* de diverses manières. Supposons, en effet, qu'il soit représenté par les substitutions (A), (B), ... d'un groupe H' et désignons par (P) une substitution linéaire quelconque de degré n dont le déterminant ne soit pas nul; le groupe H sera encore représenté, par exemple, par les substitutions

$$(P)^{-1}(A)(P), \quad (P)^{-1}(B)(P), \quad \ldots.$$

Nous dirons de deux quelconques des représentations d'un même groupe donné H qu'elles sont *équivalentes* et nous dirons aussi que toutes les représentations de ce groupe H forment une *classe* de représentations équivalentes. A chaque représentation du groupe H correspond une matrice appartenant à ce groupe; nous dirons de ces diverses matrices qu'elles sont, elles aussi, équivalentes et forment une classe de matrices équivalentes.

Désignons par Θ le déterminant du groupe H [1]; soit

$$\Theta = \Phi^f \Phi_1^{f_1} \Phi_2^{f_2} \ldots$$

où $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ désignent les facteurs premiers de Θ et $f, f_1, f_2, \ldots$ les degrés de ces facteurs premiers. Envisageons une représentation déterminée du groupe H et la matrice correspondante appartenant à H; le déterminant D de cette matrice est nécessairement contenu en facteur dans une puissance de Θ convenablement choisie; en d'autres termes, D est de la forme

$$D = \Phi^s \Phi_1^{s_1} \Phi_2^{s_2} \ldots$$

où $s, s_1, s_2, \ldots$ sont des entiers positifs ou nuls.

Lorsque l'un de ces nombres est égal à 1 et que tous les autres sont nuls, on dit que la représentation envisagée du groupe H est *primitive*. Ainsi, à une

(1) *Voir* le compte rendu des *Sitzungsberichte* de 1896; *Bulletin*, 1899, seconde partie, p. 26.

représentation primitive d'un groupe H correspond une matrice appartenant à ce groupe H, dont le déterminant D est égal à un facteur premier du déterminant du groupe H.

Il est bien remarquable qu'à chaque facteur premier du déterminant Θ d'un groupe quelconque donné corresponde une représentation primitive de ce groupe au moyen de substitutions linéaires entre un nombre de variables indépendantes *précisément égal* au degré du facteur premier envisagé de Θ, et n'en correspond qu'*une seule* (au choix des variables indépendantes près). M. Frobenius rappelle que ce théorème appartient à M. Molien ([1]).

M. Frobenius montre ensuite que l'on peut toujours trouver, parmi les matrices d'une classe de matrices équivalentes appartenant à un groupe H, une matrice dont le déterminant D se décompose en un produit de $f+f_1+f_2+\ldots$ déterminants $D_1, D_2, \ldots$, c'est-à-dire en un produit d'autant de déterminants qu'il y a de facteurs premiers (distincts ou non) dans le déterminant Θ du groupe H; les déterminants $D_1, D_2, \ldots$ ne peuvent d'ailleurs être décomposés davantage. Les matrices dont les déterminants sont $D_1, D_2, \ldots$ font partie de la classe de matrices équivalentes à D et appartiennent donc toutes au groupe H.

Les *caractères* du groupe H, étudiés par M. Frobenius dans un précédent Mémoire, ne permettent pas d'effectuer cette décomposition du déterminant D d'une des matrices de la classe appartenant au groupe H, en ses facteurs irréductibles $D_1, D_2, \ldots$; ils permettent toutefois de décomposer ce déterminant D en facteurs $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ respectivement égaux aux puissances des divers facteurs premiers du déterminant Θ du groupe, indiquées par les degrés de ces facteurs premiers. Deux quelconques des facteurs $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ obtenus au moyen des *caractères* du groupe H sont donc premiers relatifs. Il y a d'ailleurs précisément autant de facteurs Δ qu'il y a de caractères dans le groupe envisagé H.

On peut toujours s'arranger de façon que les matrices dont les déterminants sont égaux au même facteur du déterminant Θ d'un groupe H d'ordre h soient identiques; les éléments de toutes les matrices partielles dont les déterminants sont égaux aux divers facteurs de Θ sont alors h variables indépendantes. De la matrice ayant pour déterminant le facteur Φ, par exemple, de D, on peut alors déduire h substitutions linéaires qui forment un groupe isomorphe à H; l'isomorphisme peut d'ailleurs être méroédrique.

C'est en s'appuyant sur quelques théorèmes bien curieux sur les déterminants dont les éléments sont des variables indépendantes que M. Frobenius est parvenu à ce dernier résultat. Nous allons énoncer ces théorèmes :

Soient $x_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$, n^2 variables indépendantes et X la matrice, de degré n, dont les éléments sont ces n^2 variables rangées dans un ordre déterminé. Désignons par X′ la matrice conjuguée de X obtenue en transposant les lignes et les colonnes de X. Soient, d'autre part, A, B deux matrices dont les éléments sont des constantes telles que les déterminants de ces deux matrices soient différents de zéro; désignons par k le produit des déterminants des deux matrices A, B. Les deux matrices AXB, AX′B ont alors toutes deux pour déterminant le produit de k par le déterminant $|X|$ de la matrice X, et dans chacune de ces deux matrices AXB, AX′B, les éléments sont des fonctions

([1]) Comparez *Mathematische Annalen*, t. XLI, p. 124 et *Sitzungsberichte der Naturforscher-Gesellschaft zu Dorpat*, 1897, p. 259.

linéaires de n^2 variables indépendantes $x_{\alpha\beta}$. M. Frobenius démontre que, inversement, si les éléments d'une matrice X sont des variables indépendantes, et si Y désigne une matrice dont les éléments sont des fonctions linéaires de ces variables indépendantes et dont le déterminant $|Y|$ ne diffère du déterminant $|X|$ de la matrice X que par un facteur constant différent de zéro, Y est nécessairement de l'une des deux formes AXB ou AX'B, A et B désignant deux matrices dont les éléments sont des constantes. Lorsque le degré de X est plus grand que 1, une seule de ces deux alternatives est possible et les matrices A, B sont déterminées à un facteur numérique près. Si, en outre, les fonctions caractéristiques des matrices X et Y sont égales, Y est nécessairement soit de la forme AXA^{-1}, soit de la forme $AX'A^{-1}$. Lorsque l'on restreint l'indépendance des variables $x_{\alpha\beta}$ par la supposition $x_{\alpha\beta} = x_{\beta\alpha}$, les théorèmes précédents ont encore lieu; on démontre, en effet, que si les éléments

$$x_{\alpha\beta} (\beta \geqq \alpha;\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

d'une matrice symétrique X sont des variables indépendantes, et si Y désigne une matrice symétrique dont les éléments sont des fonctions linéaires de ces variables indépendantes et dont le déterminant $|Y|$ ne diffère du déterminant $|X|$ de la matrice X que par un facteur constant (non nul), Y est nécessairement de la forme AXA', où A désigne une matrice à éléments constants, déterminée au signe près, et A' la matrice conjuguée de A; si, en outre, les fonctions caractéristiques de X et Y sont égales, A est une matrice orthogonale.

Les représentations *primitives* d'un groupe donné H, par des substitutions formant un groupe H', mettent à nouveau en évidence l'importance des relations obtenues par M. Frobenius dans un précédent Mémoire, au moyen desquelles il a appris à calculer les *caractères* d'un groupe donné et, par suite, les coefficients des facteurs premiers du déterminant de ce groupe. La voie dans laquelle M. Dedekind avait engagé M. Frobenius à pénétrer se révèle ainsi comme particulièrement féconde.

Boltzmann (*L.*). — Sur les phénomènes de rayonnement qui sont irréversibles (second article). (1016-1018).

M. Boltzmann reprend, en la précisant, sa critique du Mémoire de M. Planck, critique à laquelle M. Planck avait répondu dans un article analysé plus haut. M. Boltzmann ne conteste pas l'utilité de recherches ayant pour objet de découvrir un théorème, analogue à celui de l'entropie, qui concernerait les phénomènes de rayonnement; il croit que ce théorème doit exister, et il ne pourrait que se réjouir de voir les recherches de M. Planck aboutir à sa découverte. Ce ne sont pas les calculs de M. Planck, dont il a jamais contesté l'exactitude, mais bien l'affirmation de M. Planck qu'il n'existe pas d'autres phénomènes naturels irréversibles que ceux engendrés par des forces conservatrices. Tout dépend, d'après M. Boltzmann, des conditions sous lesquelles on établit les théories servant à expliquer les phénomènes naturels, et il en donne des exemples. Il énumère ensuite quelques scrupules et réflexions que lui suggère la théorie de M. Planck et indique, entre autres, une contradiction entre cette théorie et l'idée émise par M. Poincaré, d'après laquelle on ne saurait déduire des équations différentielles de la Mécanique rationnelle la description de phénomènes irréversibles.

Planck (Max.). — Sur les phénomènes de rayonnement qui sont irréversibles (troisième article). (1122-1145).

Désignons par P un point, source d'un rayonnement électromagnétique dont la durée soit déterminée; supposons que ce point ne contienne qu'une quantité *finie* d'énergie, de sorte qu'il y ait, quand le rayonnement est libre, un amortissement fini, quoique petit, de ses oscillations; supposons aussi que le point P soit contenu dans un espace vide, limité par des surfaces parfaitement réfléchissantes, de dimensions très grandes par rapport aux longueurs d'ondes de ses oscillations propres.

Si, à un instant déterminé $t = t_0$, on donne l'amplitude et la phase des oscillations de la source P, ainsi que la répartition des forces électriques et magnétiques dans tout le champ environnant, le phénomène que voici aura nécessairement lieu pour $t > t_0$: d'une part, la source P perdra, par émission, de son énergie et il en résultera donc un amortissement de ses oscillations; d'autre part, la source P verra son énergie augmenter par absorption de l'énergie provenant de toutes les ondes qui, venant de toutes les directions, passent en P et agissent sur la source P comme sur un résonateur. Mais l'énergie totale de tout le système ne change pas, car il ne se consomme d'énergie ni sur les miroirs parfaits qui limitent l'espace envisagé, ni dans le résonateur.

Pour étudier le phénomène de plus près, M. Planck suppose que l'espace vide est une sphère au centre de laquelle se trouve le résonateur P et que, dans le vide envisagé, les ondes sont, quel que soit t, des ondes sphériques. En supposant alors que le coefficient d'amortissement du résonateur, le rapport des dimensions linéaires du résonateur aux longueurs d'ondes de ses oscillations propres et le rapport de ces longueurs d'ondes au rayon de la sphère creuse soient de petits nombres dont on puisse négliger les carrés, M. Planck obtient des équations différentielles que l'on peut intégrer et qui correspondent au phénomène étudié, au degré d'approximation que l'on vient d'indiquer. Les intégrales de ces équations différentielles ne permettent toutefois pas d'obtenir la description du phénomène avec cette même approximation quel que soit t; en général, l'approximation diminue quand t augmente. Quoi qu'il en soit, *en se bornant à un intervalle de temps limité* (que l'on peut d'ailleurs prendre aussi grand que l'on veut, en choisissant des nombres suffisamment petits pour les rapports dont on a négligé les carrés), on voit sur ces intégrales :

1° Que le phénomène ne peut, en aucun cas, être renversé;

2° Que, sauf dans des cas d'exception bien caractérisés, il n'est pas possible que tout le système revienne à un état antérieur ou en différant très peu;

3° Que, sauf dans les même cas d'exception, les variations, par rapport au temps et au lieu, de l'intensité du rayonnement de l'énergie dans la partie du spectre sur laquelle peut agir le résonateur, se compensent nécessairement dans la suite des temps envisagés.

Les phénomènes de rayonnement envisagés ont donc tous les caractères d'un phénomène irréversible, sauf dans des cas particuliers que rien n'empêche d'exclure. Il ne semble, d'ailleurs, pas difficile de montrer que les conditions initiales idéales sous lesquelles se produiraient ces cas particuliers ne sont jamais réalisées dans les phénomènes d'absorption et d'émission de rayons calorifiques qui ont effectivement lieu dans la nature.

Molien (*Th.*). — Sur les invariants des groupes de substitutions linéaires. (1152-1156).

M. Molien montre comment les équations caractéristiques des groupes de substitutions linéaires permettent de trouver d'une façon relativement simple, le nombre des représentations des variables d'un groupe de substitutions linéaires irréductible, par des fonctions entières homogènes des variables d'un groupe de substitutions isomorphe au premier.

J. M.

ANNALES de la Faculté des Sciences de Toulouse.

Tome VIII; 1894 ([1]).

Duhem (*P.*). — Les actions électrodynamiques et électromagnétiques, 2e Partie. (A. 1-57).

Suite du travail paru dans le Tome VII des *Annales*. L'auteur développe et généralise un certain nombre des résultats de ses *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, auxquelles il renvoie le lecteur. Le Mémoire comporte quatre Chapitres : l'induction électromagnétique et l'énergie électromagnétique; les forces électromagnétiques; l'analogie des courants et des aimants; l'aimantation par les courants.

Cosserat (*E.*). — Sur un théorème de M. Darboux et sur les congruences de droites. (B. 1-9).

Ce théorème s'énonce ainsi : « Pour trouver la congruence la plus générale formée de courbes planes situées dans les plans tangents d'une surface (Σ) et qui sont les trajectoires orthogonales d'une famille de Lamé, on prendra l'une quelconque (Σ') des surfaces applicables sur (Σ) et l'on construira toutes les courbes (C') qui sont à l'intersection des plans tangents de (Σ') et d'une développable (Δ) circonscrite au cercle de l'infini; si la surface (Σ') se déforme en entraînant les courbes (C'), de manière à venir coïncider avec la surface proposée (Σ), la congruence des courbes (C') se transformera dans la congruence cherchée ».

M. Cosserat déduit ce théorème de l'étude des congruences de droites distribuées dans les plans tangents de (Σ).

Cosserat (*E.*). — Sur les congruences formées d'axes optiques et sur les surfaces à courbure totale constante. (C. 1-3).

A chaque point M d'une surface (Σ) correspondent quatre *axes optiques* :

([1]) Voir *Bulletin*, XXI₂, p. 1.

ce sont les axes des cylindres de révolution qui coupent le plan tangent en M à la surface suivant l'indicatrice de Dupin relative à ce point. L'auteur établit, pour les congruences formées par ces droites, les propositions suivantes : Si toutes ces congruences sont formées de normales à une surface, la surface (Σ) est à courbure totale constante et réciproquement.

Si les développables de l'une d'elles découpent sur (Σ) un réseau conjugué, (Σ) est à courbure totale constante et réciproquement. Si l'une de ces congruences est isotrope, les autres sont également isotropes et la surface (Σ) est une quadrique.

Cette dernière proposition est la réciproque d'un théorème de M. Darboux.

Stouff (*X.*). — Sur différents points de la théorie des fonctions fuchsiennes. (D. 1-20).

La première Partie est relative à l'étude des groupes dont les substitutions peuvent être définies arithmétiquement; elle forme la suite des Mémoires publiés par l'auteur sur ce sujet.

Il examine ici des groupes fuchsiens à coefficients complexes, dérivant de périodes quelconques des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité, dans la formation desquels interviennent certaines substitutions linéaires de période $(p-1)$. La considération des équations irréductibles du troisième et du quatrième degré à coefficients entiers le conduit à des groupes de substitutions linéaires à coefficients complexes qui permettent une division régulière de l'espace en doubles pyramides triangulaires ou en octaèdres.

La seconde Partie est destinée à rendre plus faciles à saisir certaines propriétés connues des fonctions modulaires; les principes de la théorie de la transformation y sont exposés à l'aide de la Géométrie de Lobatchefsky, en particulier pour les transformations du 5ᵉ et du 7ᵉ ordre.

Cosserat (*E.*). — Sur la déformation infinitésimale d'une surface flexible et inextensible et sur les congruences de droites. (E. 1-46).

Ce travail est en grande partie relatif à des problèmes qui se ramènent à celui, posé par M. Moutard, de la correspondance ponctuelle entre deux surfaces avec orthogonalité des éléments.

L'auteur expose des résultats qui se rattachent surtout aux travaux de Ribaucour et de M. Bianchi et développe les propositions qu'il a énoncées dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (26 décembre 1892).

La première Partie est consacrée presque entièrement au développement de certains points du Chap. XII du *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes* de Ribaucour. L'auteur calcule d'abord les variations premières des courbures $\frac{1}{RR'}$ et $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}$ quand on passe d'une surface A à une surface infiniment voisine A'. Dans le cas où la surface A', infiniment voisine de A, est applicable sur cette dernière si l'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur, la variation première de $\frac{1}{RR'}$ est nulle : c'est la vérification d'un théorème classique de Gauss.

M. Cosserat, adoptant la méthode donnée par M. Darboux, qui consiste à rapporter les deux surfaces A, A_1 au système conjugué commun, étudie ensuite la corespondance par plans tangents parallèles entre deux surfaces A et A_1 dans le cas où elle établit une représentation conforme de l'une des surfaces sur l'autre, c'est-à-dire le *problème de M. Christoffel*. Les considérations dont il fait usage s'appliquent sans modifications essentielles à l'étude du *problème de Ribaucour : Quelles sont les enveloppes de sphères pour lesquelles la correspondance établie entre les deux nappes de l'enveloppe par les points de contact* A, A_1 *d'une même sphère, réalise une représentation conforme de l'une des nappes sur l'autre?* En écartant les solutions qui répondent à des hypothèses particulières [AA_1 passe par un point fixe, à distance finie ou non; les développables de la congruence engendrée par AA_1 sont confondues; ces développables coupent (A) et (A_1) suivant des lignes de longueur nulle], M. Cosserat trouve les conditions, nécessaires et suffisantes, qui suivent : *Les points focaux de* AA_1 *doivent être conjugués harmoniques par rapport à* A *et à* A_1; *les développables de la congruence engendrée par* AA_1 *doivent découper* (A) *et* (A_1) *suivant des systèmes orthogonaux.*

Parmi les différentes formes que peut prendre une surface, quand on la déforme sans altérer la longueur des éléments linéaires, il y en a une pour laquelle la courbure moyenne est maximum; c'est la *forme limite* de Ribaucour; M. Cosserat montre, en annulant la variation première de la courbure moyenne, que *cette surface est isothermique.*

La seconde Partie traite du problème de la déformation infinitésimale d'une surface flexible et inextensible. L'auteur établit d'abord les liaisons classiques entre ce problème, la transformation par orthogonalité des éléments et la recherche des couples de surfaces applicables quand on donne le lieu des milieux des cordes qui joignent les points correspondants des deux surfaces du couple.

Soient ensuite M_1, M_2 les points correspondants de deux surfaces applicables (M_1) et (M_2), A le milieu du segment M_1M_2; l'étude des congruences formées par les parallèles M_1m_1, M_2m_2 à la normale en A à la surface (A) conduit M. Cosserat à diverses propositions de Ribaucour dont il fait des applications au cas où (A) est à courbure totale constante et au cas où (A) est minima. Il établit les propriétés connues des *congruences de Ribaucour*, formées, d'après M. Bianchi, par les parallèles menées aux différentes normales d'une surface (A) par les points correspondants d'une surface (a) qui lui correspond avec orthogonalité des éléments. Citons en particulier la proposition due à M. Guichard : « Toute congruence de Ribaucour découpe, par ses développables, sa surface moyenne (lieu des milieux des segments focaux) suivant un réseau conjugué », et aussi la suivante : « Toute congruence de Ribaucour admet pour représentation sphérique de ses développables celle des asymptotiques d'une surface ».

La recherche des surfaces (a) qui correspondent à (A) avec orthogonalité des éléments linéaires conduit l'auteur à diverses propositions intéressantes dans les cas où (A) est une quadrique, une sphère ou une surface minima. Il expose ensuite la théorie des *surfaces associées* de M. Bianchi : couples de surfaces qui se correspondent par plans tangents parallèles de façon qu'aux asymptotiques de l'une corresponde un réseau conjugué de l'autre.

Il aborde enfin la recherche des couples de surfaces applicables en supposant connue la surface (A) enveloppe des plans perpendiculaires aux cordes qui joignent les points correspondants, en leurs milieux. Signalons un intéressant

théorème de Ribaucour dont M. Cosserat a développé diverses conséquences : « Soient deux couples (N_1), (N_2) et (N'_1), (N'_2) de surfaces applicables répondant à la même surface (A); désignons par B, B' les points où le plan tangent à (A) est rencontré par $N_1 N_2$ et $N'_1 N'_2$; joignons $N_1 B'$ et $N'_1 B$ qui se coupent en N''_1, $N_2 B'$ et $N'_2 B$ qui se coupent en N''_2; les surfaces (N''_1), (N''_2) sont applicables l'une sur l'autre et les points correspondants N''_1, N''_2 sont symétriques par rapport au plan tangent de (A) ».

Bouasse (H.). — Étude des actions photographiques. (F. 1-52).

Le Vavasseur. — Solution d'une question posée par M. Hermite. (G. 1-3).

L'intégrale elliptique de seconde espèce

$$J = \int_0^K k^2 \operatorname{sn}^2 x \, dx$$

peut s'écrire sous la forme

$$J = K k^2 \operatorname{sn}^2(\xi, k),$$

ξ étant compris entre les limites o et k. Cette quantité ξ donne le maximum de la fonction $\dfrac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$, comme le montre la relation de Jacobi

$$\int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2 x \, dx = \frac{J(x)}{K} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)};$$

on demande de la définir en fonction du module par une équation différentielle (Ch. Hermite, *Intermédiaire des Mathématiciens*, n° 1; janvier 1894).

L'équation différentielle demandée est

$$kk'^2 \frac{d^2\xi}{dk^2} + (1 - 3k^2)\frac{d\xi}{dk} - k\xi$$
$$= \frac{[k^2(K-J)^2 + k'^2 J^2][J^2 - k^2 K^2][(K-J)^2 - k'^2 K^2]}{4kk'^2[KJ(K-J)(k^2 K - J)]^{\frac{3}{2}}};$$

la fonction ξ de k sera de la forme

$$\xi = K f(k) + K' \varphi(k),$$

les fonctions f et φ étant données par des quadratures.

Vessiot (E.). — Sur les systèmes d'équations différentielles du premier ordre qui ont des systèmes fondamentaux d'intégrales. (H. 1-33).

Il s'agit des systèmes

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

pour lesquels l'intégrale générale peut se mettre sous la forme

$$(2)\quad x_i = \Phi_i(x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{pn} \mid c_1, \ldots, c_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où $x_{11}, \ldots, x_{1n}; \ldots; x_{p1}, \ldots, x_{pn}$ sont p intégrales particulières quelconques formant ce que l'on peut appeler un *système fondamental*, où $c_1, \ldots, c_n$ sont les constantes d'intégration, et où la forme des fonctions Φ_i est indépendante du système fondamental d'intégrales qui y figure. M. Lie a, en effet, remarqué (*Comptes rendus*, t. CXVI, p. 1233) qu'à un système (1) correspondent parfois une infinité de systèmes de formules (2), le plus général dépendant de fonctions arbitraires.

Dans le cas où il n'y a qu'un seul système de formules (2), M. Guldberg (*Comptes rendus*, t. CXVI, p. 964) a montré qu'on peut appliquer aux systèmes (1) la méthode employée par M. Vessiot pour une seule équation, le nombre p ne pouvant alors dépasser $n+2$. M. Vessiot en a conclu (*Comptes rendus*, t. CXVI, p. 1112) que ces systèmes appartiennent à la classe suivante :

$$(3)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{r} \theta_j(t)\, \xi_{ji}(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les $\xi_{ji}(x)$ sont les coefficients de r transformations infinitésimales définissant un groupe fini continu de transformations

$$(4)\qquad X_j f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r);$$

il propose de les nommer *systèmes de Lie*. M. Lie a en outre annoncé, dans la Note citée, que, *dans le cas le plus général, la classe des systèmes* (1) *possédant des systèmes fondamentaux d'intégrales se confond avec celle des systèmes de la forme* (3). L'auteur commence par établir cette proposition.

Soient ensuite

$$(5)\qquad x_i = f_i(x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les équations finies du groupe (4) *correspondant au système*, M. Vessiot montre qu'elles représentent l'intégrale générale du système (3) en y considérant $x_1^0, \ldots, x_n^0$ comme des constantes arbitraires, $a_1, \ldots, a_r$ comme des fonctions de t formant un système d'intégrales des équations

$$(6)\qquad \frac{da_k}{dt} = \sum_{j=1}^{r} \theta_j(t)\, \alpha_{jk}(a_1, \ldots, a_r) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

où les transformations infinitésimales

$$(7)\qquad A_j F = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a_1, \ldots, a_r) \frac{\partial F}{\partial a_k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

constituent le *groupe des paramètres* de (4). Cette condition nécessaire est aussi suffisante.

M. Vessiot conclut de là que *si les équations finies du groupe* (4) *sont connues*, l'intégration du système (3) est équivalente à celle du système (6). Cette même hypothèse étant faite, il s'occupe de la réduction des systèmes de Lie aux systèmes linéaires

Deux systèmes de Lie formés avec les mêmes fonctions $\theta_j(t)$ seront dits *isomorphes* si les groupes correspondants sont à la fois isomorphes holoédriquement et rapportés isomorphiquement l'un à l'autre. On peut alors supposer les équations finies de ces groupes écrites sous une forme telle qu'ils aient même groupe des paramètres. Les deux systèmes de Lie correspondent au même problème d'intégration qui dépend donc seulement de la nature des $\theta_j(t)$ et de la *structure* du groupe.

En associant à tout groupe tel que (4) le groupe *adjoint* dont les transformations infinitésimales

$$(8) \qquad \mathrm{E}_k f = \sum_{s=1}^{r} \sum_{i=1}^{r} c_{iks} e_i \frac{\partial f}{\partial e_s} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

sont linéaires et correspondent isomorphiquement aux $\mathrm{X}_k f$, on ramène l'intégration du système (3) à celle du système linéaire (9)

$$(9) \qquad \frac{de_s}{dt} = \sum_{k=1}^{r} \theta_k(t) \sum_{i=1}^{r} c_{iks} e_i,$$

si le groupe adjoint (8) est *holoédriquement* isomorphe au groupe (4), c'est-à-dire si le groupe (4) n'admet pas de transformation *distinguée*.

Si le groupe (4) contient r' transformations infinitésimales distinguées, le groupe adjoint n'est plus qu'à $r - r'$ paramètres et l'intégration du système (9) ne donne que $r - r'$ intégrales distinctes de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{r} \theta_j(t) \mathrm{A}_j f = 0;$$

les autres s'obtiennent par des quadratures.

M. Vessiot applique la théorie précédente au système

$$\frac{dx}{dt} = qz - ry, \qquad \frac{dy}{dt} = rx - pz, \qquad \frac{dz}{dt} = py - qx,$$

qui se présente dans l'étude du mouvement d'un solide qui a un point fixe, la rotation instantanée ayant p, q, r pour composantes, et retrouve ainsi les résultats de M. Darboux. Une autre application est relative à la recherche des trajectoires orthogonales d'une famille de sphères.

La réduction des systèmes de Lie à des systèmes dont le groupe est simple (*systèmes simples*) résulte de l'application de la théorie donnée par M. Lie pour l'intégration des systèmes complets qui admettent un groupe de transformations. M. Vessiot montre ainsi que le seul problème fondamental à résoudre est le suivant :

Intégrer l'équation

$$\mathrm{L}(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(x_1, \ldots, x_r, t) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

connaissant les transformations infinitésimales du groupe simple et simplement transitif qu'elle admet

$$X_j f = \sum_{i=1}^{r} \xi_{ji}(x_1, \ldots, x_r, t) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

La théorie de Galois. — L'auteur expose sous ce titre une théorie qui est l'extension aux systèmes de Lie de celle donnée par M. Picard pour les équations différentielles linéaires.

Cette dernière avait d'ailleurs été l'objet d'un beau travail de M. Vessiot (*Annales de l'École Normale*, 1892).

Soit

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \theta_j(t)\, \xi_{ji}(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

un système de Lie correspondant à un groupe simplement transitif dont on connaît les équations finies

$$(2) \qquad X_j f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

On peut toujours supposer que c'est un groupe des paramètres, de sorte que ses équations étant

$$(3) \qquad x_i = f_i(x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid a_1, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

l'intégrale générale de (1) s'écrit

$$(4) \qquad x_i = f_i(c_1, \ldots, c_n \mid \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

où $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ est une intégrale particulière quelconque, constituant à elle seule un *système fondamental*. Ceci exige que les équations (4) soient résolubles par rapport aux constantes, c'est-à-dire que $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ n'annule pas le déterminant des ζ_{ki}, les équations

$$(5) \qquad Z_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \zeta_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

formant les transformations infinitésimales du groupe simplement transitif *réciproque* de (2), groupe dont les transformations finies sont les équations (4) où les deux systèmes de variables sont les x_i et les $\overline{x}_i$. Ce groupe (5) joue ici le même rôle que le groupe des substitutions de n lettres dans la théorie de Galois.

Les transformations infinitésimales de (5) qui n'altèrent pas une fonction donnée de $x_1, \ldots, x_n$ et de leurs dérivées jusqu'à un ordre quelconque forment le *groupe de cette fonction*. Le groupe (5) a pour invariants les Δ_j dé-

finis par les équations

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} \Delta_j \xi_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

c'est-à-dire les coefficients du système (1) et leurs dérivées. Il n'en admet pas d'autres fonctionnellement distincts des précédents.

Si le groupe d'une fonction V se compose de $n - \nu$ transformations infinitésimales, il a ν invariants nouveaux indépendants $V, V', \ldots, V^{\nu-1}$; il existe entre V et ses dérivées une relation

$$\Phi(V, V', \ldots, V^{(\nu)} \mid \Delta, \Delta', \ldots) = 0$$

identique par rapport aux $x, x', \ldots$. Toute fonction des intégrales admettant le groupe de V est une fonction de V et de ses dérivées (et des Δ et de leurs dérivées) qui s'obtient par des éliminations.

Si l'on fixe un *domaine de rationalité*, à tout système tel que (1) correspond un sous-groupe G du groupe (5) tel que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction rationnelle des intégrales soit rationnelle est qu'elle admette toutes les transformations infinitésimales de* G. Ce groupe G est dit *groupe de Galois* du système (1); on peut lui appliquer une méthode de réduction analogue à celle qu'a employée M. Vessiot pour les équations différentielles linéaires. L'auteur montre enfin qu'*on peut aussi ramener l'intégration du système* (1) *à celle d'un système de Lie dont le groupe est isomorphe au groupe* G.

Legoux (*M.-A.*). — Étude sur les mouvements relatifs. (I. 1-20).

L'auteur se propose de montrer comment on peut, sans artifice de calcul, grâce à une interprétation convenable des divers termes qui composent la force vive totale d'un système en mouvement, appliquer sans difficulté les formules de Lagrange et de Jacobi à la solution des problèmes du mouvement relatif. Cette interprétation géométrique permet de calculer directement la force vive au moyen de variables quelconques; si l'on choisit, pour les variables q_i les paramètres indépendants qui fixent la position du système par rapport aux axes mobiles, les formules de Lagrange définiront le mouvement relatif.

L'auteur s'occupe également de la question, traitée par Bour (*Journal de Mathématiques*, 1863), qui a pour but de mettre les équations du mouvement relatif sous la forme canonique d'Hamilton; il établit à nouveau les résultats de Bour en appliquant au cas présent une remarque ingénieuse de M. Bertrand pour la transformation des équations de Lagrange. Un grand nombre d'applications justifient pratiquement ses observations.

Stieltjes (*T.-J.*). — Recherches sur les fractions continues. (J. 1-122).

Ce travail terminé, dans le Tome IX des *Annales*, sera analysé avec ce Tome.

Sauvage (*L.*). — Théorie générale des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes. (1-24) (Chap. I).

Même observation que pour le travail précédent.

Tome IX : 1895.

Cosserat (*E.*). — Notice sur les travaux scientifiques de Thomas-Jean Stieltjes. (3-64).

Analyse de 82 Notes ou Mémoires publiés par Stieltjes dans divers Recueils, précédée d'une Notice biographique.

Stieltjes (*T.-J.*). — Recherches sur les fractions continues (*suite et fin*). (A.5-47) [Cf. *Annales de Toulouse,* VIII, J(1, 122)].

Le travail de M. Stieltjes est, d'après M. Poincaré, qui en a rendu compte (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CXIX, p. 630), « un des » plus remarquables Mémoires d'Analyse qui aient été écrits dans ces dernières » années »; il mérite donc une analyse étendue.

L'objet de ce travail est l'étude de la fraction continue

$$1 : a_1 z + 1 : a_2 + 1 : a_3 z + 1 : a_4 + \ldots,$$

où z est une variable complexe, tandis que les a sont réels et positifs.

Soit $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite, l'auteur cherche dans quel cas cette réduite tend vers une limite pour $n = \infty$ et quelle est la nature de cette limite considérée comme fonction de z. Les résultats sont très différents suivant que la série

$$(S) = a_1 + a_2 + \ldots$$

est convergente ou divergente.

I. Plaçons-nous d'abord dans le premier cas $\left(\sum_1^\infty a_n \textit{ est convergente}\right)$. On a pour toute valeur finie de z

$$\lim P_{2n}(z) = p(z), \qquad \lim Q_{2n}(z) = q(z);$$
$$\lim P_{2n+1}(z) = p_1(z), \qquad \lim Q_{2n+1}(z) = q_1(z),$$

et les quatre fonctions *holomorphes* p, q, p_1, q_1 satisfont à la relation

$$qp_1 - pq_1 = +1.$$

Ces fonctions, holomorphes dans tout le plan, sont de genre zéro et n'ont que des zéros simples placés sur la partie négative de l'axe réel.

Les réduites d'ordre pair et d'ordre impair tendent chacune vers une limite, mais les deux limites sont différentes; elles peuvent aussi se mettre sous forme

d'une série de fractions simples

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\mu_1}{z+\lambda_1} + \frac{\mu_2}{z+\lambda_2} + \ldots,$$

$$\frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \frac{\nu_0}{z} + \frac{\nu_1}{z+\theta_1} + \frac{\nu_2}{z+\theta_2} + \ldots,$$

λ_k, μ_k, ν_k, θ_k étant des nombres réels et positifs.

II. Supposons la série (S) divergente : Les réduites d'ordre pair et d'ordre impair tendent vers la même limite $F(z)$, pour toute valeur de z qui n'est pas réelle et négative. La fonction $F(z)$ est analytique et holomorphe dans tout le plan, *sauf la partie négative de l'axe réel*, qui doit être regardée comme une ligne singulière. Pour éclaircir la nature de cette ligne singulière, Stieltjes met la fonction $F(z)$ sous la forme

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u} = \int_0^\infty \frac{\Phi(u)\,du}{(z+u)^2},$$

où $\Phi(u)$ est une fonction réelle croissante, non analytique en général, qui varie de o à $\frac{1}{a_1}$. Cette fonction $\Phi(u)$ peut avoir des sauts brusques dans tout intervalle. La ligne singulière (o, $-\infty$) est en général un obstacle infranchissable à la continuation de la fonction $F(z)$.

Les résultats généraux du travail de Stieltjes étant indiqués, nous allons fixer les principales étapes de la voie qu'il a suivie pour les obtenir et signaler en passant quelques-uns des résultats accessoires.

Après avoir indiqué le mode de formation des polynomes $P_n(z)$, $Q_n(z)$, Stieltjes s'occupe de la distribution relative des racines des équations

$$P_n(z) = 0, \qquad Q_n(z) = 0.$$

Il démontre que *les racines de* $P_{2n}(z) = 0$ *séparent celles de* $Q_{2n}(z) = 0$, et de même que les racines de $P_{2n+1}(z) = 0$ séparent celles de $Q_{2n+1}(z) = 0$. Il résulte de là que *dans les décompositions*

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{M_1}{z+x_1} + \frac{M_2}{z+x_2} + \ldots + \frac{M_n}{z+x_n},$$

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{N_0}{z} + \frac{N_1}{z+y_1} + \ldots + \frac{N_n}{z+y_n},$$

les M *et les* N *sont positifs.*

Une extension des propositions précédentes permet d'établir que *la dérivée partielle* $\frac{\partial x_k}{\partial a_i}$ *d'une racine* x_k *de l'équation* $Q_n(z) = 0$, regardée comme fonction de a_k, *ne peut jamais être négative.*

Stieltjes considère ensuite le développement de la fraction continue suivant les puissances décroissantes de z, c'est-à-dire la série *formelle*

$$(S_1) \qquad \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \frac{c_3}{z^4} + \ldots\ldots$$

où les c_n sont des fonctions rationnelles des a_n entièrement déterminées. En ayant égard aux expressions obtenues de $\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}$, $\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)}$, on a

$$c_k = \sum_1^n M_i x_i^k = \sum_0^n N_i y_i^k;$$

les c_n sont positifs et la forme quadratique

$$\sum_{i,k}^{m-1} c_{p+i+k} X_i X_k$$

est *définie* et positive. Son déterminant est donc positif et l'on a, en faisant $m = 2$,

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} < \frac{c_{n+2}}{c_{n+1}},$$

c'est-à-dire que $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ *croît avec n*. Ce rapport peut croître au delà de toute limite, et alors la série (S_1) est toujours divergente, ou tendre vers une limite λ, et alors la série (S_1) est convergente pour $|z| > \lambda$.

Stieltjes montre que, *dans le premier cas, la plus grande racine de l'équation*

$$Q_n(-z) = 0$$

croît avec n au delà de toute limite, et dans le second cas, elle tend vers la limite λ.

Comment reconnaîtra-t-on si $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ tend vers une limite finie ou croît au delà de toute limite? Considérons les nombres $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$; s'ils ne sont pas limités supérieurement, $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ croît au delà de toute limite; s'ils ont une limite supérieure l, le rapport $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ tend vers une limite finie qui ne peut surpasser $4l$.

L'auteur aborde alors l'étude de la fraction continue en faisant $z = 1$. On trouve d'abord que les réduites d'ordre pair et d'ordre impair ont des limites finies

$$\lim \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = L_1, \qquad \lim \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = L, \qquad L_1 \geqq L.$$

Si la série $\sum_1^\infty a_n$ *est divergente*, l'une au moins des quantités Q_{2n}, Q_{2n+1} croît au delà de toute limite; la relation

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{1}{Q_{2n} Q_{2n+1}}$$

montre que l'on aura $L_1 = L$; la fraction continue est dite *convergente*.

Si la série $\sum_1^\infty a_n$ *est convergente,* Q_{2n} et Q_{2n+1} tendront vers des limites finies, et l'on aura $L_1 > L$; la fraction continue est *oscillante* (*Cf.* STERN, *Journal de Crelle,* t. 71).

En donnant à z une valeur réelle et positive x, il y aura oscillation ou convergence, suivant que la série

$$a_1 x + a_2 + a_3 x + a_4 + \ldots$$

est convergente ou divergente.

Les mêmes raisonnements appliqués aux réduites

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)}, \qquad \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{1}{a_1 z} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{2k+1} z}{Q_{2k-1}(z)\,Q_{2k+1}(z)},$$

et l'étude de la convergence des séries qui en résultent pour $n = \infty$, conduisent alors aux propositions générales rappelées au début, dans le cas où *z est complexe et a sa partie réelle positive.*

L'extension de ces résultats au cas où la partie réelle de z est négative exige de nouvelles recherches sur la théorie des fonctions; avant d'aborder ces recherches, Stieltjes traite, par une méthode particulière, le cas où la série $\sum_1^\infty a_n$ est convergente.

Il montre les rapports de la question considérée avec le *problème des moments :* Considérons sur une droite indéfinie OX une distribution de masses positives, la masse m_i étant concentrée à la distance ξ_i de l'origine; la somme $\sum m_i \xi_i^k$ est appelée *moment d'ordre k* de la masse totale par rapport à l'origine. Supposons *qu'on donne les moments des divers ordres* c_k *et qu'on recherche la distribution des masses;* Stieltjes établit que si le problème est possible, c'est-à-dire si l'on peut déterminer les m et les ξ de façon à vérifier les équations

$$c_k = \sum m_i \xi_i^k,$$

la série $\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \ldots$, réduite en fraction continue, appartient au type étudié *avec des valeurs positives des* a_i. Si la série $\sum a_n$ est convergente, il y a une infinité de solutions; deux d'entre elles sont données par les systèmes de masses (μ_i, λ_i), (ν_i, θ_i) qui figurent dans $\frac{p(z)}{q(z)}$ et $\frac{p_1(z)}{q_1(z)}$. Si la série $\sum a_n$ est divergente, il n'y a qu'une seule solution.

Le théorème de théorie des fonctions qui permet à l'auteur d'étudier dans tous les cas la convergence des séries limites de

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}, \qquad \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)}$$

pour n infini, est le suivant : Soient $f_1(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ une suite de fonctions holomorphes dans un domaine S limité par un contour s; si le module de la somme $f_1 + \ldots + f_n$ admet une limite supérieure L indépendante de n, lorsque z est dans S ou sur s; si ensuite la série

$$F(z) = \sum_1^\infty f_n(z)$$

est uniformément convergente dans un cercle quelconque C entièrement intérieur à S, on peut affirmer qu'elle est uniformément convergente dans tout le domaine S, et y représente une fonction holomorphe.

Il ne reste plus qu'à éclaircir la nature de la coupure formée par la partie négative de l'axe réel. L'auteur démontre d'une manière générale que l'on a

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \int_0^\infty \frac{\Phi(u)\,du}{(z+u)^2},$$

$\Phi(u)$ étant une fonction croissante qui caractérise une certaine distribution de masses. Les relations

$$c_k = \int_0^\infty u^k\, d\Phi(u)$$

montrent que cette fonction $\Phi(u)$ donne une solution du *problème des moments;* dans le cas où la série $\sum a_n$ est convergente, il y a une infinité de fonctions Φ; si la série $\sum a_n$ est divergente, il n'y en a qu'une seule. Enfin, si le rapport $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ a pour limite λ, on peut prendre $\Phi(u)$ constant à partir de $u = \lambda$ et écrire

$$F(z) = \int_0^\lambda \frac{d\Phi(u)}{z+u}.$$

Stieltjes aborde ensuite l'étude de la convergence de la fraction continue qui provient de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{d\Psi(u)}{z+u}$, où $\Psi(u)$ *est une fonction croissante quelconque.* Il étudie divers cas où la fraction continue est oscillante, et termine en développant des applications particulières. Indiquons encore ce résultat qu'*il suffit de transformer la série de Stirling en fraction continue pour obtenir une expression convergente tant que la partie réelle de z est positive.*

Lacour (*E.*). — Sur l'équation de la chaleur $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial z}$ (B. I, 19).

L'auteur étend à l'équation précédente quelques-uns des résultats donnés par M. Appell pour l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$ (*Journal de Mathématiques*, 1895).

Il commence par rechercher toutes les transformations *réelles*

$$u = \lambda(x, y, z)\,U(X, Y, Z),$$
$$X = \varphi(x, y, z), \qquad Y = \psi(x, y, z), \qquad Z = \chi(x, y, z),$$

qui n'altèrent pas la relation

$$\delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

à une transformation orthogonale des coordonnées x, y près, ces transformations résultent de la composition des deux suivantes :

$$u = CU, \qquad X = \rho x, \qquad Y = \rho y, \qquad Z = \rho^2 z;$$
$$u = \frac{U}{z} e^{-\frac{x^2+y^2}{4z}}, \qquad X = \frac{x}{z}, \qquad Y = \frac{y}{z}, \qquad Z = \frac{-1}{z}.$$

Il forme ensuite le polynome le plus général en x, y, z, homogène et de degré n en $x, y, \sqrt{z}$, qui vérifie l'équation $\delta u = 0$, au moyen des polynomes de degré égal ou inférieur qui satisfont aux relations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

L'emploi de l'adjointe de Riemann le conduit à un théorème analogue à celui de Green, dont il fait une application intéressante à l'expression d'une solution u pour tous les points d'une tranche comprise entre deux plans parallèles $z = a$, $z = b$ quand on la connaît sur la face $z = a$

$$u(x, y, z_1) = \frac{1}{4\pi(z_1 - a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\lambda, \mu, a)\, e^{-\frac{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2}{4(z_1-a)}}\, d\lambda\, d\mu.$$

Raffy (*L.*). — Quelques propriétés des surfaces harmoniques (C. I, 44).

M. Raffy appelle ainsi les surfaces dont l'élément linéaire a la forme

$$ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2).$$

Il part de la condition nécessaire et suffisante donnée par Massieu (Darboux, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, t. III, p. 30) pour qu'un élément linéaire $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ soit harmonique [l'équation $\Delta z = 1$ dont dépend la détermination des géodésiques doit admettre une intégrale quadratique

$$\theta = Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 = \text{const.},$$

dont le premier membre n'a pas de facteur linéaire commun avec Δz (le cas où, pour une valeur de la constante λ, l'expression $\theta + \lambda\,\Delta z$ est un carré conduit à une surface applicable sur une surface de révolution)] pour établir que *toute surface harmonique dont les lignes d'égale courbure sont parallèles est applicable sur une surface de révolution.*

La même méthode analytique le conduit également au théorème suivant :

Si l'on écarte les surfaces qui ont un cône directeur isotrope, toutes les surfaces réglées harmoniques sont applicables sur le plan ou sur les surfaces de révolution, ou sur les quadriques.

L'auteur se propose ensuite d'étudier les intégrales linéaires et quadratiques de l'équation aux cercles géodésiques en appliquant la règle donnée par M. Darboux (*Leçons sur la Théorie des surfaces*, t. III, Liv. IV, Chap. VII). Pour les surfaces applicables sur les surfaces de révolution, l'équation aux cercles géodésiques admet une intégrale linéaire; la réciproque est vraie.

Les seules surfaces *réelles* pour lesquelles l'équation aux cercles géodésiques admette une intégrale quadratique sont des surfaces harmoniques. M. Raffy ramène la détermination de leurs éléments linéaires à la résolution de l'équation fonctionnelle

$$(\xi' + \eta')(\Phi' - F') + \xi(\Phi'' - F'') + \eta(\Phi'' + F'') = 2(\Phi F'' - F\Phi''),$$

où Φ dépend du seul argument $x + y$, F du seul argument $x - y$.

Il en signale deux solutions particulières, dont l'une formée par les surfaces à courbure totale constante comprend tous les cas où il existe à la fois une intégrale linéaire et une intégrale quadratique.

Maillet (*E.*). — Sur quelques propriétés des groupes de substitutions d'ordre donné. (D. 1, 22).

La connaissance de l'ordre d'un groupe permet parfois d'obtenir des propriétés importantes de ce groupe; par exemple, M. Frobenius a montré que tout groupe d'ordre $p_1 p_2 \ldots p_n p^\alpha$, où les nombres premiers différents $p_1, \ldots, p_n$ sont inférieurs à p, est résoluble. Réciproquement, des propriétés du groupe étant données, l'ordre du groupe doit satisfaire à certaines conditions; ainsi, quand p^m est la plus haute puissance du facteur premier p qui divise l'ordre g du groupe G, ce groupe renfermera *au moins* un groupe d'ordre p^m, et l'on aura

$$g = p^m \nu(1 + np), \qquad (1)$$

ν étant premier avec p et $p^m\nu$ étant l'ordre du groupe formé des substitutions de G permutables à un sous-groupe d'ordre p^m (Sylow, *Mathematische Annalen*, t. V).

M. Maillet donne un certain nombre de propositions relatives à cette double liaison et établit à nouveau un certain nombre de résultats déjà connus. Citons particulièrement les théorèmes suivants :

L'ordre g d'un groupe G de *classe* $N - u$ et de *degré* N divise le produit $N(N-1)\ldots(N-u)$.

Dans la formule de M. Sylow, si $m > 1$ et $n < p$, G est composé et ne peut être primitif que s'il est linéaire et de degré p^θ. Si m est supérieur à 1 et si G contient une substitution d'ordre p^m, G ne peut être simple ou primitif que si n est au moins égal à p^{m-1}.

Genty (*E.*). — Sur la déformation infinitésimale des surfaces. (E. 1, 11).

L'auteur établit les équations du problème de la déformation infiniment

petite et les applique à la recherche des cas où cette déformation conserve les lignes de courbure. Signalons le résultat suivant : Si une surface (A) admet pour représentation sphérique de ses lignes de courbure un réseau isotherme, on pourra obtenir par de simples quadratures une déformation infinitésimale de (A) conservant les lignes de courbure.

Vessiot (E.). — Sur quelques équations différentielles ordinaires du second ordre (F. 1, 26).

Ces équations sont celles dont l'intégrale générale est de la forme

$$x = \frac{c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\varphi_3(t)}{c_1\psi_1(t) + c_2\psi_2(t) + c_3\psi_3(t)},$$

les rapports des c_i étant les constantes d'intégration. Elles ont la forme

$$(1) \qquad \mathrm{A}(x'x'' - 2x'^2) + \mathrm{B}x'' + \mathrm{C}xx' + \mathrm{D}x' + \mathrm{P}x^3 + \mathrm{Q}x^2 + \mathrm{R}x + \mathrm{S} = 0,$$

les coefficients étant liés par deux relations différentielles. Leur intégration se ramène à celle d'une équation linéaire du troisième ordre, car on peut toujours sans intégration déterminer une transformation

$$x = \frac{\alpha(t)y + \beta(t)}{\gamma(t)y + \delta(t)},$$

qui donne, pour équation en y, l'équation dont dépendent les dérivées logarithmiques des intégrales d'une équation linéaire du troisième ordre. L'auteur montre comment l'intégration de l'équation en y

$$(2) \qquad y'' + 3yy' + y^3 + \lambda(t)(y' + y^2) + \mu(t)y + \nu(t) = 0$$

se simplifie par la connaissance d'une ou de plusieurs solutions particulières.

Ces réductions tiennent à ce que l'équation considérée possède des systèmes fondamentaux d'intégrales, l'intégrale générale s'exprimant, par des formules connues, au moyen de quatre intégrales particulières quelconques.

Une seconde Partie est consacrée à la réduction des équations générales (1) à une forme canonique par l'emploi des transformations

$$x = \frac{\alpha(t)y + \beta(t)}{\gamma(t)y + \delta(t)}, \qquad t = \varphi(u),$$

et à la détermination sommaire des invariants; la méthode employée est celle dont Laguerre et Halphen se sont servis pour les équations linéaires.

Les formes adoptées sont, dans le cas général,

$$x'' + 3xx' + \mathrm{I}x^3 + \mathrm{J}x + \mathrm{K} = 0,$$

et, dans les cas particuliers,

$$x'' + 3xx' + x^3 + \mathrm{G}x - \mathrm{H} = 0,$$
$$x'' + \mathrm{E}x + \mathrm{F} = 0,$$
$$x'' + x^2 + \mathrm{T} = 0.$$

Enfin M. Vessiot traite dans la troisième Partie la question suivante :

Reconnaître si une équation du second ordre peut s'abaisser au premier ordre par une transformation $V = F(x', x)$; *déterminer dans ce cas les fonctions* F.

Ces fonctions F sont, en général, fonctions d'une seule d'entre elles qu'on obtient sans intégration, ou par une quadrature si l'équation est de la forme

$$x'' = A(x, x')\theta(t) + B(x, x').$$

Pour l'équation unique

$$x'' = x'\theta(t) + x'^2\xi(x),$$

où θ et ξ sont des fonctions quelconques, il y a une infinité de solutions distinctes; elles s'obtiennent par des quadratures. L'équation s'intègre d'ailleurs elle-même par des quadratures.

Landfriedt (E.). — Quelques recherches sur les fonctions à multiplicateurs. (G. 1, 18).

Les fonctions à multiplicateurs ont été considérées par M. Appell (*Journal de Math.*, 1883; *Acta mathematica*, t. XIII), qui a mis en évidence l'analogie qui existe entre leur théorie et celle des fonctions algébriques rationnelles en s et z sur la surface de Riemann

$$F(s, z) = 0.$$

L'auteur se propose de faire ressortir cette analogie en traitant certaines questions laissées de côté par M. Appell.

Il débute par une démonstration de l'extension du théorème d'Abel aux fonctions à multiplicateurs, basée sur la seule définition de ces fonctions. Une définition du *défaut* et de l'*excès* d'un système de pôles d'une fonction à multiplicateurs lui permet d'étendre à ces fonctions la classification donnée par M. Christoffel pour les intégrantes algébriques. Il donne enfin une formule générale pour représenter les fonctions qui appartiennent à la première ou à la seconde espèce dans la classification qu'il a adoptée.

Sauvage (L.). — Théorie générale des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes. [Chap. II, III, IV, 25-100; Chap. V, VI, VII, 1-76 (suite et fin) (*Cf.* t. VIII, 1-24)].

Le travail considérable de M. Sauvage est consacré à l'exposition des théories générales concernant les systèmes

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n,$$

en particulier de la théorie de M. Fuchs et des développements considérables qu'elle a reçus, auxquels sont attachés les noms de MM. Thomé, Horn, Frobenius, Floquet, Picard, Kœnigsberger, etc. Il s'est proposé d'y mettre en

relief la théorie des *diviseurs élémentaires* de Weierstrass, qui y intervient, comme on sait, de façon constante.

Chapitre I. — On montre que si les coefficients a du système

$$(B) \qquad x\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

sont holomorphes devant le voisinage de l'origine, on peut intégrer ce système par les séries. L'auteur a démontré la convergence de ces séries dans un travail antérieur (*Annales de l'École Normale*, 1886).

Définition des éléments d'une solution au delà du cercle de convergence des séries. Systèmes fondamentaux. Théorème de Liouville : $D = Ce^{\int(\Sigma a_{ii})dx}$. Solution générale. Réduction qui correspond à la connaissance d'une solution.

Chapitre II. — Exposé de la théorie des diviseurs élémentaires par la méthode de M. Darboux (*Journal de Mathématiques*, 1874).

Chapitre III. — Extension, aux systèmes linéaires (A), de la théorie des points singuliers donnée par M. Fuchs pour une équation différentielle linéaire. En un point singulier, les diviseurs élémentaires du premier membre de l'équation déterminante

$$R(\omega) = 0$$

conduisent à un système fondamental particulier. Calcul, d'après M. Fuchs, des éléments de ce système fondamental. Examen des équations linéaires dont les intégrales sont racines d'une même équation algébrique.

Chapitre IV. — Forme des éléments d'une solution au voisinage d'un point singulier. Examen des systèmes *réguliers* de la forme (B) : les éléments de leurs solutions sont composés linéairement d'expressions de la forme

$$x^r(A_0 + A_1 \log x + \ldots + A_k \log^k x),$$

qui sont infinies d'ordre fini pour $x = 0$.

Exposé du calcul *complet* de l'intégration des systèmes réguliers, d'après M. Horn (*Mathematische Annalen*, Vol. XXXIX).

Chapitre V. — Recherche des systèmes réguliers. Ils se rattachent par des substitutions simples aux systèmes (B). Application à l'équation différentielle linéaire.

Chapitre VI. — Étude des systèmes linéaires (A) où les coefficients a sont des fonctions uniformes simplement périodiques, dont toutes les solutions sont uniformes. Extension des théorèmes de M. Floquet au système (A).

Étude, d'après M. Picard (*Journal de Crelle*, Bd 90), d'un système particulier à coefficients doublement périodiques.

Chapitre VII. — Réduction des équations différentielles algébriques à des équations du premier ordre. Recherches de M. Kœnigsberger (*Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen*, Leipzig, G. Teubner ; 1889).

Théorie de M. Darboux pour l'utilisation des *intégrales* du système (A) dans la détermination de ses *solutions* (*Comptes rendus*, 1880).

Principes de la théorie des fonctions invariantes des solutions du système (A), d'après M. Appell.

Ce court exposé montre assez l'étendue et l'intérêt des questions traitées par M. Sauvage. Il est clair que la lecture de ce beau Travail s'impose à quiconque veut approfondir l'étude de l'intégration des équations différentielles linéaires par les séries.

J. D.

THE QUARTERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS. Vol. XXX ; 1899 (¹).

Dickson (*L.*). — Le premier groupe hypo-abélien généralisé. (1-16).

Ce Travail se rapporte au même ordre d'idées que le Mémoire de l'auteur : *Un système triplement infini de groupes simples*, inséré dans le Volume précédent du *Quarterly Journal* et qu'un Article qu'il vient de publier dans les *Annals of Mathematics;* il étend au domaine de Galois d'ordre 2^n les développements donnés par M. Jordan dans son *Traité des substitutions* (p. 199-206) et relatifs au domaine des nombres entiers pris suivant le module 2. L'auteur y étudie un groupe de substitutions linéaires dont les coefficients et les indices sont des imaginaires de Galois.

Mathews (*G.*). — Conditions pour qu'une relation du second degré par rapport à deux variables soit poristique (16-17).

La relation $F(x, y) = 0$ étant supposée symétrique, on dit qu'il lui est associé un porisme du $n^{\text{ième}}$ ordre, si en considérant la suite d'équations

$$F(x_1, x_2) = 0, \qquad F(x_2, x_3) = 0, \qquad F(x_3, x_4) = 0, \qquad \ldots,$$

où x_2 désigne une racine déterminée de l'équation du second degré, x_3 une racine autre que x_1, x_4 une racine autre que x_3, ..., x_n est égal à x_1 (*Voir* HALPHEN, *Fonctions elliptiques*, t. II, polygones de Poncelet). L'auteur parvient à une forme plus élégante des coefficients que celle donnée par Halphen.

Scheppard (*W.*). — Sur les relations entre les nombres de Bernoulli et d'Euler. (17-46).

Signalons en particulier le développement

$$f(b) - f(a) = \frac{D_1}{1} f'(b)(b-a) - \frac{E_1}{2!} f''(a)(b-a)^2$$
$$- \frac{D_2}{3!} f'''(b)(b-a)^3 + \frac{E_2}{4!} f^{\text{IV}}(a)(b-a)^4 + \ldots,$$

(¹) Voir *Bulletin*, t. XXIII_2, p. 156.

où les nombres entiers

$$E_r = \frac{2^{2r+1}}{\pi^{2r+1}}(2r)!\left(\frac{1}{1^{2r+1}} - \frac{1}{3^{2r+1}} + \frac{1}{5^{2r+1}} - \dots\right)$$

sont les nombres d'Euler et où les nombres entiers

$$D_r = \frac{2^{2r+1}}{\pi^{2r}}(2r-1)!\left(\frac{1}{1^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} + \frac{1}{5^{2r}} + \dots\right)$$

sont liés simplement aux nombres de Bernoulli. L'auteur établit diverses relations intéressantes entre ces nombres et les fonctions circulaires.

Lovett (*E.*). — La théorie des perturbations et la théorie des transformations de contact de Lie. (47-149).

Cet important Travail, rédigé sous l'inspiration directe de Sophus Lie, contient un intéressant historique de la méthode des variations des constantes arbitraires depuis son introduction dans la Science, et montre la place de cette méthode dans la théorie des transformations de contact.

Ce Mémoire est d'ailleurs d'un intérêt général et n'aborde pas les problèmes spéciaux de la Mécanique céleste. Il comprend cinq parties :

1° La théorie des perturbations d'après Lagrange et Poisson;

2° La théorie de Hamilton et Jacobi;

3° La théorie des transformations de contact de Lie;

4° Les Mémoires de Schering sur la théorie de Hamilton-Jacobi;

5° Le Mémoire de Lie sur la théorie des perturbations et la théorie des transformations de contact.

Cette dernière partie contient l'analyse détaillée d'un Mémoire paru sous ce titre dans le second Volume des *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab* (Christiania, 1877). Elle peut être regardée comme une nouvelle rédaction, faite sous les yeux mêmes de l'illustre auteur, de ce Mémoire, dont elle rendra les résultats plus accessibles. On y trouvera, en particulier, l'étude de la transformation d'un système canonique dans un autre système canonique.

Glaisher (*J.*). — Sur les restes des coefficients binomiaux relativement à un module premier. (150-156).

On trouvera, dans le présent Volume, trois Articles de M. Glaisher sur des sujets connexes. Dans les deux premiers, qui portent le titre ci-dessus, il donne un moyen simple, en supposant les nombres entiers n, r écrits dans le système dont la base est le nombre premier p, pour obtenir le reste par rapport au module p du coefficient $(n)_r$ de x^r dans le développement de $(1+x)^r$, pour reconnaître si ce coefficient est divisible par une puissance de p, et pour obtenir le quotient. Il donne plusieurs applications et exemples. Dans le troisième Article, intitulé *Un théorème de congruence relatif à la somme de coefficients binomiaux,* il établit la congruence

$$\Sigma(n)_r \equiv (j)_k \pmod{p},$$

où p est supposé premier, où j et k ont une des valeurs $1, 2, \dots, p-1$, ou n

est congru à $j \pmod{p-1}$, où le signe de sommation se rapporte aux valeurs de r congrues à $k \pmod{p-1}$ qui sont supérieures à o et ne dépassent pas n. Enfin $(j)_k$ est supposé nul pour $k > j$. Cette proposition, lorsque l'on suppose $k = p - 1$, est une conséquence naturelle du théorème de Standt sur les nombres de Bernoulli. Dans le même Article, M. Glaisher donne une évaluation des sommes

$$\sum \frac{(n)_r}{p},$$

où p est un nombre premier impair et où r doit prendre des valeurs divisibles par $p-1$ et telles que $(n)_r$ soit divisible par p.

Wilkinson (*A.*). — Sur le groupe transitif de substitutions de 24 lettres qui admet deux systèmes d'imprimitivité des degrés 3 et 4. (157-165).

L'intérêt de ce groupe consiste en ce qu'il a deux systèmes de facteurs d'imprimitivité qui ne sont pas identiques (*Cf.* JORDAN, *Traite des substitutions*, p. 35, 36).

Glaisher (*J.*). — Sur les sommes des séries $1^n + 2^n + \ldots + x^n$, et $1^n - 2^n + \ldots \pm x^n$. (166-204).

L'auteur a donné, dans le précédent Volume du *Quarterly Journal*, des formules générales pour l'évaluation de ces sommes; il applique ces formules au cas où les développements procèdent suivant les puissances de $x + \frac{1}{2}$, $x^2 + x$, ou plus généralement de $x + \alpha$, $x^2 + 2\alpha x$. Il rencontre, chemin faisant, un grand nombre de relations entre les coefficients.

Walker (*G.*). — Dispersion de la lumière par de petites particules de matière. (204-220).

Ce travail se rapporte aux recherches de Lord Rayleigh insérées dans le *Philosophical Magazine* d'août 1881. L'auteur y examine l'effet d'une particule médiocrement conductrice.

Brill (*J.*). — Suggestions en vue de la construction d'une théorie générale des systèmes d'équations pfaffiennes. (221-242).

L'auteur annonce un second Mémoire qui continuera et complétera celui-ci, qui est consacré à la classification des cas où le nombre des intégrales d'un système d'équations pfaffiennes est moindre que le minimum normal et à la discussion de la forme des conditions pour qu'il en soit ainsi. La classification est exprimée par deux Tables, de formation simple, qui donnent, dans les différents cas, le nombre d'intégrales arbitraires et le nombre d'intégrales déterminées; l'auteur est ainsi conduit à distinguer divers groupes de cas; dans le premier, par exemple, les n équations pfaffiennes contiennent au moins $n+1$, au plus $2n+1$ variables. C'est ce premier groupe qu'étudie particulièrement M. Brill : il donnera ensuite des indications sur le passage du premier groupe

au second. Il établit, en se réservant de montrer plus tard qu'elles sont suffisantes, les conditions pour que le nombre des intégrales puisse être moindre que le minimum normal : la forme de ces conditions peut fournir, en effet, des renseignements sur la manière de procéder dans la théorie de l'intégration; elles sont bien connues dans le cas d'une seule équation pfaffienne; le but de M. Brill est de montrer l'analogie du cas général avec ce cas particulier. « Quelques mathématiciens, dit-il en terminant, ont exprimé l'opinion que la méthode de Jacobi-Clebsch ne peut pas être étendue au cas d'un système d'équations pfaffiennes. Je pense, cependant, que, par l'introduction d'amplifications et de modifications nécessaires, on peut imaginer une méthode qui puisse être regardée comme une généralisation de la méthode de Jacobi-Clebsch et permette effectivement la discussion d'un système. J'espère même avoir fait, dans ce Mémoire, le premier pas dans la direction désirée.... »

Miller (*G.*). — Sur les groupes d'opérations dont l'ordre est moindre que 64 et ceux dont l'ordre est $2p^3$, p étant un nombre premier. (243-263).

L'auteur s'occupe plus particulièrement des groupes d'ordre 48. Il y en a cinquante-deux, dont cinq sont abéliens et un hamiltonien. Tous contiennent au moins un sous-groupe d'ordre 24, sauf deux. Chacun de ces deux groupes contient seize sous-groupes d'ordre 3 et un sous-groupe d'ordre 16. Dans dix-sept des cinquante-deux groupes d'ordre 48, chaque sous-groupe d'ordre premier est conjugué de lui-même; dans vingt-cinq, il n'y a qu'un sous-groupe d'ordre 3, et plusieurs sous-groupes conjugués d'ordre 2; dans huit de ces groupes, il y a quatre sous-groupes conjugués d'ordre 3. Tous ces groupes, à l'exception de dix-huit, contiennent au moins un sous-groupe abélien d'ordre 24. Dans douze groupes, ce sous-groupe abélien est cyclique, etc.

Outre cette étude des groupes d'ordre 48, le travail de M. Miller contient une étude des groupes de degré $2p^3$, où p est un nombre premier impair.

Radford (*E.*). — Sur la solution de certaines équations du septième degré. (263-306).

Il s'agit de la résolvante du septième degré de l'équation modulaire du huitième degré pour la transformation du septième ordre. Le Travail de M. Radford est consacré à établir les résultats que M. Klein a déduits de la théorie des fonctions dans son Mémoire sur la transformation du septième ordre des fonctions elliptiques (*Math. Annalen*, t. XIV), où il donne la solution de l'équation modulaire au moyen de trois paramètres. M. Radford obtient par des procédés algébriques la forme donnée par M. Klein à l'équation modulaire; il en déduit la résolvante du septième degré et exprime les sept racines au moyen des trois paramètres de M. Klein. Il expose enfin la théorie du groupe de Galois de 168 substitutions relatif à cette équation.

Crawford (*L.*). — Démonstration du théorème de Klein sur les fonctions de Lamé. (307-312).

Ce théorème a été établi par M. Klein dans le Tome XVIII des *Math. An-*

nalen: il concerne les solutions en termes finis de l'équation

$$\frac{d^2 U}{du^2} = U[n(n+1)pu + B],$$

et la distribution des racines des équations en pu obtenues en les égalant à zero.

Whipple (*F.*). — La stabilité du mouvement de la bicyclette. (312-348).

L'auteur signale l'existence de quatre vitesses critiques qui limitent les intervalles de stabilité et d'instabilité dans le mouvement; il indique comment le cycliste doit se déplacer et se servir du guidon.

Glaisher (*J.*). — Sur les restes relatifs à p^{n+1} d'un coefficient binomial divisible par p^n. (349-360).

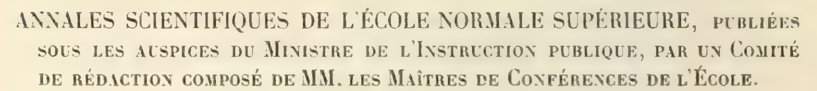
Glaisher (*J.*). — Un théorème de congruence relatif aux sommes des coefficients binomiaux. (361-383).

Voir plus haut.

Dickson (*L.*). — Simplicité du groupe abélien à deux couples d'indices dans le domaine de Galois d'ordre 2^n, $n > 1$. (383-384).

Complément au Mémoire : *On a triply infinite system of simple groups*, publié dans le Tome précédent du *Quarterly Journal*.

J. T.



ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

Troisième série, t. XV, 1898 [1].

Le Roy (*E.*). — Sur l'intégration des équations de la chaleur. (9-178).

Nous analyserons ici l'ensemble de ce grand Mémoire, dont la première Partie a été publiée dans le Volume précédent des *Annales de l'École Normale* et qui a été présenté comme thèse de doctorat à la Faculté des Sciences de Paris.

La théorie analytique de la propagation de la chaleur soulève des problèmes

(1) Voir *Bulletin*, t. XXIII, p. 48.

de Calcul intégral qu'il importe d'étudier attentivement, parce qu'ils constituent le type le plus simple de ces intégrations si difficiles et si peu connues que l'on rencontre à chaque pas dans les divers domaines de la Physique mathématique. Il s'agit de certaines équations aux dérivées partielles, telles que l'équation $\Delta V = 0$ de Laplace et pour chacune desquelles il faut établir une proposition analogue au principe de Dirichlet. On voit que ces problèmes présentent de l'intérêt, non seulement pour la Physique, mais encore et surtout pour l'Analyse pure, à cause de leur lien avec la théorie générale des fonctions.

Préoccupés d'une idée qui régnait autrefois et d'après laquelle une intégration n'était réputée faite que si l'on parvenait à découvrir la forme explicite de la fonction inconnue, les géomètres par qui fut inaugurée la théorie de la chaleur ont toujours cherché à construire la solution d'un problème de Physique à l'aide d'une série de *solutions simples* jouant le rôle d'*éléments analytiques* qui est dévolu aux fonctions circulaires dans les séries de Fourier. Mais ce procédé, qui n'a donné de résultats précis que dans des cas très particuliers, ne paraît pas devoir être conservé lorsqu'il s'agit des cas généraux où le corps étudié a une forme quelconque. Il faut alors recourir à des méthodes plus compliquées, semblables à celles que MM. Schwarz, Neumann et Poincaré ont imaginées pour démontrer le principe de Dirichlet. On n'obtient de la sorte, il est vrai, que des *théorèmes d'existence*. Toutefois, il est possible de déduire de ces théorèmes eux-mêmes les séries que la méthode des solutions simples eût fait considérer *a priori*. Telles sont les deux conclusions à l'établissement desquelles est consacré le Mémoire de M. Le Roy.

Première Partie. — *Les équations de l'équilibre thermique et la généralisation du principe de Dirichlet.*

Soit l'équation

$$(1) \qquad \Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = fV + \varphi,$$

où a, b, c, f, φ désignent des fonctions connues des coordonnées x, y, z. Si T est un domaine limité par une surface fermée S, on se propose de trouver une intégrale de (1), continue dans T et prenant sur S des valeurs données : c'est le *problème de Dirichlet généralisé*. Les principes de la théorie de la chaleur invitent à se borner au cas où $a\,dx + b\,dy + c\,dz$ est une différentielle exacte $d\mu$.

Le problème admet-il plusieurs solutions? On reconnaît que non, si $f \geq 0$ dans T. Faisant la substitution $V = \lambda U$ et déterminant convenablement λ, on étend cette conclusion à plusieurs autres cas. En particulier, si l'on prend

$$\lambda = e^{-\frac{\mu}{2}},$$

l'équation (1) est ramenée à la forme

$$(2) \qquad \Delta U = U\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + f\right] + \varphi e^{\frac{\mu}{2}}$$

et il suffit que l'on ait

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + f \geq 0$$

pour que l'on puisse affirmer que le problème n'a qu'une seule solution.

Si l'on ne fait *aucune hypothèse* sur les coefficients a, b, c, d, f, φ, la même proposition subsiste *lorsque le volume de* T est assez petit.

Toutefois cette condition *n'est pas nécessaire* : on pourrait, par exemple, se contenter de supposer que le domaine T est compris entre deux plans parallèles d'écartement suffisamment petit.

Ces divers théorèmes, déjà signalés en partie par M. Picard, sont établis, sans autres hypothèses que celles qui sont strictement nécessaires pour que le problème posé ait un sens, à l'aide d'une remarque faite par M. Paraf dans sa thèse (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1892) et d'une méthode d'approximations successives qui jouera un grand rôle dans tout le Travail.

Plus généralement, le problème de Dirichlet, étendu à l'équation non linéaire

$$\Delta V = f\left(x, y, z, V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right),$$

ne comporte qu'une solution si f croît avec V.

Il reste maintenant à démontrer l'*existence effective* d'une solution.

On commence par l'équation linéaire (1). La *méthode du balayage*, indiquée par M. Poincaré au sujet de l'équation de Laplace, peut être transformée de telle manière qu'elle serve à prouver simultanément le principe de Dirichlet et ses généralisations. M. Le Roy montre, en effet, en utilisant la réduction de l'équation signalée plus haut, que les méthodes d'approximations successives de M. Picard permettent d'obtenir, *en toute rigueur*, la solution du problème dans le cas où T est une sphère ou l'espace compris entre deux sphères concentriques. Un théorème semblable à celui de Harnack est ensuite établi pour les fonctions qui vérifient (1), et l'on en conclut que l'on peut se borner, sans restreindre la généralité, à supposer que V prend sur S les mêmes valeurs qu'un polynome. Enfin, les inégalités fondamentales du balayage sont obtenues sans qu'on ait à faire intervenir les propriétés particulières du potentiel newtonien.

La méthode de M. Poincaré est ainsi rendue générale et fournit, en fin de compte, la solution demandée. L'existence de celle-ci est donc prouvée pour un domaine T dont l'ordre de connexion est absolument quelconque, les valeurs données sur S étant seulement astreintes à former une fonction continue et S pouvant présenter certaines singularités, par exemple des singularités *saillantes*. L'auteur termine en indiquant que la méthode ne réclamerait que peu de modifications pour s'appliquer à une équation linéaire *irréductible*, c'est-à-dire non susceptible d'être ramenée à la forme (2), et qu'elle réussit aussi bien, *quel que soit le nombre des variables indépendantes*.

M. Le Roy passe ensuite à l'examen de l'équation non linéaire

$$(3) \qquad \Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = f(V, x, y, z) + \varphi,$$

$a\,dx + b\,dy + c\,dz$ étant toujours une différentielle exacte et f croissant avec V.

Il considère aussi l'équation

$$(4) \qquad \Delta U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial z} = \xi f(U, x, y, z) + \varphi.$$

Le domaine T ayant des dimensions quelconques, M. Le Roy fait remarquer que la solution de (4) peut être calculée, pour les petites valeurs de la con-

stante ξ, à l'aide des procédés d'approximations successives de M. Picard. Cela fait, on peut regarder U comme une fonction de ξ, holomorphe au voisinage de $\xi = 0$. Une méthode de prolongement analytique permet de passer de ce cas à celui où ξ a une valeur positive quelconque. Il suffit alors de prendre $\xi = 1$ pour obtenir l'intégrale de (3).

Un cas particulier remarquable est celui de l'équation

$$\Delta U = A(x, y, z)e^{U} \qquad (A > 0),$$

dont on connaît le rôle important dans plusieurs problèmes de Géométrie et d'Analyse, notamment dans la théorie des fonctions fuchsiennes.

Deuxième Partie. — *Le problème de Dirichlet et les fonctions harmoniques fondamentales attachées à une surface fermée.*

La méthode du balayage rend certaine l'existence d'une solution du problème de Dirichlet. Mais la forme analytique de cette solution reste inconnue. Or, il serait vraiment insuffisant de se borner, dans une question aussi importante, à un simple théorème d'existence. Il faut donc voir si, le principe de Dirichlet étant établi, il ne deviendrait pas possible d'obtenir, *a posteriori*, une expression analytique de la fonction harmonique qui prend sur S des valeurs données, *par une série de fonctions harmoniques simples*, d'après le procédé constamment employé en Physique mathématique. On l'avait déjà fait dans quelques cas particuliers, tels que ceux de la sphère et de l'ellipsoïde, traités respectivement par Laplace et par Lamé. Le but de cette seconde Partie est de généraliser ces résultats classiques. On y établit que *la démonstration préalable des théorèmes d'existence permet de trouver comme conséquences les développements en séries de termes simples, par lesquels, si l'on adoptait les idées de Lamé, on chercherait à construire la solution du problème de Dirichlet.*

Pour arriver à cette conclusion, l'auteur définit certaines fonctions qu'il appelle *fonctions harmoniques fondamentales attachées à la surface donnée* S et dont voici la nature. Il existe un ensemble dénombrable de constantes positives non décroissantes

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \ldots, \quad \xi_p, \quad \ldots,$$

auxquelles correspondent les potentiels newtoniens de certaines couches simples de matière attirante répandue sur S,

$$W_1, \quad W_2, \quad W_3, \quad \ldots, \quad W_p, \quad \ldots,$$

vérifiant les relations

$$\frac{dW_p}{dn_i} - \frac{dW_p}{dn_e} + \xi_p W_p = 0 \qquad (\text{sur } S),$$

$$\xi_p = \int_S W_p \left(\frac{dW_p}{dn_i} - \frac{dW_p}{dn_e} \right) d\sigma,$$

$$\int_S W_p^2 \, d\sigma = 1, \qquad \int_S W_p W_q \, d\sigma = 0 \qquad (p \neq q).$$

Pour établir l'existence de ces fonctions, M. Le Roy détermine le potentiel

d'une simple couche, telle que

$$\frac{dW}{dn_i} + \frac{dW}{dn_e} + \xi W + \Phi = 0,$$

ξ désignant une constante négative. Il est clair que W est une fonction de ξ. On trouve que *c'est une fonction analytique de* ξ, *holomorphe en tout point, sauf aux points* ξ_p *qui sont des pôles simples admettant comme résidus les fonctions fondamentales* W_p.

Si Φ désigne une fonction continue ainsi que ses dérivées de tous les ordres sur S, on peut développer Φ en une série procédant suivant les fonctions fondamentales W_p. *Cette série représente la fonction* U *harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de* S, *qui prend sur* S *les valeurs* Φ. La solution du problème de Dirichlet, tant intérieur qu'extérieur, se trouve ainsi exprimée par un potentiel de simple couche, développable en série procédant suivant des termes simples. Cette conclusion s'étend au cas où Φ est simplement continue : seulement la série n'est alors convergente qu'en tout point non situé sur S, mais sur S la série (bien que peut-être divergente) n'en *représente* pas moins Φ, puisqu'elle permet de calculer cette fonction avec telle approximation que l'on veut, comme limite de la fonction harmonique envisagée.

Ces résultats sont susceptibles de généralisation. D'autres fonctions fondamentales existent, qui vérifient sur S la relation

$$\frac{dW_p}{dn_i} + \frac{dW_p}{dn_e} + \xi_p \varphi W_p = 0,$$

φ étant une fonction positive. Si φ est proportionnelle à la densité de la couche électrique en équilibre sur S, on a la classe de fonctions fondamentales dite *principale*. Les fonctions de cette classe se réduisent aux fonctions de Laplace dans le cas de la sphère et aux fonctions de Lamé dans le cas de l'ellipsoïde. En général, elles obéissent à la relation

$$\frac{dW_p}{dn_i} = \lambda_p \frac{dW_p}{dn_e} \qquad (\lambda = \text{const.} > 0),$$

en partant de laquelle M. Poincaré avait essayé déjà d'obtenir des résultats analogues à ceux qui sont obtenus ici.

La considération des fonctions fondamentales de la classe principale permet de perfectionner sur plus d'un point la théorie des fonctions harmoniques. On constate, par exemple, que la *méthode de Neumann* pour résoudre le problème de Dirichlet peut servir, sinon à établir l'*existence* d'une solution, du moins à *calculer* cette solution, *quel que soit l'ordre de connexion de* S. On arrive également à construire une fonction harmonique V, telle que $\frac{dV}{dn_i}$ ou $\frac{dV}{dn_e}$ prenne sur S des valeurs données. Enfin M. Le Roy montre encore comment on parvient à traiter un problème que soulève la théorie du magnétisme et qui consiste à déterminer une fonction harmonique V vérifiant sur S la relation

$$\frac{dV}{dn_i} + h \frac{dV}{dn_e} = \Phi,$$

Φ désignant une fonction donnée et h une constante positive. Le problème de

l'équilibre thermique pourrait être abordé de la même façon *dans le cas où il y a rayonnement;* mais M. Le Roy le laisse de côté ici, ayant déjà indiqué ailleurs (*Comptes rendus*, 1895) une solution rigoureuse.

Troisième Partie. — *Le refroidissement des corps solides et le problème de Fourier.*

Le problème de Fourier consiste à construire une fonction V, continue dans T, vérifiant l'équation

$$\Delta V = \frac{dV}{dt},$$

et se réduisant à des fonctions données, pour $t = 0$ dans T, et quel que soit t sur S. L'auteur démontre d'abord l'impossibilité de plusieurs solutions, puis l'existence effective d'une solution.

Les seuls travaux antérieurs que l'on puisse citer étaient dus à M. Poincaré et relatifs à la méthode des solutions simples, M. Le Roy suit une marche toute différente. Au lieu d'éliminer des calculs la variable t qui représente le temps et de ramener ainsi l'intégration cherchée au développement d'une fonction de (x, y, z) en série d'une certaine forme, il démontre directement l'existence d'une solution du problème de Fourier, comme il a fait pour le problème de Dirichlet généralisé. Les séries de termes simples que M. Poincaré considérait *a priori* ne sont d'ailleurs pas rejetées pour cela : elles se retrouvent à la fin, mais comme conséquences des théorèmes d'existence établis d'abord.

Le premier point est de réduire le cas général à celui où les températures périphériques données sont constamment nulles. M. Le Roy y parvient en traitant le cas intermédiaire d'un corps plongé dans la glace fondante, mais contenant à son intérieur des sources calorifiques. Ce cas lui-même est ramené au cas simple par une série de considérations où interviennent des méthodes d'approximations successives et de prolongement analytique semblables à celles de la première Partie, ainsi que les propriétés des séries trigonométriques, de l'intégrale de Fourier et des développements de Taylor. L'emploi des fonctions de Bessel permet d'ailleurs d'achever la question en ce qui concerne la sphère ou l'espace compris entre deux sphères concentriques.

Cela posé, une nouvelle transformation de la méthode du balayage, imitée de celle qui a servi dans la première Partie, permet de démontrer l'existence d'une solution dans le cas général. Les artifices employés sont trop divers pour être résumés. Qu'il suffise de dire que le raisonnement tout entier est fondé sur la remarque simple qui a conduit à affirmer l'impossibilité de plusieurs solutions. Ajoutons que l'on recueille ici le bénéfice des transformations apportées plus haut à la méthode du balayage : étant débarrassée de ce qui était propre à l'équation de Laplace, elle se trouve naturellement prête à recevoir de nouvelles généralisations.

M. Le Roy termine en montrant comment la solution obtenue peut s'exprimer *par une série de termes simples* procédant suivant les fonctions fondamentales U_p de M. Poincaré, qui sont nulles sur S et satisfont dans T à l'équation

$$\Delta U_p + \xi_p U_p = 0.$$

Il suffit que la série $\Sigma A_p U_p$ *soit convergente, pour qu'elle représente effectivement la fonction arbitraire qui lui a donné naissance.* On trouve d'ailleurs aisément des caractères de convergence. En tout cas, que la série soit

convergente ou non, *on peut construire une suite finie de fonctions* U_p *qui représente une fonction arbitraire, nulle sur* S, *avec telle approximation que l'on veut.* En combinant les fonctions U_p aux fonctions W_p, on arrive à des conclusions plus générales encore. Ces diverses propositions peuvent être utiles dans bien des questions de Physique, notamment dans le problème des membranes vibrantes, que l'on réussit à résoudre en les utilisant, sinon exactement, du moins *avec telle approximation que l'on veut.*

Les dernières pages du Mémoire sont consacrées à quelques indications rapides sur la possibilité d'appliquer les méthodes d'approximations successives de M. Picard à l'étude des équations générales du régime variable pour un corps hétérogène, contenant à son intérieur des sources calorifiques et maintenu à sa surface à des températures données, variables avec le temps.

Guichard. — Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques. (179-227).

Suite du Mémoire dont les deux premiers Chapitres ont paru dans le Volume précédent du même Recueil (Chap. III et IV).

Beudon (*J.*). — Sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles analogues aux équations du premier ordre. (229-242).

L'objet de ce Travail est l'étude des systèmes d'équations aux dérivées partielles définissant une fonction z de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, x_n et dont la solution dépend d'une fonction arbitraire de $(n-1)$ arguments $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Le premier Chapitre est consacré au cas général. Si le système donné est d'ordre p, on peut toujours le rendre linéaire en formant les équations d'ordre $(p+1)$ qui s'en déduisent par différentiation : aussi l'auteur s'en tient-il aux systèmes linéaires. Il montre que l'on peut toujours donner à ces systèmes une forme normale qui met en évidence leurs analogies avec les équations du premier ordre. Voici le résultat de son analyse :

Si un système d'équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre p *définissant une fonction de* n *variables a une solution générale dépendant d'une fonction arbitraire de* $n-1$ *arguments, on peut toujours mettre les équations qui le composent sous la forme*

$$a_1 Z^p_{\alpha_1+1\,\alpha_2\ldots\alpha_n} + a_2 Z^p_{\alpha_1\,\alpha_2+1\ldots\alpha_n} + \ldots + a_n Z^p_{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n+1} = A_{\alpha_1\ldots\alpha_n},$$

où l'on a posé

$$\frac{\partial^k z}{\partial x_1^{\lambda_1}\ldots\partial x_n^{\lambda_n}} = Z^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n},$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = k,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ *étant des fonctions des variables indépendantes, de la fonction* z *et de ses dérivées jusqu'à l'ordre* $p-1$, *qui restent les mêmes pour toutes les équations, et les* $A_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ *étant des fonctions des mêmes arguments qui peuvent changer d'une équation à l'autre.*

Ce système possède des caractéristiques à une dimension. Si l'on se donne

une multiplicité ponctuelle à $n-1$ dimensions, on obtient, par des équations différentielles ordinaires, l'orientation des éléments d'ordre $p-1$ des différentes surfaces intégrales qui contiennent cette multiplicité, et l'on engendre ensuite chacune de ces surfaces par les caractéristiques, à la façon habituelle.

Le Chapitre se termine par l'indication de l'existence de multiplicités singulières.

Le second Chapitre traite particulièrement des systèmes linéaires et du second ordre. On y trouve d'abord la démonstration du théorème suivant :

Tout système linéaire d'équations aux dérivées partielles du second ordre définissant une fonction z de n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, dont la solution générale dépend d'une fonction arbitraire de $(n-1)$ arguments peut être mis sous la forme

$$p_{ni} = a_1 p_{i1} + a_2 p_{i2} + \dots + a_{n-1} p_{i\,n-1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \frac{\partial\psi}{\partial z} p_i + \sum_{\rho=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_\rho}{\partial x_i} + \frac{\partial a_\rho}{\partial z} p_i \right) p_\rho,$$

où l'on a posé

$$p_{ij} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \, \partial x_j},$$

avec les conditions

$$\begin{aligned}
a_1 &= \varphi_1 \ (\alpha, x_1, \dots, x_n, z), \\
a_2 &= \varphi_2 \ (\alpha, x_1, \dots, x_n, z), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
a_{n-1} &= \varphi_{n-1} (\alpha, x_1, \dots, x_n, z), \\
p_n - \varphi_1 p_1 \dots \varphi_n p_n &= \psi(x_1, x_2, \dots, x_n, z).
\end{aligned}$$

L'auteur s'occupe ensuite des multiplicités intégrales. Se donnant une multiplicité ponctuelle à $n-1$ dimensions, savoir z et x_n en fonction de $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, il montre que l'orientation des éléments du premier ordre sur cette multiplicité ne dépend que d'équations différentielles ordinaires. Les caractéristiques sont d'ailleurs

$$-dx_n = \frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{dz}{\psi} = \frac{dp_\rho}{\Lambda_{\rho n}}.$$

Les multiplicités singulières à $n-1$ dimensions sont déterminées par les deux équations du premier ordre en z et x_n

$$1 + \sum_{\rho=1}^{n-1} \overline{a}_\rho \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} = 0, \qquad \psi + \sum_{\rho=1}^{n-1} \overline{a}_\rho \frac{\partial z}{\partial x_\rho} = 0,$$

où $\overline{a}_\rho$ désigne ce que devient la fonction a_ρ quand on y remplace p_ρ par

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} - p_n \frac{\partial x_n}{\partial \rho},$$

résultat qui se trouve être indépendant de p_n.

Les multiplicités singulières sont engendrées par les caractéristiques du système proposé : pour les obtenir, on considère une multiplicité d'éléments unis du premier ordre à $(n-2)$ dimensions, susceptibles de porter des éléments unis d'ordre p, vérifiant le système étudié, et l'on fait passer une caractéristique par chaque élément de cette multiplicité.

Drach (*J.*). — Essai sur une théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendantes. (243-384).

Extrait de l'Introduction. — Nous avons tenté ici de fixer les traits essentiels de cette classification en nous bornant aux transcendantes les plus simples : celles qui vérifient des équations différentielles algébriques et plus particulièrement des équations du premier ordre.

Galois a réalisé, pour les nombres et les fonctions algébriques, la classification réclamée par Lacroix.

Liouville a définitivement établi le caractère transcendant de certaines fonctions simples.

Une classe particulière de transcendantes, les intégrales de différentielles algébriques et les fonctions qui s'y rattachent, a accaparé ensuite pendant longtemps l'attention des géomètres. C'est seulement de nos jours que l'étude des équations linéaires à coefficients rationnels ou algébriques a permis d'entrevoir pour les transcendantes qui vérifient ces équations, une classification rationnelle.

Jamais, d'ailleurs, le problème de Lacroix n'a été posé d'une manière précise, et c'est par là que nous avons dû commencer.

Les recherches de Galois nous ont appris que *les nombres algébriques ne sont jamais déterminés d'une manière unique par les relations algébriques entières à coefficients rationnels qu'ils vérifient.*

Un fait analogue s'est présenté dans l'étude des fonctions algébriques d'une variable, où son importance a été mise en évidence par Puiseux : en revenant à la détermination initiale de la variable, on ne retrouve pas nécessairement les déterminations initiales des diverses fonctions conjuguées; une certaine permutation s'est effectuée sur ces déterminations et *cette permutation est l'une de celles que donne la théorie de Galois.*

L'étude des transcendantes les plus simples, celle de la fonction logarithmique, par exemple, amène aux mêmes conclusions.

Toutes ces recherches avaient mis en évidence le rôle joué par l'ensemble des relations rationnelles vérifiées par les éléments que l'on étudie et leurs dérivées d'ordre quelconque, ou plutôt par les transformations qu'il est possible de faire subir aux éléments sans altérer cet ensemble. Ces transformations formaient, d'ailleurs, toujours un *groupe,* puisque la succession de deux d'entre elles laissait évidemment l'ensemble inaltéré. Il était, dès lors, tout naturel de chercher à étendre les résultats obtenus aux groupes les plus généraux que MM. Sophus Lie et Picard venaient de découvrir, dont les transformations pouvaient dépendre de fonctions arbitraires. M. Lie montrait que presque tous les cas d'abaissement qui s'étaient présentés jusqu'alors dans l'intégration des équations différentielles ordinaires résultent de l'existence de transformations, dépendant d'un nombre limité de paramètres, qui laissent invariables les équations considérées. Ces transformations forment nécessairement un groupe.

Malheureusement, les cas signalés par M. Lie étaient toujours *particuliers :* une équation différentielle ordinaire, d'ordre supérieur au premier, *n'admet pas en général de groupe,* au sens de M. Lie. Les équations linéaires aux dérivées partielles et les systèmes complets étudiés par M. Lie sont aussi très particuliers. La même observation s'étend *à plus forte raison* aux équations d'ordre supérieur qui admettent des groupes. On peut donc affirmer que *l'ap-*

plication, indiquée par M. Lie, de sa théorie des groupes à l'intégration des équations n'est pas la véritable généralisation de la méthode employée par Galois pour les équations algébriques.

Les travaux de M. Picard, sur les équations différentielles linéaires, montraient la voie où il fallait s'engager pour parvenir à cette généralisation.

Le succès de la méthode de Galois tient uniquement à la remarque suivante : on peut exprimer tous les éléments qui satisfont à l'équation que l'on étudie, comme *fonction déterminée* d'un nombre limité d'entre eux, formant un *système fondamental*. Cela suffit pour permettre l'extension de la théorie de Galois.

Soit un système d'équations aux dérivées partielles, définissant p fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et supposons que la *solution générale* de ce système s'exprime d'une manière *déterminée, toujours la même*, à l'aide d'un nombre fini r de solutions particulières *quelconques*, des variables et d'un nombre fini de constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ou de fonctions arbitraires $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_h$ d'arguments déterminés; nous dirons que les solutions du système dépendent d'un nombre limité r d'éléments fondamentaux. Si l'on veut édifier une théorie *complète* de la détermination de $z_1, z_2, \ldots, z_p$, il est nécessaire de substituer à la recherche de la solution générale, celle, *équivalente*, de r solutions particulières formant un système fondamental.

Ce second problème dépend *toujours* de l'étude d'un groupe, *qui joue, dans l'intégration du système, le même rôle que le groupe symétrique dans l'étude des équations algébriques ou le groupe linéaire et homogène dans l'étude des équations différentielles linéaires.*

Parmi les systèmes dont la solution dépend d'un nombre limité d'éléments fondamentaux, les plus importants sont formés par les *équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre*. Le groupe à considérer est, dans ce cas, un groupe de *transformations ponctuelles*. A toute équation

$$(1) \qquad X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

à coefficients rationnels, dont $z_1, z_2, \ldots, z_n$ forment un système fondamental de solutions, est attaché un groupe Γ, contenu dans le groupe ponctuel général Γ_n des transformations de $z_1, z_2, \ldots, z_n$, que nous appelons son *groupe de rationalité* et qui possède les propriétés :

Tous les invariants rationnels de Γ, lorsqu'on étend les transformations en regardant les z comme des fonctions des $n+1$ variables $x, x_1, \ldots, x_n$, s'expriment rationnellement à l'aide des x;

Toute fonction des z qui s'exprime rationnellement à l'aide des x est une fonction de ces invariants différentiels.

L'intégration de l'équation (1) se décompose donc en trois parties :

1° Recherche des différents groupes Γ qu'il y a lieu de considérer;
2° Détermination du groupe Γ qui correspond à une équation donnée;
3° Étude des transformations du groupe Γ.

La dernière étude conduit à *fixer la nature des transcendantes $z_1, z_2, \ldots, z_n$ d'après la considération des relations rationnelles qui lient ces éléments aux variables et à leurs dérivées par rapport à ces variables.* La classification obtenue concorde, par suite, avec celle à laquelle nous serions parvenus en partant de ce dernier point de vue.

L'étude des équations non linéaires du premier ordre, ou plutôt de leurs *intégrales complètes*, se fait en suivant les mêmes principes que pour les équations linéaires : elle fera l'objet d'un Mémoire spécial. Il convient d'observer ici qu'il est possible d'amener, par une transformation ponctuelle des variables ou une transformation de contact, toute équation, linéaire ou non, du premier ordre, à une forme canonique tout intégrée. Cette observation avait été faite depuis longtemps par M. Lie; mais la détermination de la transformation étant identique à l'intégration de l'équation donnée, *cela ne constituait qu'un simple déplacement de la question*. Les théories que nous développons montrent que *l'on peut fixer d'une manière précise la difficulté de l'intégration, c'est-à-dire aussi celle qui consiste à trouver la transformation qui amène à la forme canonique.*

En étudiant le problème de l'*intégration en général*, il nous a été possible de définir ce que nous appelons l'*intégration logique* d'un système, qui est au problème de Cauchy et aux autres problèmes plus ou moins précis qu'on s'est posé sur l'intégration ce qu'est la résolution *algébrique* des équations par la théorie de Galois à leur résolution *numérique* ou par approximation.

Nous avons été amenés ainsi à définir d'une manière extrêmement précise tous les éléments du raisonnement et à partir de théorèmes généraux sur les *fonctions dérivables* pour déterminer et classer toutes les transcendantes du Calcul intégral, ou du moins celles que nous pouvons *définir algébriquement*.

Les principaux théorèmes de la théorie des groupes, donnés par M. Lie, se sont ainsi trouvés établis d'une manière presque intuitive, par des méthodes qui en feront saisir la véritable importance.

Signalons encore quelques indications générales sur le problème de l'*intégration logique des systèmes différentiels quelconques* et sur les formes les plus simples auxquelles on peut ramener de tels systèmes. En particulier, *tout système différentiel devant définir p fonctions* $z_1, z_2, \ldots, z_p$ *de n variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *peut être ramené à un système d'équations du second ordre, à une seule fonction inconnue, en augmentant convenablement le nombre des variables.*

Les transcendantes qui sont liées à leurs dérivées et aux variables par des relations rationnelles se partagent donc en deux grandes classes, suivant qu'elles vérifient des équations qui sont toutes du premier ordre ou toutes du second ordre.

La classe intermédiaire se ramène, en effet, à la seconde classe avec une ou plusieurs variables de moins, par l'introduction de transcendantes de la première classe.

Le travail actuel est consacré presque exclusivement aux transcendantes de la première classe.

Il n'existe d'ailleurs, à notre connaissance, aucune recherche relative aux *transcendantes essentielles du second ordre*, au point de vue auquel nous nous plaçons.

Extrait de la conclusion. — Essayons maintenant de dégager quelques conséquences positives des théories que nous avons indiquées. Si l'on considère d'abord la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles ou des systèmes complets de telles équations, dont les coefficients sont rationnels, on voit qu'*en général les transcendantes* $z_1, z_2, \ldots, z_n$, *qui en constituent un système fondamental de solutions, sont des éléments inséparables.* Toute ten-

tative faite pour déterminer un ou plusieurs d'entre eux sans déterminer les autres, n'a de sens que dans des cas particuliers, lorsque le groupe de rationalité correspondant est *imprimitif* ou *intransitif*, et il nous semble que la seule manière *régulière* de faire l'intégration soit de déterminer le groupe de rationalité.

La même observation s'applique aux éléments qui définissent une *intégrale complète* d'une équation non linéaire du premier ordre ou d'un système en involution.

Les considérations qui nous ont servi jusqu'à présent trouvent encore leur application dans l'étude d'un problème classique, le *problème de Pfaff*, qui, au point de vue des intégrations qu'il exige, ne paraît pas non plus avoir jamais été traité d'une manière satisfaisante.

Un grand nombre d'équations du second ordre (d'une manière précise *toutes celles qui se ramènent au premier ordre ou s'intègrent par les méthodes de Monge, d'Ampère ou de M. Darboux*) peuvent être traitées comme celles du premier.

Pour une équation du second ordre *quelconque*, on ne connaît jusqu'à présent aucune classe de solutions (dépendant de constantes ou de fonctions arbitraires) dont on puisse préciser l'indétermination, c'est-à-dire pour lesquelles on connaisse la nature des opérations (formant nécessairement un groupe) qui permettent de passer d'une solution de la classe à une autre solution quelconque de la classe. La recherche de ces classes est manifestement liée à celle des transformations, portant sur x, y, z, p, q, r, s, t, qui changent une équation du second ordre donnée en une autre quelconque, par exemple en l'équation $S = 0$. Mais c'est là un sujet qui n'a pas encore été abordé.

D'une manière générale, nous avons constaté que les éléments qui se présentent dans la théorie des équations différentielles, faite au point de vue spécial auquel nous nous sommes placés, sont toujours indissolublement liés à d'autres, dont ils ne peuvent être distingués algébriquement. C'est l'arbitraire qui subsiste dans leur *définition algebrique*, qui est la véritable mesure de leur transcendance.

Nous avons vu également que le calcul des fonctions rationnelles de ces éléments et de leurs dérivées d'ordre quelconque rend manifestes, par les transformations qu'il admet en lui-même, leurs propriétés les plus importantes et donne, en particulier, pour des équations qui renferment des indéterminées, tous les cas possibles d'abaissement ou de dégénérescence.

Les transcendantes que nous étudions ne sont en général pas *uniformes*. En partant d'un point de situation générale dans le champ des variables et en y revenant après avoir décrit des chemins fermés quelconques, on ne retrouvera pas les développements initiaux.

Ajoutons enfin que la méthode qui nous a servi pour ébaucher la classification des transcendantes qui vérifient des équations différentielles algébriques a une portée beaucoup plus générale. Elle s'appliquera encore, sans modifications essentielles, à l'*intégration logique des équations aux différences finies, aux différences mêlées, et, en général, de toutes équations fonctionnelles*, à condition de préciser convenablement le *domaine de rationalité;* il en résultera également une classification naturelle des transcendantes que l'on peut *définir algébriquement* de cette manière.

Mangeot (S.). — Sur la similitude et la symétrie de deux courbes ou surfaces algébriques. (385-392).

Deux surfaces réelles ou imaginaires S_1, S_2 de même ordre $m > 2$, étant données par leurs équations

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y, z) = 0,$$

en coordonnées rectangulaires, l'auteur désigne par $\varphi_1(x, y, z)$ et $\varphi_2(x, y, z)$ les deux polynomes du second degré

$$\sum \frac{(m-1)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} \left| \frac{\partial^{m-1} f_r(x, y, z)}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, \partial z^\gamma} \right|^2 \qquad \begin{matrix} (r = 1, 2), \\ (\alpha + \beta + \gamma = m - 1). \end{matrix}$$

Les deux équations

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_2(x, y, z) = 0,$$

représentent deux quadriques à centre Γ_1 et Γ_2 qui sont deux surfaces respectivement covariantes des deux surfaces S_1 et S_2. Ces deux quadriques sont imaginaires, à moins d'être réduites à un plan double, mais leurs axes sont, dans tous les cas, des droites réelles.

Tout élément de symétrie, centre, axe ou plan de symétrie, que peut avoir la surface S_1, doit être un élément de symétrie de la quadrique Γ_1; M. Mangeot a établi cette propriété antérieurement (*Annales de l'École Normale;* 1897) et l'a appliquée à la recherche des éléments de symétrie de la figure S_1. Cette question n'est qu'un cas particulier du problème suivant, que l'auteur traite ici :

Reconnaître si les deux surfaces S_1 *et* S_2 *sont symétriques l'une de l'autre par rapport à un point, ou par rapport à une droite, ou par rapport à un plan; et, en cas d'affirmative, déterminer cet élément.*

On peut d'abord ramener ce problème à la question précédente. On peut aussi le résoudre en substituant aux surfaces S_1 et S_2 leurs quadriques covariantes Γ_1 et Γ_2.

D'une manière plus générale, l'auteur montre que la recherche des conditions d'homothétie, de similitude, d'égalité, de symétrie par rapport à un point, à une droite ou à un plan, de deux surfaces S_1 et S_2 peut être effectuée au moyen de leurs quadriques covariantes Γ_1 et Γ_2.

On voit ainsi que deux courbes ou deux surfaces de même ordre étant données par leurs équations, il est généralement possible de résoudre par de simples vérifications, sans introduire d'indéterminées auxiliaires, la question de savoir si ces deux figures ont entre elles l'une ou l'autre des six dépendances énumérées plus haut et de déterminer les constantes qui fixent cette dépendance.

L'auteur fait ensuite connaître d'autres figures analogues aux quadriques covariantes précédemment considérées, et que l'on peut utiliser de la même façon. Puis il étend ses recherches aux polynomes à plus de trois variables, et résout en particulier le problème suivant :

Dans quel cas le polynome $f_1(x, y, z, \ldots, t)$ *peut-il se transformer dans le polynome* $f_2(x, y, z, \ldots, t)$ *par une substitution orthogonale, homogène ou non, et quelle doit être cette substitution?*

Dolbnia (*J.*). — Étude directe des intégrales abéliennes de genre un. (393-430).

L'objet de cette étude est d'effectuer, au moyen de la fonction elliptique pu de Weierstrass, l'inversion des trois seules intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt[m]{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-\rho)^{\lambda}}}$$

qui soient du genre un, ainsi que de l'intégrale elliptique de première espèce.

1° Considérant d'abord l'intégrale

$$(1) \qquad u = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}},$$

l'auteur établit directement que x est une fonction monodrome de u sur toute la surface de Riemann.

Posant ensuite $x - a = \frac{1}{\xi}$, ce qui change l'intégrale proposée en

$$z = \int_{\infty}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt[3]{(\xi-a')^2(\xi-b')^2}},$$

il trouve

$$\xi = \frac{27}{2}\,p'z + \frac{a'+b'}{2},$$

les invariants de pz ayant pour valeurs

$$g_2 = 0, \qquad g_3 = -\left(\frac{a'-b'}{27}\right)^2.$$

2° Traitant ensuite la relation

$$(2) \qquad u = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}},$$

on reconnaît que x est une fonction monodrome de u sur toute la surface de Riemann. Par une transformation linéaire, on substitue à la relation de départ l'équation

$$z = \int_{\infty}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt[4]{\xi^2(\xi-\alpha)^3}},$$

d'où l'on déduit

$$\xi = 6\,p^2 z + \alpha, \qquad g_2 = -\frac{2\alpha}{3}, \qquad g_3 = 0.$$

On pourrait aussi ramener l'équation proposée à la forme

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(x-\alpha)^2}};$$

l'auteur montre que l'inversion de l'argument z peut être opérée directement,

sans qu'on ait recours à la substitution préalable $x = \frac{1}{y}$ qui a pour but de ramener tous les infinis de x en un seul point de la surface de Riemann.

3° La troisième intégrale considérée

$$(3)\qquad u = \int_c^x \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}}$$

définit x comme fonction monodrome de u sur toute la surface de Riemann.

Par la substitution $x - c = \frac{1}{y}$, on ramène l'équation proposée à la forme

$$z = \int_\alpha^y \frac{dy}{\sqrt[6]{(y+\alpha)^3(y-\beta)^4}},$$

dont l'inversion donne

$$y = 2^4 3^6 \left(4\wp^3 z - \frac{\beta}{2^4 3^6}\right), \qquad g_2 = 0, \qquad g_3 = \frac{\beta - \alpha}{2^4 3^6}.$$

On pourrait aussi ramener l'équation de départ à la forme

$$z = \int_\beta^\xi \frac{d\xi}{\sqrt[6]{(\xi-\alpha)^4(\xi-\beta)^5}},$$

relation dont on peut effectuer l'inversion sans employer la substitution préalable $\xi - \beta = \frac{1}{y}$.

La même proposition est vraie de la relation

$$z = \int_\beta^\xi \frac{d\xi}{\sqrt[6]{(\xi-\alpha)^4(\xi-\beta)^3}},$$

qui est une autre forme de l'équation (3).

Cette possibilité d'une inversion directe, indépendamment d'une substitution de la forme $x - a = \frac{1}{y}$, est ensuite établie par l'auteur pour chacune des intégrales (1), (2) et (3).

La fin du Mémoire contient le détail des calculs à effectuer pour opérer, conformément à une indication donnée par Halphen (*Traité des fonctions elliptiques,* t. I, p. 131), l'inversion de l'intégrale

$$z = \int \frac{dy}{\sqrt{J(y)}},$$

$$J(y) = y^4 - 6\alpha_2 y^2 - 4\alpha_3 y - \alpha_4,$$

sans résoudre l'équation $J = 0$. On trouve ainsi

$$z = \int \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}},$$

les invariants ayant pour valeurs respectives

$$g_2 = -\alpha_4 + 3\alpha_2^2, \qquad g_3 = \alpha_2^3 + \alpha_2\alpha_4 - \alpha_3^2.$$

En rapprochant ce résultat d'une transformation indiquée par l'auteur dans un Travail antérieur, on arrive à ce théorème :

Étant donnée l'équation

$$z = \int \frac{dy}{\sqrt{J(y)}},$$

d'où résulte par inversion

$$y - y_1 = \frac{\wp' z_0}{\wp z - \wp z_0},$$

si l'on effectue la substitution

$$\sqrt{J(y)} = y^2 + 3\alpha_2 - \frac{2\alpha_3}{\eta},$$

on obtient pour la nouvelle variable η *l'expression*

$$\eta = \frac{\wp'(2z_0)}{\wp z - \wp(2z_0)},$$

qui ne diffère de celle de $y - y_1$ *que par la duplication de l'argument* z_0, *les invariants* g_2 *et* g_3 *ayant les mêmes valeurs dans les deux cas.*

Von Mangoldt. — Démonstration de l'équation $\sum_1^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$. (431-454). (Traduit de l'allemand par M. Laugel.)

Ce Mémoire ayant paru dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin (22 juillet 1897), nous ne ferons qu'en rappeler l'objet.

La fonction numérique μ dont il s'agit ici est ainsi définie :

$\mu = 1$ pour $k = 1$;

$\mu = 0$ lorsque k est divisible par un nombre carré;

$\mu = -1$ lorsque k est composé d'un nombre impair de facteurs premiers différents;

$\mu = 1$ lorsque k est composé d'un nombre pair de facteurs premiers différents.

Quant à la série considérée, elle renferme toutes les valeurs que prend l'expression $\frac{\mu(k)}{k}$ pour des valeurs entières et positives de k, et cela *dans l'ordre où elles se présentent lorsque l'on remplace k successivement par tous les nombres de la série naturelle des entiers.*

Cette série est convergente et a pour somme zéro. Euler avait énoncé ce théorème sans l'appuyer de raisons convaincantes. L'auteur en donne une démonstration rigoureuse.

Lacour (Ém.). — Sur une transformation de fonctions elliptiques qui correspondent à un module imaginaire. (455-462).

I. La fonction $x = \wp u$ qui satisfait à l'équation

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}$$

peut, lorsque les constantes e_1, e_3 sont imaginaires conjuguées et e_2 réelle, être avantageusement ramenée aux fonctions sn, cn, dn, de module réel. A cet effet, on pose

$$e_2 - e_3 = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$$
$$e_2 - e_1 = \rho(\cos\psi - i\sin\psi).$$

Si l'on a pris pour e_1 celle des racines conjuguées dans laquelle le coefficient de i est positif, l'angle ψ sera compris entre o et π, le facteur ρ étant essentiellement positif. On trouve ainsi

$$pu = x = e_2 + \rho\left[\frac{1 + \operatorname{cn}(2u\sqrt{\rho})}{\operatorname{sn}(2u\sqrt{\rho})}\right]^2$$

le module des fonctions sn et cn étant égal à $\sin\frac{\psi}{2}$.

II. La formule précédente ramène la fonction pu, dans le cas du discriminant négatif, à des fonctions elliptiques de module réel. Mais, d'autre part, on sait que cette fonction se ramène à la fonction $\operatorname{sn}(gu)$, le module k et le multiplicateur g étant ainsi définis

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \qquad g^2 = e_1 - e_3.$$

En comparant les deux expressions correspondantes de pu, on obtient des formules de transformation, pour les fonctions elliptiques sn, cn, dn, permettant de passer du module imaginaire k au module réel $l = \sin\frac{\psi}{2}$.

Voici ces relations, où s, c, d désignent les fonctions de module k et d'argument u, tandis que s_1, c_1, d_1 désignent les fonctions de module l et d'argument $\frac{u}{M}$:

$$\frac{s_1}{4Msd} = \frac{c_1}{4M^2d^2 - s^2} = \frac{d_1}{4M^2c} = \frac{1}{4M^2d^2 + s^2};$$

le diviseur M est donné par l'équation $2M^2 = i\sin\psi$.

III. La transformation précédente, pour passer du module imaginaire k au module réel l, peut être définie par des relations linéaires entre les périodes K, iK′ de la fonction $\operatorname{sn} gu$ au module k et les périodes

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l^2\sin^2\varphi}}, \qquad iL' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l'^2\sin^2\varphi}}$$

de la fonction $\operatorname{sn} U$, au module réel l, savoir :

$$\frac{K}{M} = L - iL', \qquad \frac{iK'}{M} = L + iL'.$$

De ces relations on pourrait déduire à nouveau les formules trouvées plus haut pour s_1, c_1, d_1.

Tchébychef. — Sur les expressions approchées d'une racine carrée de la variable, au moyen des fractions simples. (463-480). (Traduit du russe par M. Vassilief.)

Ce Travail a été publié en 1889 dans les *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg* (t. LXI, appendice I).

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome CXXVI : 1898 (¹).

Souslow. — Sur la représentation conforme d'une surface sur une autre. (30-31).

Deux surfaces (S) et (S_1), dont les éléments linéaires sont ds et ds_1, étant représentées conformément l'une sur l'autre avec le module de similitude λ, c'est-à-dire de telle sorte que l'on ait $ds_1 = \lambda\, ds$, entre les courbures totales (K) et (K_1) de ces surfaces aux points correspondants et la fonction λ existe la relation

$$K_1 = \frac{1}{\lambda^2}(K - \Delta_2 \log \lambda),$$

où le symbole Δ_2 désigne le paramètre différentiel du second ordre.

Painlevé. — Sur la représentation des fonctions analytiques uniformes. (200-202).

Énoncés de théorèmes relatifs à la possibilité de représenter une fonction analytique, uniforme dans tout son domaine d'existence, par une série unique qui converge en tout point où la fonction est holomorphe, dans le cas général où l'ensemble (E) de ses points singuliers n'est pas énumérable. Le premier énoncé s'appliquant à toute *expression analytique uniforme* $F(z) = P + iQ$ propre à définir une ou plusieurs fonctions analytiques différentes dans divers domaines, peut se formuler ainsi :

Toute expression analytique uniforme $F(z)$ *est représentable par une série de fractions rationnelles, qui converge absolument et uniformément dans toute aire du plan où* $F(z)$ *est holomorphe.*

Il existe une représentation par un produit infini.

Toute expression analytique uniforme $F(z)$ *est représentable par un produit infini*

$$\prod_{n=0}^{n=\infty} \frac{L_n(z)}{M_n(z)} e^{R_n(z)};$$

(¹) Voir *Bulletin*, T. XXIII_2, p. 75.

les L_n, M_n *sont des polynomes en z dont les zeros sont des zéros, des pôles ou des points singuliers de* F(*z*), *et les* R_n *des fractions rationnelles dont les pôles sont des singularités* (*non polaires*) *de* F. *De plus, chaque zéro et chaque pôle de* F *ne figurent que dans un terme du produit.*

Stäckel (*P.*). — Sur la convergence des séries représentant les intégrales des équations différentielles. (203-205).

Dans son *Traité d'Analyse*, M. Picard a comparé deux théorèmes de Cauchy, relatifs à l'existence de l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

suivant que les variables sont réelles ou complexes. Il a établi que *l'on peut certainement fixer, pour le domaine de convergence de l'intégrale y, un champ plus grand que celui qu'assigne le théorème de Cauchy dans le cas des variables complexes.*

Guidé par cette curieuse proposition, M. Stäckel reprend la démonstration classique du théorème de Cauchy en substituant aux inégalités sur lesquelles on la fonde d'autres inégalités qui conduisent à un rayon de convergence plus grand que celui de Cauchy, et parfois égal au véritable rayon de convergence de la série *y*.

Horn (*J.*). — Sur les intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires. (205-208).

M. Fuchs a fait en 1870 usage d'une méthode d'approximations successives pour obtenir un développement en série d'une intégrale d'une équation linéaire, valable pour tout point non singulier. Dans la présente Note, l'auteur indique le principe d'une modification qu'il a apportée à la méthode de M. Fuchs et qui lui a fourni un développement très favorable pour démontrer et approfondir les propriétés des intégrales irrégulières que M. Poincaré a étudiées, pour les équations à coefficients rationnels, au moyen de la transformation de Laplace.

Riquier. — Sur l'existence des intégrales d'un système partiel, déterminées par certaines conditions initiales. (208-210).

Fouché (*M.*). — Sur les systèmes de surfaces triplement orthogonales où les surfaces d'une même famille admettent la même représentation sphérique de leurs lignes de courbure. (210-213).

Dans un système de surfaces triplement orthogonales, si les surfaces d'une même famille ont la même représentation sphérique de leurs lignes de courbure, il en sera de même de celles des deux autres familles.

Dans tout système pareil, l'axe de courbure de la trajectoire orthogonale des surfaces de l'une des familles correspondant au point M *et la perpendiculaire à la droite qui joint les centres de courbure géodésique*

des deux lignes de courbure de la surface de cette famille qui passe au point M *sont deux directions conjuguées par rapport à cette surface.*

Zeuthen (*H.-G.*). — Sur le fondement de la Géométrie projective. (213-215).

L'auteur a réussi à donner à la Géométrie projective un fondement nouveau, différent de celui de von Staudt. Comme unique postulat emprunté à l'intuition, il admet *l'existence des surfaces gauches*, avec la propriété suivante :

La courbe d'intersection par un plan γ tournant autour d'une génératrice non singulière C se compose de C et d'une courbe résidue rencontrant C en un point c qui se meut sur la génératrice fixe. La courbe résidue étant le lieu des traces des autres génératrices de la surface, la tangente en c à cette courbe sera la position limite de la droite du plan γ qui rencontre à la fois C et deux autres génératrices tendant à coïncider avec elle. Par un choix convenable de la surface gauche, on peut obtenir que cette tangente passe par un point donné du plan γ.

Stekloff (*W.*). — Sur le problème du refroidissement d'une barre hétérogène. (215-218).

Il s'agit d'intégrer l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2} - [k\,p(x) - q(x)]V = 0 \qquad (0 < a \leq x \leq b)$$

jointe aux conditions

$$\frac{dV}{dx} - hV = 0, \qquad \frac{dV}{dx} + HV = 0,$$

la première pour $x = a$, la seconde pour $x = b$, les fonctions p et q étant positives, ainsi que les constantes k, h et H. La série classique

$$(1) \qquad \sum_{s=1}^{\infty} e^{-k_s t}\,U_s \int_a^b p(x)\,\varphi(x)\,U_s\,dx,$$

où $\varphi(x)$ est une fonction donnée, ne résout le problème que si elle est convergente pour $t = 0$ et représente bien la fonction $\varphi(x)$. C'est ce dont on n'a pu s'assurer que dans quelques cas particuliers.

M. Stekloff présente une solution rigoureuse de ce problème, sous certaines conditions, assez générales, par rapport à la fonction $\varphi(x)$, fondée sur ce lemme :

La série (1) *représentera la fonction* $\varphi(x)$ *toutes les fois qu'elle sera uniformément convergente.*

Voici le résultat de son analyse :

Si la fonction $\varphi(x)$ *est finie et continue, ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres et si, en outre, elle satisfait pour* $x = a$ *et* $x = b$ *aux conditions imposées à* V, *elle sera représentée par la série* (1).

Picard (*Ém.*). — Sur la réduction des intégrales doubles et sur un nouvel invariant dans la théorie des surfaces algébriques. (297-300).

Dans une Communication précédente, M. Picard a défini ce qu'on devait entendre par *intégrale double de seconde espèce* relative à une surface algébrique. Il indique aujourd'hui la marche à suivre pour établir l'existence d'un nombre *invariant* relatif à ces intégrales de seconde espèce, savoir le nombre ρ de celles de ces intégrales J dont aucune combinaison linéaire n'est de la forme

$$\int\int\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy \tag{1}$$

(P et Q étant des fonctions rationnelles de x, y, z), tandis que toute autre intégrale de seconde espèce est une combinaison linéaire des intégrales J, à un terme additif près, de la forme (1).

A la fin de sa Note, M. Picard complète l'étude de la réduction élémentaire des intégrales abéliennes ordinaires, sous la forme qu'il lui a donnée dans son *Traité d'Analyse* (t. I) et dans sa *Théorie des fonctions algébriques de deux variables.*

Painlevé. — Sur le développement des fonctions uniformes ou holomorphes dans un domaine quelconque. (318-321).

Après quelques propositions relatives à la représentation des fonctions holomorphes par des séries de polynomes et des produits infinis, ainsi que des fonctions uniformes à points singuliers isolés, l'auteur examine le cas général où l'ensemble E des valeurs exceptionnelles de la fonction F(z) est *quelconque.*

Si cet ensemble renferme des ensembles *continus,* il remplace chacun de ces ensembles par un de ses points, arbitrairement choisi. Soit ε l'ensemble ainsi obtenu, ensemble qui est contenu dans E et qui peut renfermer des ensembles *parfaits,* mais non plus *continus. La fonction* F(z) *est représentable dans tout son domaine d'existence* D *par une série*

$$F(z)=\sum\frac{P_n(z)}{(z-a_n)^{q_n}(z-b_n)^{q_n}},$$

où P_n *désigne un polynome,* q_n *un entier positif,* a_n *et* b_n *deux points de* ε.

M. Painlevé examine ensuite le cas particulier où le domaine D est convexe. Il indique en terminant que certains de ses résultats peuvent être étendus aux fonctions de plusieurs variables.

Borel (*Ém.*). — Sur les types de croissance et sur les fonctions entières. (321-324).

Résumé des recherches effectuées par l'auteur en vue de compléter la théorie des zéros des fonctions entières.

Beudon (*J.*). — Sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles analogues aux équations du premier ordre. (324-325).

Il s'agit des systèmes définissant une fonction de n variables, à une fonction arbitraire près de $n-1$ arguments. On peut les rendre linéaires et assigner leur forme générale en les supposant tels. Tout système tel admet des caractéristiques à une dimension. Si l'on se donne une multiplicité ponctuelle à $n-1$ dimensions, on obtient, par des équations différentielles ordinaires, l'orientation des éléments d'ordre $p-1$ des différentes surfaces intégrales qui contiennent cette multiplicité (p étant l'ordre du système), et l'on engendre ensuite chacune de ces surfaces par les caractéristiques, à la façon habituelle.

Painlevé. — Sur le développement des fonctions analytiques pour les valeurs réelles de variables. (385-388).

L'auteur présente en la résumant la démonstration de cet énoncé :

Si l'on désigne par $F(z)$ une fonction quelconque holomorphe et de module inférieur à $M(x)$ dans chaque cercle de centre x et de rayon $\rho(x)$, x étant réel et compris entre a et b $(a < b)$, on peut calculer une suite de polynomes

$$\Pi_n^0(x), \quad \Pi_n^1(x), \quad \dots, \quad \Pi_n^n(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

tels que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[F_0 \Pi_n^0(x) + F_0' \Pi_n^1(x) + \dots + F_0^{(n)} \Pi_n^n(x) \right],$$

où F_0, F_0', ..., $F_0^{(n)}$ sont les valeurs de la fonction et de ses dérivées successives pour un argument x_0 réel, donné entre a et b, converge absolument et uniformément vers $F(x)$ entre a et b et soit dérivable terme à terme indéfiniment.

Il indique ensuite l'extension de ce résultat aux fonctions de plusieurs variables réelles.

Beudon (*J.*). — Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles, analogues aux équations du premier ordre. (388-389).

Forme générale et caractéristique du système linéaire de second ordre à quatre variables, dont la solution générale dépend d'une fonction arbitraire de deux arguments.

Demoulin (*A.*). — Sur les relations entre les éléments infinitésimaux de deux figures homographiques ou corrélatives. (390-392).

L'auteur établit les relations qui lient les courbures et les torsions de deux courbes homographiques ou corrélatives en leurs points homologues.

Pellet (A.). — Sur les surfaces applicables sur une surface de révolution. (392-394).

Pour que l'expression $A^2(du^2 + g\,dv^2)$ soit l'élément linéaire d'une surface de révolution, A et la courbure totale étant des fonctions de g, il faut et il suffit, quand g n'est pas une fonction de $pu + qv$ (p et q constants), que g ait l'une des deux formes suivantes :

$$g = -\frac{n^2 \cos^2(mu + p)}{m^2 \cos^2(nv - q)}, \qquad g = -\frac{n^2 u^2}{\cos^2(nv + q)},$$

m, n, p, q étant des constantes.

Humbert (G.). — Sur la décomposition des fonctions Θ en facteurs. (394-397).

Est dite *fonction thêta* d'ordre m une fonction entière de deux variables qui vérifie les relations

$$\begin{aligned} \Theta(u + 1, v) &= \Theta(u, v), \\ \Theta(u, v + 1) &= \Theta(u, v), \\ \Theta(u + a, v + b) &= e^{-2mi\pi v + \alpha'}\,\Theta(u, v), \\ \Theta(u + b, v + c) &= e^{-2mi\pi u + \beta'}\,\Theta(u, v), \end{aligned}$$

α' et β' étant des constantes. Il est clair que le produit de deux fonctions Θ d'ordres m et n est une fonction Θ d'ordre $m + n$. M. Humbert s'occupe de la question inverse : si une fonction Θ se décompose en deux facteurs *entiers*, ces facteurs sont-ils nécessairement des fonctions Θ, à des facteurs exponentiels près ?

La réponse est affirmative quand les périodes a, b, c sont choisies au hasard. Une exception ne peut se présenter que si les périodes a, b, c sont liées par une relation à coefficients entiers de la forme

$$Aa + Bb + Cc + D(ac - b^2) + E = 0.$$

La quantité toujours positive

$$\Delta = B^2 - 4AC - 4DE$$

est un invariant pour toutes les transformations du premier ordre; si Δ est un carré parfait, les fonctions Θ considérées se réduisent aux fonctions Θ elliptiques.

L'auteur étudie le cas où Δ n'est pas carré parfait et donne l'interprétation géométrique des résultats obtenus.

D'Ocagne (M.). — Sur la méthode nomographique la plus générale résultant de la position relative de deux plans superposés. (397-400).

Painlevé. — Sur le développement des fonctions réelles non analytiques. (459-461).

Voici le résultat général obtenu par l'auteur, qui l'énonce en se limitant à trois variables :

Soit $f(x, y, z)$ une fonction des variables réelles x, y, z qui, en chaque point d'un certain domaine Δ à trois dimensions, est continue et admet des dérivées partielles continues de tous les ordres : la fonction $f(x, y, z)$ est développable en une série de polynomes, qui converge dans tout domaine intérieur à Δ et est dérivable terme à terme indéfiniment.

Suivent diverses applications, en particulier aux fonctions analytiques d'une variable complexe et aux fonctions d'une variable réelle.

Picard (*Ém.*). — Sur certains exemples singuliers d'approximations successives. (497-500).

M. Picard revient sur un exemple curieux d'approximations successives divergentes qu'il avait signalé antérieurement. L'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y),$$

où l'on suppose la fonction f toujours positive et croissante avec y, possède une intégrale et une seule nulle pour $x = a$ et $x = b$. Si l'on cherche à obtenir cette intégrale par approximations successives, en partant de $y_0 = 0$, on reconnaît aisément que les y d'indices pairs et les y d'indices impairs forment *deux* suites convergentes qui peuvent avoir des *limites différentes*, ainsi que M. Picard l'avait montré par un exemple. Il avait, en outre, établi que, *si les termes des deux suites tendent uniformément dans l'intervalle* (a, b) *vers leurs limites respectives* v *et* u, celles-ci sont des fonctions de x satisfaisant aux équations simultanées

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x, v), \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = f(x, u),$$

et s'annulent toutes deux pour $x = a$ et $x = b$.

Dans la présente Note, il est démontré que l'hypothèse sur la convergence uniforme est réalisée effectivement. On y trouve aussi l'indication de divers sujets de recherches sur les approximations successives.

Humbert (*G.*). — Sur les fonctions abéliennes singulières. (508-510).

L'auteur désigne ainsi les fonctions quadruplement périodiques de deux variables dont les périodes

$$\begin{matrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & b & c \end{matrix}$$

sont liées par une relation à coefficients entiers de la forme

$$Aa + Bb + Cc + D(b^2 - ac) + E = 0.$$

Le déterminant toujours positif

$$\Delta = B^2 - 4AC - 4DE$$

étant égal à $4h$ ou à $4h+1$, ses valeurs les plus simples sont 1, 4, 5, 8 et 9; le cas $\Delta = 1$ correspond à des fonctions abéliennes dégénérées; $\Delta = 4$ et $\Delta = 9$ donnent deux cas elliptiques bien connus.

L'auteur étudie les hypothèses $\Delta = 5$ et $\Delta = 8$ avec leurs conséquences géométriques et donne le moyen de former les équations aux *modules* qui leur correspondent.

Lémeray. — Sur quelques algorithmes généraux et sur l'itération. (510-512).

Painlevé. — Sur les surfaces qui admettent un groupe infini discontinu de transformations birationnelles. (512-515).

L'auteur donne, après M. Humbert, un nouvel exemple, plus simple, de surface admettant, comme groupe de transformations birationnelles en elle-même, un groupe infini discontinu, savoir :

$$z^2 = \frac{4x^3 - g_2x - g_3}{4y^3 - g_2y - g_3}.$$

Il pose ensuite ce double problème, qu'il enseigne à résoudre :

1° Déterminer toutes les surfaces dont les coordonnées sont des fonctions hyperelliptiques de deux paramètres (u, v), telles que, à un point de la surface, correspondent *plusieurs* couples (u, v) non congruents (ces couples se déduisant d'un d'entre eux par une transformation linéaire);

2° Parmi ces surfaces, déterminer celles qui admettent un groupe infini discontinu de transformations birationnelles.

Bourlet (*C*.). — Sur l'itération. (583-585).

Énoncé d'un théorème qui résout, théoriquement du moins, le problème de l'itération dans un cas très général :

Soient $\varphi(z)$ une fonction de substitution et x un point limite tel que l'on ait, à la fois,

$$|\varphi'(x)| < 1, \qquad |\varphi'(x) - 1| < 1,$$

$\varphi'(z)$ étant la dérivée de $\varphi(z)$. Soient

$$\varphi_1(z) = \varphi(z), \quad \varphi_2(z) = \varphi[\varphi_1(z)], \quad \ldots, \quad \varphi_p(z) = \varphi[\varphi_{p-1}(z)].$$

Quel que soit k, la série

$$z + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{p!}$$
$$\times \left[\varphi_p(z) - \frac{p}{1}\varphi_{p-1}(z) + \frac{p(p-1)}{1.2}\varphi_{p-2}(z) + \ldots + (-1)^p z\right]$$

est convergente dans un domaine convenablement choisi entourant le point limite x et définit, dans ce domaine, une fonction $\Psi(k, z)$, qui est l'itérative

de $\varphi(z)$, vérifiant les relations

$$\Psi(p, z) = \varphi_p(z), \qquad \Psi[k, \Psi(k', z)] = \Psi(k + k', z),$$

pour tout entier p positif ou négatif, et quels que soient k et k'.

Poincaré (*H.*). — Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$. (627-630).

On sait que si $\varphi(x, y)$ est une fonction rationnelle de deux variables liées par une relation algébrique *donnée* $f(x, y) = 0$, parmi les équations de la forme

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v\varphi(x, y)$$

qui admettent des points singuliers donnés et de telle façon que la différence des racines de chaque équation fondamentale soit un entier donné, il y a toujours une équation engendrant des fonctions fuchsiennes.

Une première démonstration de ce fait, donnée par MM. Klein et Poincaré, repose sur le principe de continuité. Plus tard, M. Picard a ramené la question à l'intégration de l'équation

$$\Delta u = e^u,$$

et démontré l'intégrabilité de cette équation par une méthode originale qui consiste à l'établir pour un domaine assez petit, puis à l'étendre au plan entier.

Pour éviter ce détour, M. Poincaré a imaginé une démonstration nouvelle, qui s'applique au cas où le polygone fuchsien a des sommets sur le cercle fondamental, cas qui met en défaut l'analyse de M. Picard. Après avoir exposé le principe de cette méthode, il indique la possibilité d'une autre démonstration rigoureuse, fondée sur le calcul des variations.

Fontaneau. — Sur un cas particulier du mouvement des liquides. (630-631).

L'auteur a introduit dans les équations de l'Hydrodynamique une fonction auxiliaire Π définie par l'égalité

$$\Pi = \mathrm{L}p + \mathrm{M}q + \mathrm{N}r,$$

où p, q, r désignent les composantes de la vitesse du liquide, L, M, N celles du tourbillon.

Il a traité le cas $\Pi = 0$, c'est-à-dire où l'axe de la rotation élémentaire est partout perpendiculaire à la direction de la vitesse. Puis, en généralisant son procédé, il a obtenu une méthode générale d'intégration des équations d'Euler, l'*intégration* étant entendue au sens que lui donnait Lagrange.

Lindelöf. — Sur la transformation d'Euler et la détermination des points singuliers d'une fonction définie par son développement de Taylor. (632-634).

Étant donnée une série entière $f(x)$, convergente dans le cercle de rayon 1, la transformation d'Euler consiste à poser

$$x = \frac{y}{1+y}.$$

M. Lindelöf emploie le transformation plus générale

$$x = \frac{\alpha y}{1+y},$$

où α est une constante réelle et *positive*. Il indique le parti qu'on en peut tirer pour déterminer les points singuliers situés sur le cercle de convergence de $f(x)$, et même parfois en dehors de ce cercle. Un exemple montre qu'on peut aussi, par ce moyen, établir plusieurs résultats antérieurement obtenus sur les conditions pour qu'un point donné du cercle de convergence soit singulier.

Bourget (H.). — Sur une extension de la méthode de Gauss. (634-636).

Pour étendre aux intégrales doubles la méthode de Gauss, M. Appell a proposé de substituer à la fonction f qu'il s'agit d'intégrer un polynome de degré p déterminé par la condition de prendre les mêmes valeurs que f en $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$ points donnés dans le contour d'intégration et choisis de manière à rendre l'approximation maximum.

M. Bourget étudie le cas où l'intégrale J est étendue au cercle $x^2+y^2=1$ et porte sur une fonction f holomorphe à l'intérieur de ce cercle. Il introduit deux polynomes P et Q de degré p en x et y dont les p^2 racines communes soient intérieures au cercle et substitue à la fonction f un polynome $\varphi(x,y)$ qui prend les mêmes valeurs $f_1, f_2, \ldots, f_{p^2}$ que f en tous les points communs aux deux courbes $P=0$, $Q=0$. L'intégrale proposée J coïncide avec l'intégrale

$$I = \int\int \varphi(x,y)\,dx\,dy = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \ldots + A_{p^2} f_{p^2}$$

jusqu'aux termes d'ordre $p-1$ en x, y inclusivement; les constantes A_i dépendent seulement des points communs aux courbes $P=0$, $Q=0$ et nullement de la fonction f.

Pour faire coïncider les deux intégrales J et I jusqu'aux termes d'ordre $2p-1$ inclusivement, il faut prendre pour P et Q deux des polynomes $U_{i,j}$ de M. Hermite, savoir :

$$P = \frac{d^p(x^2+y^2-1)^p}{dx^p}, \qquad Q = \frac{d^p(x^2+y^2-1)^p}{dy^p}.$$

L'auteur donne, en terminant, le tableau des points communs à $P=0$, $Q=0$ et des valeurs correspondantes des A, ainsi déterminés, pour $p = 1, 2, 3, 4$.

Marotte (F.). — Sur les déterminations du groupe de rationa-

lité des équations différentielles linéaires du quatrième ordre. (715-718).

M. Picard a défini, pour toute équation différentielle linéaire homogène, un groupe de transformations linéaires homogènes, qui joue un rôle essentiel dans le problème d'intégration. La détermination effective de ce *groupe de rationalité* a beaucoup d'importance. M. Marotte indique un procédé pour faire cette détermination dans le cas des équations du quatrième ordre.

Sophus Lie a montré que les groupes continus linéaires homogènes à quatre variables se répartissent en sept catégories, suivant la figure que le groupe projectif correspondant laisse invariable. M. Marotte caractérise les groupes de chaque catégorie par un invariant différentiel spécial, ce qui lui permet de partager les équations de quatrième ordre en sept catégories, suivant la nature de leur groupe de rationalité; en s'appuyant sur les travaux de M. Painlevé, *on peut toujours, par un nombre fini d'opérations, reconnaître à quelle catégorie appartient une équation linéaire donnée.*

L'auteur a montré précédemment qu'à tout point singulier d'une équation linéaire est attaché un groupe de transformations linéaires dont les invariants sont méromorphes au voisinage du point singulier; ces groupes, pour l'équation du quatrième ordre, appartiennent à l'une des catégories mentionnées plus haut, de sorte qu'il y a *sept catégories de points singuliers.* Grâce aux méthodes de M. von Koch, *on peut former, par des opérations arithmétiques, des fonctions transcendantes entières des coefficients de l'équation donnée, qui, égalées à zéro, expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un point singulier soit d'une catégorie déterminée.*

Guichard. — Sur les congruences conjuguées aux réseaux C. (718-721).

Le Roux (*J.*). — Sur les invariants des équations linéaires aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. (721-723).

De même que les équations du second ordre, les équations d'ordre supérieur admettent, dans certains cas, des intégrales particulières s'exprimant à l'aide d'une fonction arbitraire d'une variable caractéristique et des dérivées de cette fonction en nombre limité.

Ces intégrales peuvent être déterminées par une suite de transformations analogues à celle de Laplace, et que l'auteur fait connaître. Mais l'ordre de l'équation transformée s'élève en général à chaque transformation.

Les principales propriétés de l'équation, relativement à ses transformations, se reflètent dans une suite d'invariants analogues à ceux qui ont été introduits par M. Darboux pour le second ordre. M. Le Roux indique la loi de formation de ces invariants.

Schlesinger (*L.*). — Sur un problème de Riemann. (723-725).

Dans un Mémoire posthume, Riemann a posé le problème suivant :

Étant donnés, dans le plan de la variable x, les $\sigma+1$ points $a_1, \ldots, a_\sigma, a_{\sigma+1}$, traçons des coupures $l_1, \ldots, l_\sigma$ joignant les points $a_1, \ldots, a_\sigma$ au point $a_{\sigma+1}$. On demande n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de x, qui se comportent régulièrement

pour toutes les valeurs de x, excepté les points a_k, qui subissent les substitutions linéaires données arbitrairement A_1, A_2, ..., A_σ quand x franchit les coupures l_1, l_2, ..., l_σ et qui, aux points a_k, ne deviennent pas infinies d'un ordre infiniment grand.

M. Schlesinger fait voir que ce problème, dont Riemann ne démontre même pas la possibilité, peut être résolu à l'aide des travaux de M. Poincaré sur les équations fuchsiennes.

Perchot et *Ebert*. — Sur certaines intégrales premières des équations de la Dynamique à deux variables; application à un cas particulier du problème des trois corps. (725-728).

Laurent (*H*.). — Sur la théorie des nombres premiers. (809-810).

La fonction

$$\varpi(z) = \frac{e^{2i\pi\frac{\Gamma(z)}{z}} - 1}{e^{-\frac{2i\pi}{z}} - 1},$$

où l'entier z est supérieur à 4, se réduit à zéro ou à 1 suivant que z est composé ou premier; d'où résulte un moyen de calculer la somme

$$\sum_{z=5}^{z=n} \varpi(z) f(z),$$

$f(z)$ désignant une fonction définie pour $z > 4$. On arrive au même résultat par l'emploi de la formule de Fourier.

Cette méthode permet de trouver $\sum f(p'_i)$ en appelant p'_1, p'_2, ... les nombres premiers qui font partie d'une progression arithmétique à termes entiers et de vérifier le théorème de Dirichlet relatif à ces nombres.

Hadamard. — Les invariants intégraux et l'Optique. (811-812).

M. Bruns a démontré que si un système optique fait correspondre à chaque point-objet un point-image unique, la correspondance ainsi réalisée ne peut être qu'une similitude.

Par l'emploi des invariants intégraux de M. Poincaré, on prouve que le rapport de similitude de l'image et de l'objet est *nécessairement égal à* 1.

Stouff (*X*.). — Sur les lois de réciprocité. (812-814).

Humbert (*G*.). — Sur la transformation des fonctions abéliennes. (814-817).

Une fonction abélienne de deux variables ayant pour périodes normales

$$\begin{matrix} 0 & 1 & g & h \\ 1 & 0 & h & g', \end{matrix}$$

ou plus brièvement (g, h, g'), on suppose

$$g_1 > 0, \qquad g'_1 > 0, \qquad g_1 g'_1 - h_1^2 > 0,$$

g_1, h_1, g'_1 étant les parties imaginaires de g, h, g'. Le problème de la transformation (Hermite) consiste à trouver tous les systèmes (G, H, G') tels qu'une fonction abélienne quelconque, formée avec ces nouvelles périodes, s'exprime rationnellement à l'aide des fonctions abéliennes du système primitif (g, h, g').

Si, au lieu d'être quelconques, les nombres g, h, g' et $h^2 - gg'$ sont liés par une relation linéaire, il existe d'autres transformations que celles qu'a obtenues M. Hermite.

En étudiant ces *transformations singulières*, l'auteur retrouve les fonctions intermédiaires singulières qu'il a introduites dans une Note antérieure (*voir* ci-dessus). Il démontre que toute transformation singulière se ramène à une transformation ordinaire, précédée d'une certaine transformation singulière simple, qu'il définit complètement.

Suivent des applications aux correspondances entre surfaces de Kummer et entre courbes de genre 2.

De Jonquières. — Solutions algébriques de diverses questions concernant les équations indéterminées du second degré à trois termes. (863-871).

L'auteur mentionne l'avantage des notations algébriques, quand il est possible de les employer en ces matières. Il établit les deux théorèmes suivants :

I. L'équation

$$(a^2 - 4)x^2 - 4y^2 = \pm 1$$

n'est pas résoluble en nombres entiers, sauf si $a = 3$.

II. L'équation

$$(a^2 - 1)x^2 - 4y^2 = \pm 1$$

n'est pas résoluble en nombres entiers.

Grâce à ces propositions, M. de Jonquières traite algébriquement cinq problèmes relatifs à la résolution de l'équation

$$\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$$

dans des cas particuliers.

Humbert (G.). — Sur les transformations singulières des fonctions abéliennes. (882-884).

Application des résultats de la Note précédente de l'auteur aux correspondances entre surfaces hyperelliptiques.

Baire (R.). — Sur les fonctions discontinues développables en séries de fonctions continues. (884-887).

Une fonction de deux variables réelles étant supposée *continue par rapport à chacune d'elles,* la succession des valeurs que cette fonction prend sur une

courbe *continue* peut être une fonction *discontinue* : quelle est exactement la nature de cette fonction? Telle est la question que M. Baire avait posée dans une Note de novembre 1897. Il énonce aujourd'hui un théorème qui résout complètement cette question, en même temps que d'autres problèmes un peu différents. En particulier, il définit *toutes les fonctions discontinues susceptibles d'être représentées par des séries de fonctions continues.*

Au cours de son analyse est déterminée la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'une variable réelle soit développable en série de polynomes.

Kantor (*S.*). — Théorème fondamental sur les transformations birationnelles à coefficients entiers. (946-949).

On sait que les transformations birationnelles homogènes du domaine ternaire peuvent être décomposées (Nöther) en des transformations quadratiques. Mais il n'en est plus de même si l'on impose aux coefficients des transformations considérées la condition d'être des nombres entiers. M. Kantor a établi que toute transformation birationnelle arithmétique à trois variables homogènes peut être composée au moyen de facteurs primaires arithmétiques qui se répartissent entre seize types différents.

Lémeray. — Sur certaines équations fonctionnelles linéaires. (949-950).

L'auteur indique les principaux résultats qu'il a obtenus en constituant une théorie du plus grand commun diviseur symbolique de plusieurs *polynomes fonctionnels linéaires,* tels que

$$A_0 y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1} y^{(1)} + A_n y^{(0)},$$

où les A sont des fonctions de la variable x et où l'on désigne par $y^{(i)}$ l'itérative d'ordre i de la fonction $y = y^{(1)}$ avec la convention $y^{(0)} = x$.

De Jonquières. — Sur un point de doctrine dans la théorie des formes quadratiques. (991-997).

Comparaison de la méthode de Gauss (*Disquisitiones arithmeticæ,* n° 195) avec la méthode mixte, inspirée de Lagrange, que l'auteur a suivie dans sa précédente Communication.

Guichard (*C.*). — Sur les congruences qui sont de plusieurs manières des congruences K. (1011-1013).

Jahnke. — Nouvelles expressions des éléments d'un système orthogonal par les fonctions thêta de deux arguments et leur application à la Dynamique. (1013-1016).

L'auteur a obtenu, au moyen des fonctions thêta de deux arguments, de nouveaux systèmes orthogonaux qui fournissent les solutions de certains problèmes

de Dynamique, tels que le mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe, le mouvement d'un solide dans un liquide, la rotation de corps solides liés l'un à l'autre (ce dernier résolu complètement par M. Jahnke) et de divers autres problèmes relatifs à la rotation et au mouvement dans un liquide.

Ebert et *Perchot*. — Sur une transformation de l'équation d'Hamilton. (1017-1019).

Stekloff. — Sur un problème de la théorie analytique de la chaleur. (1022-1025).

De Jonquières. — Addition à une précédente Communication, concernant la théorie des formes quadratiques. (1077-1083).

L'auteur indique un nouvel avantage que présente, au point de vue de la simplicité des calculs dans la résolution des équations indéterminées de la forme

$$mx^2 - ny^2 = \pm 1 \qquad (m,\ n \text{ entiers positifs}),$$

l'emploi de la *méthode mixte* qu'il préconise.

Jahnke. — Expressions des dérivées des fonctions thêta de deux arguments au moyen des carrés des fonctions thêta. (1083-1085).

Les dérivées logarithmiques secondes des fonctions thêta de deux arguments s'expriment au moyen des carrés de ces fonctions. Des formules que l'auteur fait connaître découlent de nombreux résultats, antérieurement obtenus par MM. Königsberger, Krause, Pascal et Bertolani.

Krause (*M.*). — Sur les systèmes d'équations différentielles auxquelles satisfont les fonctions quadruplement périodiques de seconde espèce. (1086-1088).

Cosserat (*Eug.* et *Fr.*). — Sur les équations de la théorie de l'élasticité. (1089-1091).

Les problèmes les plus simples de la théorie de l'élasticité consistent à déterminer trois intégrales du système

$$\Delta_2 u + \xi \frac{d\theta}{dx} = 0, \qquad \Delta_2 v - \xi \frac{d\theta}{dy} = 0, \qquad \Delta_2 w + \xi \frac{d\theta}{dz} = 0,$$

satisfaisant à des conditions diverses. Supposant que u, v, w prennent à la frontière des valeurs données, MM. Cosserat ont fait une étude approfondie de ces fonctions en les considérant comme des fonctions du paramètre ξ qui peut être soit réel, soit complexe. On embrasse ainsi tous les travaux déjà faits sur la question, en particulier ceux de M. Lauricella, et ceux des divers géomètres qui se sont occupés du problème de la sphère, dans le cas où les déplacements sont donnés à la frontière.

Hatt. — Expression des coefficients de la marée au moyen d'une somme de termes périodiques. (1111-1116).

Picard (Ém.). — Sur la réduction des intégrales doubles de fonctions algébriques. (1116-1117).

Étant donnée une surface d'ordre m

$$f(x, y, z) = 0$$

et une intégrale double relative à cette surface

$$\iint \frac{M(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

où M est un polynome entier en x, y, z, le degré de ce polynome peut être ramené au degré $2m-4$. On peut même pousser la réduction plus loin et abaisser le degré de M jusqu'au plus grand entier p_0 pour lequel l'inégalité

$$\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3} - \frac{(p-m+2)(p-m+3)(p-m+4)}{6} \geq (p+m-1)\,m(m-1) - \frac{m(m-1)(2m-5)}{2}$$

n'est pas vérifiée.

Jahnke. — Sur le mouvement d'un corps grave de révolution suspendu par un point de son axe. (1126-1129).

Cosserat (Eug. et Fr.). — Sur les fonctions potentielles de la théorie de l'élasticité. (1129-1132).

Les auteurs font ressortir la saisissante analogie qui existe entre l'équation de Laplace et le système

$$\Delta_2 u + \xi \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0, \qquad \Delta_2 v + \xi \frac{\partial\theta}{\partial y} = 0, \qquad \Delta_2 w + \xi \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0.$$

Les solutions de ce système qui offrent le plus d'intérêt sont données pour ξ quelconque par la formule

$$u_i = U_i - \frac{\xi r^2}{2[\xi(i-1) + 2i - 1]} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} + \frac{\partial W_i}{\partial z}\right)$$

et deux autres semblables où

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

et où U_i, V_i, W_i sont des solutions de l'équation de Laplace, homogènes en $x-a$, $y-b$, $z-c$, dérivant de la seule solution (u', v', w') que l'on obtient en prenant

$$i = -1, \qquad \frac{U_i}{A} = \frac{V_i}{B} = \frac{W_i}{C} = \frac{k}{r}, \qquad k = \frac{3(2\xi+3)}{\xi+1},$$

A, B, C étant des constantes arbitraires. Cette *fonction dirigée* (u', v', w') joue d'ailleurs dans la théorie de l'élasticité un rôle extrêmement important.

Les fonctions dirigées (U, V, W) que MM. Cosserat introduisent sont susceptibles de nombreuses applications, relatives notamment à la notion de force en un point : on peut substituer à une force en un point, situé à l'intérieur d'une sphère, des forces sur la surface, qui donnent à l'extérieur le même déplacement; on a ainsi l'analogue de l'une des propositions sur lesquelles repose la méthode du balayage de M. Poincaré. On peut aussi écrire presque intuitivement l'extension de l'équation fonctionnelle de Robin.

Guichard. — Sur les congruences rectilignes. (1183-1185).

Painlevé (*P.*). — Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. (1185-1188).

L'auteur aborde le problème difficile qui consiste à *former toutes les équations du second ordre à points critiques fixes,* du type

$$y'' = \rho(y', y, z, x),$$

où ρ est rationnel en y', y, z et où z est lié à y par une relation algébrique dépendant de x. Il établit que *toute équation de cette espèce se ramène algébriquement à l'un ou l'autre de six types déterminés, type qui doit avoir ses points critiques fixes.*

En effet les équations les plus générales de ces types n'ont pas leurs points critiques fixes.

La méthode de M. Painlevé s'applique d'ailleurs aux équations plus générales

$$F(y'', y', y, x) = 0$$

dont le premier membre est un polynome entier en y'', y', y dépendant de la variable x.

Medolaghi. — Sur les groupes qui se présentent dans la généralisation des fonctions analytiques. (1188-1190).

Il s'agit des groupes que représentent les systèmes d'équations aux dérivées partielles par lesquels M. Picard généralise la théorie des fonctions d'une variable complexe. L'auteur donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe continu transitif soit semblable à un groupe de Picard; ensuite il étend la méthode de M. Picard à tous les groupes continus.

Painlevé. — Sur la détermination explicite des équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. (1329-1332).

Des six types (*voir* ci-dessus) auxquels M. Painlevé a ramené les équations considérées, les quatre derniers ont fait l'objet d'une étude complète de sa part. L'auteur donne donc la forme explicite des équations appartenant à ces types, qui ont leurs points critiques fixes. Leurs singularités mobiles sont ou des pôles, ou des points essentiels. Une équation du second ordre étant donnée, on peut reconnaître algébriquement si elle est réductible à l'un des types ainsi déterminés.

Goursat. — Sur la théorie générale des caractéristiques des équations aux dérivées partielles. (1332-1335).

L'auteur associe à toute équation d'ordre n à r variables $F = 0$ une forme I homogène d'ordre n à r variables auxiliaires ξ_i, déjà rencontrée par M. Forsyth, qui lui fournit la condition d'existence d'une famille de caractéristiques d'ordre n à une dimension; l'existence de ces caractéristiques est donc exceptionnelle. (L'équation du troisième ordre dont dépend la recherche des systèmes orthogonaux en admet.)

Si $F = 0$ admet de telles caractéristiques, on peut aussi considérer la suite des valeurs que prennent le long de l'une d'elles les dérivées d'ordre $n + i$, et définir ainsi des caractéristiques d'ordre $n + i$, qui dépendent de fonctions arbitraires. Mais si ces équations présentent des combinaisons intégrables, on peut s'en servir pour l'intégration de $F = 0$ comme dans la méthode de Monge ou dans celle de M. Darboux.

Ces considérations s'étendent aux systèmes d'équations simultanées entre plusieurs fonctions.

Les formes I interviennent aussi dans la détermination des conditions nécessaires pour que l'intégrale générale d'un système de deux équations d'ordre n

$$F = 0, \qquad U = C$$

à une seule fonction inconnue et à r variables indépendantes dépende de $(n - 1)$ fonctions arbitraires de $(r - 1)$ variables.

Guldberg (A.). — Sur les équations aux différentielles totales. (1335-1338).

L'auteur commence par donner les conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales du second ordre

$$(1) \qquad d^2z - A\,dx^2 - B\,dy^2 + C\,dz^2 + 2D\,dx\,dy + 2E\,dx\,dz + 2F\,dy\,dz = 0.$$

Ces conditions étant supposées vérifiées, l'intégration se ramène à celle d'un système d'équations différentielles ordinaires.

Deux intégrales intermédiaires complètement intégrables

$$(2) \qquad \omega_1(x, y, z, dx, dy, dz) = 0, \qquad \omega_2(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

de l'équation (1) étant trouvées, une surface intégrale de l'équation (1) se détermine par élimination.

Étant données deux équations complètement intégrables, telles que (2), et qui, par différentiation, conduisent à la même équation aux différentielles totales du second ordre, toute équation aux différentielles totales du premier ordre complètement intégrable

$$F(\omega_1, \omega_2) = 0$$

s'intègre *sans intégration*.

Picard (Ém.). — Sur l'impossibilité de certaines séries de groupes de points sur une surface algébrique. (1383-1386).

Démonstration de ce théorème :

Il n'existe point, sur une surface algébrique, de séries de groupes de n points, dépendant de $2n$ paramètres et correspondant uniformément à des fonctions abéliennes (non dégénérescentes) de $2n$ variables, si ce n'est pour les surfaces hyperelliptiques ($n = 1$).

Duporcq. — Sur la correspondance quadratique et rationnelle de deux figures planes, et sur un déplacement remarquable. (1405-1406).

Dans le mode de correspondance considéré, la donnée de cinq couples de points conjugués en détermine un sixième; la donnée de six couples détermine, en général, une infinité de couples de points conjugués, qui se correspondent sur deux cubiques. De là résulte, en particulier, la proposition suivante :

Si un plan P se déplace dans l'espace de sorte que cinq de ses points restent sur des sphères dont les centres appartiennent à un plan fixe P′, il existera dans le plan P un sixième point jouissant de la même propriété.

Miller (G.-A.). — Sur les groupes hamiltoniens. (1406-1408).

Propriétés des groupes (non abéliens) dont tous les sous-groupes sont invariants.

Picard (Ém.). — Quelques remarques relatives aux périodes des intégrales doubles et aux cycles à deux dimensions dans les surfaces algébriques. (1457-1459).

L'auteur montre par un exemple simple les difficultés auxquelles prête la distinction en plusieurs catégories des périodes des intégrales doubles : dans le cas des surfaces unicursales, les périodes de certaines intégrales doubles, que leur origine ferait regarder comme cycliques, se présentent comme des périodes polaires.

Suivent quelques observations relatives à la connexion à deux dimensions dans les surfaces algébriques et en particulier sur la détermination du nombre entier p_2 que M. Picard a introduit dans la théorie de ces surfaces.

Guichard. — Sur les surfaces minima. (1487-1489).

Krause (M.). — Sur les systèmes d'équations différentielles auxquels satisfont les fonctions quadruplement périodiques de seconde espèce. (1489-1492).

Guichard. — Sur les surfaces à courbure totale constante. (1556-1558).

Riquier. — Sur la forme que prend, par la suppression de cer-

tains termes, un développement en série entière. (1558-1560).

Désignant par x, y, ... des variables indépendantes en nombre quelconque, et par x_0, y_0, ... des *valeurs initiales* attribuées à ces variables, l'auteur considère un développement, entier en $x - x_0$, $y - y_0$, ... à coefficients *tous arbitraires,* sous la seule restriction de la convergence. Il étudie ce que devient ce développement, par la suppression de certains de ses termes, ce qui lui permet, dans le problème général de l'intégration d'un système différentiel, de *fixer l'économie des fonctions* (*ou constantes*) *en nombre fini, dont la connaissance équivaut à celle des déterminations initiales,* sans recourir, comme il le faisait jusqu'ici, à une réduction progressive au premier ordre.

Guichard. — Sur les surfaces à courbure totale constante. (1616-1618).

L'auteur montre que la déformation des quadriques de révolution à centre et celle de la sphère sont deux problèmes équivalents.

De plus, si l'on déforme une telle quadrique, au point d'intersection d'une droite isotrope, fixe dans le plan de son équateur, avec le plan tangent correspond sur le plan tangent de toute surface applicable un point qui décrit une surface ayant même représentation sphérique de ses lignes de courbure qu'une surface à courbure totale constante.

De là résulte une transformation nouvelle de ces dernières surfaces.

Krause (*M.*). — Sur les systèmes d'équations différentielles auxquelles satisfont les fonctions quadruplement périodiques de seconde espèce. (1618-1621).

Baire (*R.*). — Sur les fonctions discontinues qui se rattachent aux fonctions continues. (1621-1623).

L'auteur convient de dire qu'une fonction $f(x)$ est la *limite* de la suite de fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... dans un certain champ de variation de x, si, pour toute valeur x_0 appartenant à ce champ, la suite des quantités $f_1(x_0)$, $f_2(x_0)$, ..., $f_n(x_0)$, ... a pour limite $f(x_0)$. Il dit aussi que les fonctions continues forment la *classe* 0, et les fonctions discontinues, limites de fonctions continues, la *classe* 1.

Une fonction de la classe 1 est représentable par une série convergente de fonctions continues, même de polynomes.

Plus généralement une fonction sera de *classe* n si elle est la limite d'une suite de fonctions appartenant aux classes 0, 1, ..., $(n-1)$, sans appartenir elle-même à aucune de ces classes. Une telle fonction, s'il en existe, pourra se représenter par une série multiple d'ordre n, dont les termes seront des polynomes.

L'auteur indique une condition *nécessaire* pour qu'une fonction soit de classe 2.

Painlevé. — Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. (1697-1700).

Les équations, *à points critiques fixes*, de la forme

$$y'' = R(y', y, x),$$

où R est rationnel en y', algébrique en y, rationnel en x, forment, comme l'a montré l'auteur, *six* classes distinctes. M. Painlevé a déjà déterminé *explicitement toutes les équations des quatre dernières classes*. Il fait présentement connaître toutes celles de la première classe, c'est-à-dire toutes celles qui rentrent dans le type

$$y'' = (ax + b)y' + Ay^3 + By^2 + Cy + D,$$

où a, b, A, B, C, D sont des fonctions analytiques de x. Celles de ces équations qui ne sont pas réductibles aux équations connues, sont réductibles algébriquement au type

$$y'' = \alpha y^3 + y^2 + 3\alpha xy - x,$$

où α désigne une constante numérique.

Baire (*R.*). — Sur le problème de l'intégration au point de vue des variables réelles. (1700-1703).

Quand on se sert du changement de variables dans une question d'Analyse, on suppose implicitement la *continuité* des dérivées qui y interviennent. Rejetant cette restriction, on peut poser le problème de l'intégration en admettant seulement les *propriétés strictement indispensables pour que les éléments qui entrent dans l'équation aient un sens déterminé et vérifient cette équation*. On ne peut plus alors affirmer d'emblée que l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

ait pour intégrale générale une fonction arbitraire de $(x - y)$.

L'auteur commence par énoncer ce théorème :

Une fonction d'une variable, qui est continue, et qui est ponctuellement variable relativement à tout ensemble parfait, est constante.

Cette proposition tire son intérêt de ce fait qu'*une fonction peut être continue et ponctuellement variable relativement au continu, sans être constante*.

Ce résultat permet d'intégrer l'équation ci-dessus, si l'on suppose, outre les conditions indispensables, la continuité de la fonction par rapport à l'ensemble (xy). On voit alors, en effet, que *la fonction f doit être constante sur chaque droite* $x - y =$ const.

Cette conclusion s'étend aux équations linéaires et homogènes par rapport aux deux dérivées premières de la fonction inconnue.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
Tome CXXVII; 1898.

Krause (*M.*). — Sur les systèmes d'équations différentielles auxquelles satisfont les fonctions quadruplement périodiques de seconde espèce. (91-93).

Tzitzéica. — Sur un théorème de M. Cosserat. (167-168).

Ce théorème est le suivant :

Les plans des cercles des systèmes cycliques déduits d'une congruence cyclique et de Ribaucour ont leurs points de contact avec leurs enveloppes en ligne droite; la droite ainsi déterminée forme une congruence dont les développables correspondent à celles de la congruence primitive et découpent les enveloppes des plans des cercles suivant des réseaux conjugués.

M. Tzitzéica rattache ce résultat à une proposition plus générale qu'il démontre :

Considérons une congruence C et faisons correspondre à chaque droite D de C la corde de contact Δ de la sphère S décrite sur le segment focal de D comme diamètre avec son enveloppe. S'il existe sur la droite Δ un point μ décrivant une surface dont la normale en μ soit parallèle à D, la congruence C est cyclique.

Lecornu (*L.*). — Sur l'équilibre d'élasticité d'un bandage pneumatique. (168-171).

Le bandage pneumatique est constitué par un tore en caoutchouc, revêtu d'une enveloppe de toile qui limite son extensibilité. Il est soumis intérieurement à une pression de plusieurs atmosphères, extérieurement à la pression atmosphérique. L'auteur étudie l'équilibre de ce bandage, en laissant de côté les effets dus à la présence de la toile, et en considérant les rayons de la section méridienne comme infiniment petits par rapport au rayon moyen de la section équatoriale.

Zaremba (*S.*). — Sur un théorème de M. Poincaré. (215-216).

M. Poincaré a énoncé et partiellement démontré l'important théorème que voici :

Soient une surface (S) limitant un domaine (D); $f(x, y, z)$ une fonction donnée admettant des dérivées premières dans toute l'étendue du domaine (D), et u la fonction satisfaisant, à l'intérieur de la surface (S), à l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} + \xi u + f = 0$$

et prenant sur cette surface la valeur zéro; la fonction u aura pour valeur

asymptotique $-\frac{f}{\xi}$, lorsqu'on fera croître indéfiniment le module du paramètre ξ, l'argument conservant une valeur fixe autre qu'un multiple de 2π.

M. Zaremba a pu demontrer ce théorème dans toute sa généralité, en supposant seulement que la surface (S) admet en chacun de ses points des rayons de courbure différents de zéro.

Duporcq. — Sur la théorie des abaques à alignements. (265-268).

Cosserat (*Eug.* et *Fr.*). — Sur la déformation infiniment petite d'un ellipsoïde élastique. (315-318).

Les cas dans lesquels on a résolu effectivement le problème de la déformation infiniment petite d'un corps élastique sont en très petit nombre. MM. Cosserat ont réussi à en traiter plusieurs nouveaux, par l'application des méthodes qu'ils ont indiquées (*Comptes rendus*, 12 avril 1898). Ils font connaître aujourd'hui la solution qu'ils ont obtenue pour l'ellipsoïde à trois axes inégaux.

Ricci (*G.*). — Sur les groupes continus de mouvements d'une variété quelconque à trois dimensions. (344-346).

Lovett (*E.-O.*). — Sur les invariants différentiels d'un système de $m+1$ points par rapport aux transformations projectives. (346-349).

Cotton (*Ém.*). — Sur la représentation conforme des variétés à trois dimensions. (349-351).

Deux variétés à n dimensions (x_i) et (x'_i) sont dites *applicables* si leurs éléments linéaires ds^2 et ds'^2 peuvent être rendus identiques. Elles sont *représentables conformément* l'une sur l'autre, si l'on peut déterminer les x en fonction des x' de telle sorte que ds^2 se transforme en ds'^2, multiplié par un facteur indépendant des différentielles.

M. Cotton enseigne à former un covariant cubique (à trois systèmes différents de différentielles) attaché à tout ds^2 à trois variables. L'évanouissement identique de ce covariant est la condition nécessaire et suffisante pour que la variété qui admet ce ds^2 soit applicable sur l'espace euclidien ordinaire.

Dans le cas général, ce covariant n'est pas identiquement nul. On en peut déduire une forme quadratique qui, jointe aux variables x_1, x_2, x_3, constitue ce que l'auteur appelle la *variété principale* de x_1, x_2, x_3, ds^2, au point de vue de la représentation conforme, et qui permet d'énoncer la règle suivante : *Pour que deux variétés à trois dimensions soient représentables conformément l'une sur l'autre, il faut et suffit que leurs variétés principales soient applicables*. On est ainsi ramené à un problème que Christoffel a résolu dans toute sa généralité.

Ricci (*G.*). — Sur les groupes continus de mouvements d'une variété quelconque. (360-361).

Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une famille de lignes l étant

donnée dans une variété V à n dimensions, il existe un groupe continu de mouvements des points de V qui ne produisent aucune altération dans leurs distances réciproques et qui admettent les lignes l comme trajectoires.

Padé. — Sur la convergence des réduites de la réduite exponentielle. (444-446).

Les *réduites* (p, q) d'une fonction, régulière dans le voisinage de l'origine, sont les fractions rationnelles qui, dans le voisinage de ce point, représentent cette fonction avec la plus grande approximation, les degrés de leurs numérateur et dénominateur étant respectivement inférieurs ou égaux à p et q.

L'auteur énonce les résultats suivants :

Quel que soit x, le dénominateur et le numérateur de la réduite (p, q) de la fonction e^x tendent uniformément vers les limites respectives

$$e^{-\frac{x}{\omega+1}}, \quad e^{\frac{\omega x}{\omega+1}},$$

quand p et q croissent indéfiniment, de telle sorte que le rapport $\frac{p}{q}$ tende vers la limite ω.

Dans tout intervalle, la réduite (p, q) de e^x tend uniformément vers e^x, quand l'un au moins des deux nombres p et q croît indéfiniment, le rapport $\frac{p}{q}$ tendant vers une limite ou croissant indéfiniment.

Lovett (E.-O.). — Sur une classe de transformations de contact. (480-482).

Gordan (P.). — Sur le résultant de deux équations. (539-541).

Painlevé. — Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. (541-544).

Dans des Notes précédentes (*Comptes rendus*, t. CXXVI) M. Painlevé a complètement déterminé *cinq* des six classes d'équations à points critiques fixes de la forme

$$y'' = R(y', y, x),$$

où R est rationnel en y', algébrique en y, analytique en x. Il fait connaître aujourd'hui toutes les équations de la classe restante. Ces équations sont au nombre de huit. Cinq d'entre elles s'intègrent sans peine. Pour les trois autres, l'auteur établit qu'elles ont leur intégrale générale méromorphe dans tout le plan et que cette intégrale est une transcendante uniforme, irréductible aux transcendantes abéliennes ou engendrées par les équations linéaires, et à leurs combinaisons.

Picard (Ém.). — Sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques. (579-584).

Résumé d'un Mémoire où sont posées les bases d'une théorie des intégrales doubles de seconde espèce.

Une intégrale

$$\int\int \mathrm{R}(x, y, z)\, dx\, dy,$$

où R est une fonction rationnelle de x, y, z, est dite *présenter le caractère d'une intégrale de seconde espèce* en un point simple d'une surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

si l'on peut trouver deux fonctions rationnelles U et V de x, y, z telles que la différence entre cette intégrale et l'intégrale double

$$\int\int \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right) dx\, dy$$

reste finie au voisinage du point A. Si le point A est un point multiple de $f = 0$, on définit le *caractère* de l'intégrale de seconde espèce au moyen d'une transformation birationnelle. Est dite *intégrale de seconde espèce* toute intégrale qui présente en *tous les points* de f le caractère d'une intégrale de seconde espèce. (Cette propriété est *invariante* relativement aux transformations birationnelles.)

Toutes les intégrales doubles de seconde espèce, relatives à la surface $f = 0$, peuvent se mettre sous la forme

$$\int\int \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right) dx\, dy + \int\int \frac{\mathrm{P}(x, y, z)}{f'_z}\, dx\, dy,$$

U et V étant rationnelles en x, y, z et $\mathrm{P}(x, y, z)$ étant un polynome qui s'annule sur la courbe double.

Pour toute surface algébrique il existe un certain nombre ρ d'intégrales doubles distinctes de seconde espèce

$$\mathrm{I}_1, \quad \mathrm{I}_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{I}_\rho,$$

telles que toute autre intégrale double de seconde espèce est de la forme

$$\alpha_1 \mathrm{I}_1 + \alpha_2 \mathrm{I}_2 + \ldots + \alpha_\rho \mathrm{I}_\rho + \int\int \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

les α étant des constantes. Le nombre ρ est un *invariant*.

La Note se termine par l'évaluation du nombre de conditions pour qu'une intégrale du type déjà considéré

$$\int\int \frac{\mathrm{P}(x, y, z)}{f'_z}\, dx\, dy$$

soit effectivement de seconde espèce et par deux exemples montrant la connexion intime qui existe entre la théorie des intégrales doubles de seconde espèce et l'étude des *cycles linéaires* sur une surface.

De Jonquières. — Extension du n° 162 des *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss. (596-601).

Goursat. — Sur les intégrales intermédiaires des équations du second ordre. (603-606).

Étant donnée une équation de Monge-Ampère

$$A(rt - s^2) + Br + Cs + Dt + E = 0,$$

MM. Sophus Lie et Darboux ont montré que, si elle admet deux intégrales intermédiaires distinctes

$$F(u, v) = 0,$$

u et v étant des fonctions de x, y, z, p, q et F une fonction arbitraire, cette équation peut être ramenée par une transformation de contact à l'une des deux formes canoniques

$$r = 0, \qquad s = 0,$$

suivant que ses caractéristiques sont confondues ou distinctes.

M. Goursat, après avoir indiqué les équations du second ordre à n variables qui doivent être considérées comme analogues à l'équation de Monge-Ampère, leur étend le théorème ci-dessus. Les résultats qu'il obtient peuvent être énoncés comme il suit :

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$; $P_1, P_2, \ldots, P_n$, Z, $(2n+1)$ fonctions des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $p_1, p_2, \ldots, p_n$, z, satisfaisant à l'identité

$$dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_n dX_n = \rho(dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n);$$

toute équation de la forme

$$\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0,$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont n quelconques des fonctions Z, X_i, P_k, admet deux intégrales intermédiaires distinctes. Réciproquement, toute équation du second ordre, qui jouit de cette propriété, peut être obtenue de cette façon.

Leau. — Sur les points singuliers situés sur le cercle de convergence et sur la sommation des séries divergentes. (607-609).

Le Roy. — Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor. (654-657).

Étant donnée une série entière $\sum \alpha_n z^n$, convergente dans le cercle de rayon 1, si l'on peut construire une fonction $\varphi(x)$ telle que

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x) x^n dx, \qquad \sum \alpha_n z^n = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1 - zx} dx = f(z),$$

on a les théorèmes suivants :

1° $f(z)$ coïncide à l'intérieur du cercle de convergence avec la somme de la série ;

2° $f(z)$ est holomorphe en tout point du plan, sauf peut-être pour z réel et

plus grand que 1. Si même $\varphi(x)$ est holomorphe pour $0 \leq x \leq 1$, la coupure n'est pas essentielle et $f(x)$ n'a pas d'autres points singuliers que $z = 1$ et $z = \infty$.

3° $f(z)$ n'est pas uniforme; le calcul du saut brusque subi par l'intégrale quand on franchit la coupure donne les diverses déterminations de $f(z)$.

Des conclusions analogues sont encore vraies si l'on peut mettre la série sous la forme

$$\int_0^a \varphi(x)\,\mathrm{A}(x, z)\,dx,$$

A étant holomorphe en z autour de l'origine.

Cette théorie comprend, comme cas particulier, la théorie des séries sommables de M. Borel.

Ebert et Perchot. — Une propriété d'une intégrale première des équations de la dynamique à deux variables et à potentiel homogène. (657-659).

Leau. — Sur le cercle de convergence des séries. (711-712).

L'auteur indique deux classes étendues de fonctions entières qui n'ont sur leur cercle de convergence qu'un seul point singulier.

Andrade (J.). — Sur la stabilité. (712-713).

Borel. — Sur les développements des fonctions uniformes en séries de Taylor. (751).

Énoncé d'un théorème sur les fonctions (M), ou fonctions uniformes dans tout le plan, à singularités ponctuelles :

Étant données deux fonctions (M)

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty a_n z^n, \qquad \psi(z) = \sum_0^\infty b_n z^n,$$

la fonction

$$f(z) = \sum_0^\infty \varpi(a_n, b_n)\, z^n,$$

où ϖ désigne un polynome entier en a_n et b_n, est aussi une fonction (M). Si $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont méromorphes, $f(z)$ est aussi méromorphe.

Störmer (Carl). — Sur une équation indéterminée. (752-754).

Il s'agit de résoudre en nombres entiers positifs $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$ l'équation

$$(1) \qquad \mathrm{A}\mathrm{M}_1^{x_1}\mathrm{M}_2^{x_2}\ldots\mathrm{M}_m^{x_m} - \mathrm{B}\mathrm{N}_1^{y_1}\mathrm{N}_2^{y_2}\ldots\mathrm{N}_n^{y_n} = \mathrm{C},$$

où $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_m, \mathrm{N}_1, \ldots, \mathrm{N}_n$ sont des entiers donnés et où $\mathrm{C} = \pm 1$ ou ± 2.

En s'appuyant sur un théorème relatif à l'équation de Pell, qu'il a établi

antérieurement, l'auteur prouve que *l'équation* (1), *quand elle est possible, n'admet qu'un nombre fini de solutions entières positives, que l'on peut obtenir toutes en cherchant les solutions entières positives les plus petites d'un nombre fini d'équations de Pell.*

Riquier. — Sur les systèmes différentiels dont l'intégration se ramène à celle d'équations différentielles totales. (809-810).

Un système orthonome passif étant donné, si l'ensemble des éléments arbitraires, dont la connaissance équivaut à celle des déterminations initiales de ses intégrales, ne renferme, avec un nombre quelconque de constantes, qu'une seule fonction d'un nombre quelconque de variables, la recherche, dans le système proposé, d'intégrales ordinaires satisfaisant à des conditions initiales données, se ramène à l'intégration de systèmes passifs d'équations différentielles totales du premier ordre.

Boussinesq. — Relation qui existe, dans la bicyclette roulant sur un sol horizontal, entre le mouvement de progression et le mouvement d'inclinaison. (843-848).

Cette relation est exprimée par l'équation

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b}{ah}\frac{d(V\alpha)}{dt} = \frac{g}{h}\theta - \frac{V^2\alpha}{ah},$$

où il est fait usage des notations suivantes :

g est l'accélération de la pesanteur,
a la distance, sensiblement invariable, entre les points de contact A et K des deux roues avec le sol,
h la distance du centre de gravité du système (cavalier et machine) à la base AK,
b la portion KB de base comprise entre la projection B de ce centre de gravité sur la base et le point inférieur K de la roue arrière,
V est la vitesse du point K sur sa trajectoire,
α l'angle fait sur le sol par le plan de la roue avant, avec la base KA,
θ est l'inclinaison du plan médian de la roue arrière sur la verticale, comptée positivement ou négativement suivant que cette roue penche, ou non, vers le centre de courbure de la trajectoire du point K.

Goursat. — Sur quelques types intégrables d'équations aux dérivées partielles du second ordre. (854-855).

L'auteur a déterminé toutes les équations de second ordre de la forme

$$s = f(x, y, z, p, q),$$

pour lesquelles les équations différentielles de chacun des systèmes de caractéristiques admettent une combinaison intégrable, renfermant les dérivées du second ordre.

Si l'on fait abstraction des équations intégrables par la méthode de Monge,

des équations linéaires et, plus généralement, des équations qui appartiennent à la classe étudiée par M. Moutard, les équations en question se ramènent par des transformations simples à *cinq* types, que M. Goursat énumère.

Tzitzéica. — Sur les systèmes orthogonaux. (856-857).

Humbert (G.). — Sur la multiplication complexe des fonctions abéliennes. (857-860).

Le problème de la multiplication complexe des fonctions abéliennes de genre deux peut être posé comme il suit :

Soit $\varphi(u, v)$ une fonction abélienne aux périodes

$$\begin{matrix} 0 & 1 & g & h, \\ 1 & 0 & h & g'. \end{matrix}$$

On pose

$$U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v;$$

on demande dans quel cas la fonction $\varphi(U, V)$ pourra s'exprimer rationnellement à l'aide des fonctions abéliennes en u, v admettant les périodes précédentes.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que g, h, g' vérifient quatre *équations* fondamentales à coefficients entiers, qui ne sont des identités que dans le cas de la multiplication ordinaire.

Si l'on combine ces équations de manière à en déduire des *relations canoniques,* ou relations du type

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' + \delta(h^2 - gg') = 0 \qquad (\beta^2 - 4\alpha\gamma - 4\delta\varepsilon > 0)$$

à coefficients entiers, le nombre des relations canoniques distinctes dépend de celui des relations fondamentales distinctes, et l'on peut trouver les multiplications complexes correspondant à chaque cas.

Boussinesq. — Aperçu sur la théorie de la bicyclette : équilibre du cavalier. (895-899).

Principales conséquences de l'équation établie par l'auteur dans sa dernière Note. Nous signalerons celle-ci : quand, par suite d'une circonstance accidentelle, le cycliste est brusquement écarté de sa route, il doit, pour rétablir son équilibre, *incliner le guidon vers le côté où il s'est jeté.*

Painlevé. — Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. (945-948).

L'auteur rassemble dans cette Note les résultats qu'il a obtenus sur les équations de cette espèce. Il donne le tableau des quinze types dans lesquels il les a fait rentrer toutes, avec l'indication de la façon dont leurs intégrales dépendent des constantes arbitraires, et l'énoncé de leurs singularités. Certains de ces types sont les premiers exemples connus d'équations différentielles dont on sache que l'intégrale est uniforme, sans savoir les intégrer ni les ramener à des combinaisons de quadratures et d'équations différentielles linéaires.

Le Roy. — Sur les points singuliers d'une fonction définie par un développement de Taylor. (948-950).

On considère une série entière dont le rayon de convergence est égal à l'unité

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} \alpha_n z^n.$$

Si α_n est une fonction holomorphe de n dans un angle, si petit qu'il soit, contenant à son intérieur la partie positive de l'axe Ox et si la série $f(z)$ conserve le même cercle de convergence (de rayon 1) quand on remplace n par l'affixe d'un point situé dans l'angle précédent, la série en question ne peut avoir de points singuliers que sur la partie $(+1, +\infty)$ de l'axe Ox.

La méthode des représentations conformes, qui a conduit l'auteur à ce résultat, permet d'étudier la même fonction dans tout le plan.

On a aussi le théorème suivant :

Si α_n est une fonction périodique de n, développable en série trigonométrique absolument convergente, la série $f(z)$ admet effectivement son cercle de convergence comme coupure, sauf dans deux cas particuliers.

De la Vallée-Poussin. — Sur la réduction des intégrales multiples. (950-951).

Borel (Ém.). — Sur la recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor. (1001-1003).

Expression nouvelle d'une fonction entière $f(z)$, à l'aide d'une intégrale définie où figure une fonction $\psi(x)$ régulière pour x positif et tendant, ainsi que sa dérivée, vers une valeur déterminée lorsque x tend vers l'infini à l'intérieur d'une certaine aire supposée contenir l'axe des quantités réelles. Cette formule, susceptible de nombreuses applications fort générales, établit une relation étroite entre l'étude des singularités de $f(z)$ dans tout le plan et l'étude du point singulier essentiel unique de $\psi(x)$.

Beudon (J.). — Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles réductibles aux équations différentielles ordinaires. (1003-1004).

A propos de la récente Note de M. Riquier (*voir* ci-dessus), M. Beudon rappelle qu'il a lui-même donné, sous une autre forme, le résultat de M. Riquier dans une Note des *Comptes rendus* (31 janvier 1898). Il énonce une proposition plus générale :

Le degré de difficulté de l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles ne dépend pas du nombre des variables indépendantes; il est lié seulement au degré de généralité de la solution; deux systèmes quelconques ayant le même degré de généralité exigent, pour l'intégration, des opérations analogues.

Maillet (*Edm.*). — Sur la détermination du groupe des équations numériques. (1004-1005).

Gravé (*D.*). — Sur les lignes composées de parties rectilignes. (1005-1007).

L'auteur indique un moyen de former une fonction $f(x)$ qui jouit de propriétés singulières. Elle n'a pas de dérivée pour une infinité de valeurs de x; pour les autres valeurs de x, sa dérivée est nulle. De plus, $f(x)$ est continue et varie de 0 à 1 quand x parcourt toutes les valeurs de l'intervalle (0, 1). Elle est intégrable, et il est aisé de calculer les valeurs de l'intégrale

$$\omega(x) = \int_0^x f(x)\,dx$$

pour toutes les valeurs de x. Ces valeurs sont rationnelles pour les valeurs rationnelles de x.

Les lignes déterminées par l'équation

$$y = \omega(x)$$

sont composées d'une infinité de parties rectilignes, mais elles admettent en chaque point une tangente bien déterminée qui change de direction d'une façon continue quand le point de contact parcourt la ligne.

Les surfaces définies par l'équation

$$z = \omega(x) - \omega(y)$$

jouissent de propriétés analogues : composées de parties planes, elles ont un plan tangent bien déterminé, variable d'un point à l'autre.

Riquier. — Sur les systèmes différentiels dont l'intégration se ramène à celle d'équations différentielles totales. (1194-1196).

Réponse à la Note récente de M. Beudon (*voir* ci-dessus).

Cahen (*Arm.*). — Sur les équations différentielles du premier ordre. (1196-1199).

L'auteur considère l'équation

$$(1) \qquad L y'^2 - 2 M y' + N = 0,$$

où L, M, N sont trois polynomes de degré q en y, dont les coefficients sont analytiques en x, et se propose de *déterminer toutes les équations de cette forme* dont l'intégrale ne prend qu'un nombre donné n de valeurs autour des points critiques mobiles.

Quand il en est ainsi, l'intégrale générale de (1) peut s'écrire

$$\alpha C^2 - 2\beta C + \gamma = 0,$$

où α, β, γ sont des polynomes en y, de degré n si le genre ϖ de la relation

entre les constantes intégrales est nul, et de degré $2n$ si $\varpi = 1$ (le cas $\varpi > 1$ ne peut se présenter ici).

Si l'on pose

$$M^2 - LN = P^2QR, \qquad \beta^2 - \alpha\gamma = \Pi^2 Q^3 R,$$

l'équation $R = 0$ (de degré k) définit les intégrales singulières; l'équation $Q = 0$ (de degré j) le lieu des points de rebroussement des intégrales. Les fonctions P et Π sont des degrés i et m en y, et l'on a

$$2q - 4 = 2i + j + k, \qquad 2n = 2m + 3j + k.$$

Ces nombres étant ainsi définis, la conclusion des recherches de M. Cahen peut être formulée comme il suit :

Les équations cherchées du type (1) dépendent algébriquement de $i + 4$ *fonctions arbitraires* et de *constantes arbitraires* dont le nombre est égal à $2n + k - q - 3$ dans le cas de $\varpi = 0$ et se réduit à $k - q$ lorsque $\varpi = 1$.

Guldberg (A.). — Sur les équations aux différentielles totales linéaires. (1199-1201).

L'objet de cette Note est de combler une lacune dans la théorie des équations linéaires aux différentielles totales, en étudiant le cas où une telle équation n'est pas *intégrable*. Elle peut alors admettre des intégrales singulières dont la détermination se fait *sans intégration*.

Soit

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0$$

une pareille équation.

Si une fonction $z = f(x, y)$ satisfait aux deux équations

$$P + R\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad Q + R\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

ainsi qu'à la condition qui en résulte

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{R}\right),$$

cette fonction est une solution de l'équation proposée. Comme elle est déterminée par une équation finie, il est aisé de reconnaître si elle vérifie les deux équations où figurent ses dérivées premières.

Comme exemple, l'auteur cite l'équation non intégrable

$$(z - xy - y)\,dx + (z^2 - xyz - x)\,dy + dz = 0,$$

qui admet la solution $z = xy$.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

Tome XXVII; 1899 [1].

Goursat. — Sur les équations du second ordre à n variables analogues à l'équation de Monge-Ampère. (1-34).

On sait qu'une équation de Monge-Ampère

$$(1) \qquad A(rt - s^2) + Br + Cs + Dt + F = 0,$$

où A, B, C, D, F sont des fonctions quelconques de x, y, z, p, q, peut être considérée comme provenant de l'élimination du rapport $dy : dx$ entre deux équations linéaires et homogènes en dx, dy, dp, dq. M. Goursat s'est proposé de généraliser ce type d'équations et d'étudier les équations auxquelles on parvient ainsi.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un système de n variables indépendantes, et z une fonction de ces variables. Posant

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \qquad p_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \, \partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

on se donne arbitrairement un système de n relations distinctes, linéaires et homogènes en dx, $\ldots$, dx_n, dp_1, $\ldots$, dp_n, dont les coefficients sont des fonctions quelconques de z, x_1, $\ldots$, x_n, p_1, $\ldots$, p_n. Si l'on remplace dp_i par

$$p_{i1}\, dx_1 + p_{i2}\, dx_2 + \ldots + p_{in}\, dx_n,$$

l'élimination de dx_1, $\ldots$, dx_n entre les n relations obtenues conduit à une équation du second ordre, de forme particulière, qui peut être considérée comme l'analogue, pour les fonctions de n variables, de l'équation de Monge-Ampère.

Pour former et étudier cette équation, l'auteur part d'abord de n équations résolues par rapport à dp_1, $\ldots$, dp_n,

$$(2) \qquad dp_i + \alpha_{i1}\, dx_1 + \ldots + \alpha_{in}\, dx_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Remplaçant les dp_i par leurs expressions, on est conduit à l'équation

$$(3) \qquad H = \begin{vmatrix} p_{11} + \alpha_{11} & p_{12} + \alpha_{12} & \cdots & p_{1n} + \alpha_{1n} \\ p_{21} + \alpha_{21} & p_{22} + a_{22} & \cdots & p_{2n} + \alpha_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ p_{n1} + \alpha_{n1} & p_{n2} + \alpha_{n2} & \cdots & p_{nn} + \alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Le problème de l'intégration de cette équation revient à ceci : adjoignant aux équations (2) l'équation

$$(4) \qquad dz - p_1\, dx_1 - p_2\, dx_2 - \ldots - p_n\, dx_n = 0,$$

et convenant d'appeler *multiplicité caractéristique* toute suite simplement in-

[1] Voir *Bulletin*, t. XXIII_2, p. 250.

finie d'éléments du premier ordre satisfaisant aux équations (2) et (4), *trouver une multiplicité n fois étendue d'éléments unis du premier ordre telle que par chacun de ces éléments il passe une multiplicité caractéristique située tout entière sur cette multiplicité à n dimensions.*

Le déterminant H ne changeant pas quand on permute α_{ik} et α_{ki}, l'équation (3) possède un second système de caractéristiques dont on obtient les équations différentielles en permutant α_{ki} et α_{ik} dans les équations (2). Ces deux systèmes de caractéristiques sont en général distincts; pour qu'ils soient identiques, il faut et il suffit que l'on ait $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$.

Une équation du second ordre ne peut être mise sous la forme (3) que de deux façons, si la chose est possible; c'est ce que l'auteur établit par deux méthodes, dont la seconde fournit le moyen de mettre effectivement sous la forme (3) toute équation qui en est susceptible.

Il rattache ensuite les propriétés déjà obtenues à une théorie plus générale. Soit

$$(8) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n, p_{11}, \ldots, p_{nn}) = 0,$$

une équation du second ordre de forme quelconque; si l'on pose

$$P_{ik} = \frac{\partial F}{\partial p_{ik}} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

on peut considérer la forme auxiliaire

$$(9) \qquad I = \sum_i \sum_k P_{ik} \xi_i \xi_k,$$

où $\xi_1, \xi_2, \ldots$ désignent n variables auxiliaires, et que M. Goursat a étudiée sous le nom de *forme associée* à l'équation (8) : il a prouvé notamment que, pour que l'équation (8) admette une famille de caractéristiques *linéaires*, il faut et il suffit que la forme associée soit décomposable en un produit de deux facteurs linéaires en $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Si l'on applique ce théorème à l'équation (3) dont la forme associée est un produit de deux facteurs linéaires, on retrouve, correspondant à chacun de ces facteurs linéaires, l'un des systèmes de caractéristiques de l'équation considérée.

Si l'on prenait pour point de départ, non plus des relations résolues par rapport aux dp_i, mais un système de n relations linéaires quelconques en $dx_1, \ldots, dx_n, dp_1, \ldots, dp_n$, il suffirait d'employer la transformation de Legendre généralisée pour arriver à un système d'équations *résolues* par rapport aux nouvelles différentielles dP_i. On peut donc, pour établir, parmi les propriétés des équations les plus générales analogues à l'équation Monge-Ampère, celles qui se conservent par une transformation de contact, se borner au cas où les équations différentielles des caractéristiques sont résolues par rapport aux dp_i.

Revenant, en conséquence, à l'équation (3) et à ses deux systèmes de caractéristiques

$$(A) \qquad \begin{cases} dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = 0, \\ dp_i + \alpha_{i1}\, dx_1 + \ldots + \alpha_{in}\, dx_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

$$(B) \qquad \begin{cases} dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = 0, \\ dp_k + \alpha_{1k}\, dx_1 + \ldots + \alpha_{nk}\, dx_n = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

on voit que l'étude de l'équation (3) est liée à la recherche des combinaisons intégrables de chacun de ces systèmes différentiels. Pour que dV soit une combinaison linéaire des équations (A), il faut et il suffit que V satisfasse aux n équations simultanées

$$(13) \qquad X_i(V) = \frac{dV}{dx_i} + p_i \frac{dV}{dz} + \alpha_{1i} \frac{dV}{dp_1} + \alpha_{2i} \frac{dV}{dp_2} + \ldots + \alpha_{ni} \frac{dV}{dp_n} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pareillement, pour que dU soit une combinaison linéaire des équations (B), il faut et il suffit que U satisfasse aux n équations

$$(14) \qquad Y_k(U) = \frac{dU}{dx_k} + p_k \frac{dU}{dz} + \alpha_{k1} \frac{dU}{dp_1} + \alpha_{k2} \frac{dU}{dp_2} + \ldots + \alpha_{kn} \frac{dU}{dp_n} = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

On démontre aisément que *si* $dU = 0$, $dV = 0$ *sont deux combinaisons intégrables appartenant à deux systèmes de caractéristiques différents, les fonctions* U *et* V *sont toujours en involution*. En particulier, si les deux systèmes de caractéristiques sont confondus, les deux systèmes (13) et (14) n'en font qu'un et *deux intégrales quelconques de ce système sont en involution*.

Pour que l'un des systèmes de caractéristiques admette le nombre maximum $(n+1)$ d'intégrales distinctes, il faut, mais il ne suffit pas que les deux familles de caractéristiques soient confondues.

Ici se place l'étude du cas où l'un des systèmes (13) ou (14) admet n intégrales distinctes. Si $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont des intégrales distinctes d'un de ces systèmes, toutes les intégrales de l'équation

$$(B) \qquad F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

où F est une fonction arbitraire, satisfont, sauf peut-être les intégrales singulières, à l'équation du second ordre (3). Réciproquement, toute équation du second ordre qui admet une *intégrale intermédiaire* de la forme (15) où F désigne une fonction arbitraire est nécessairement de la forme (3). La méthode précédente fournit *toutes* les intégrales intermédiaires de l'équation considérée.

Pour manifester encore d'autres analogies entre les équations de Monge-Ampère et celles qu'il étudie, M. Goursat examine ensuite les équations (3), pour lesquelles l'un des systèmes de caractéristiques admet $(n+1)$ combinaisons intégrables distinctes; il montre que, dans ce cas, on peut toujours déduire l'intégrale générale de l'intégrale complète, comme pour les équations à deux variables indépendantes.

Quand les deux systèmes de caractéristiques sont distincts, si les deux systèmes linéaires (13) et (14) admettent respectivement n intégrales distinctes $(u_1, u_3, \ldots, u_n)$ et $(v, v_2, \ldots, v_n)$ de telle façon qu'il existe pour l'équation du second ordre deux intégrales intermédiaires distinctes

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \qquad \Phi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0,$$

dépendant chacune d'une fonction arbitraire de $(n-1)$ variables, le problème de l'intégration revient à *déterminer deux groupes*

$$G, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n,$$
$$G', \quad v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n.$$

composés respectivement de n fonctions distinctes, tels que deux fonctions appartenant à deux groupes différents soient toujours en involution. L'auteur parvient à la solution de ce problème en s'appuyant sur les travaux de Sophus Lie relatifs aux groupes, et obtient en tout $(n-1)$ *formes canoniques essentiellement distinctes* pour les deux groupes G et G'. A chacune de ces formes canoniques correspond une forme canonique d'équation du second ordre, admettant deux intégrales intermédiaires distinctes. On peut obtenir, sous forme explicite, l'intégrale générale de chacune de ces équations.

L'énumération que fait M. Goursat des diverses formes canoniques pour $n=3$, 4 et 5, met en évidence cette loi générale que, parmi les $(n-1)$ formes canoniques d'équation à n variables indépendantes figurent les $(n-2)$ formes canoniques d'équation à $(n-1)$ variables. Ainsi, connaissant l'intégrale générale d'une équation à $(n-1)$ variables indépendantes, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, pour avoir celle de l'équation canonique correspondante à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il suffit d'ajouter la variable x_n, à titre de paramètre, dans les deux fonctions arbitraires qui figurent explicitement dans l'intégrale générale de l'équation à $(n-1)$ variables.

Revenant maintenant à un système de variables quelconques, on peut résumer comme suit les résultats obtenus : *Soient* $X_1, X_2, \ldots, X_n, P_1, P_2, \ldots, P_n, Z$ *des fonctions des* $(2n-1)$ *variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, z$ *satisfaisant à l'identité*

$$dZ - P_1\,dX_1 - \ldots - P_n\,dX_n = \rho(dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n);$$

toute équation de la forme

$$\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0,$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *sont n quelconques des fonctions* Z, X_i, P_k *admet deux intégrales intermédiaires distinctes. Réciproquement, toute équation de second ordre qui jouit de cette propriété peut être obtenue de cette façon.*

Le Mémoire se termine par l'étude succincte des équations *linéaires* du second ordre, *à plusieurs variables indépendantes,* auxquelles peut être étendue la célèbre méthode de Laplace. Considérons une équation du second ordre linéaire, qui puisse s'écrire

$$X[Y(z)] + aX(z) + bY(z) + cz = M,$$

où

$$X(f) = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$$Y(f) = \beta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \beta_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

les a, b, c, M, α_i et β_i étant des fonctions des seules variables indépendantes. Pour que l'on puisse lui appliquer la méthode de Laplace, il faut et il suffit que l'on ait une identité de la forme

$$X[Y(z)] - Y[X(z)] = \lambda X(z) + \mu Y(z),$$

ce que l'on reconnaîtra aisément, la *forme associée* à cette équation

$$I = \sum \frac{\partial F}{\partial p_{ik}} \xi_i \xi_k$$

devant alors être décomposable en deux facteurs linéaires

$$I = (\alpha_1 \xi_1 + \ldots + \alpha_n \xi_n)(\beta_1 \xi_1 + \ldots + \beta_n \xi_n).$$

De cette décomposition même résulte la connaissance des fonctions α_i et β_i. Alors les vérifications subséquentes n'exigent plus que des calculs tout à fait élémentaires.

Enfin, M. Goursat démontre que toute équation du second ordre qui satisfait aux conditions précédentes peut être ramenée, par un changement de variables, à la forme même de Laplace :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'_1\, \partial x'_2} + a_1 \frac{\partial z}{\partial x'_1} + b_1 \frac{\partial z}{\partial x'_2} + c_1 z = M_1,$$

les variables $x'_3, \ldots, x'_n$ ne figurant que dans les coefficients a_1, b_1, c_1 et M_1.

Hadamard. — Sur les conditions de décomposition des formes. (34-47).

Bourlet. — Étude théorique sur la bicyclette. (47-67, 76-96).

Le présent Travail est une reproduction partielle d'un Mémoire plus développé que l'auteur a déposé, en juin 1897, pour le concours du prix Fourneyron, et que l'Académie des Sciences a couronné en décembre 1898. Il se compose de deux parties. Dans la première est établie l'équation différentielle du mouvement relatif d'une machine dont le guidon est tenu à deux mains par le cycliste; dans la seconde, on se sert de cette équation pour étudier les conditions d'équilibre.

Première Partie. — Une bicyclette se compose de trois parties distinctes : le *cadre*, la *roue arrière* (ou roue motrice), la *direction* (ensemble formé par la roue d'avant, ou roue directrice, sa fourche et le guidon).

Le cadre présente un plan de symétrie qui est appelé *plan moyen* de la machine. Les deux roues sont considérées comme des cercles mathématiques indéformables; le plan de la roue d'arrière coïncide constamment avec le plan moyen; celui de la roue d'avant est variable par rapport au plan moyen et ne coïncide avec lui que quand le guidon est *droit;* le sol est supposé plan.

Dès que l'on tourne le guidon, le point de contact B de la roue d'avant avec le sol sort du plan moyen. Mais en fait, dans toutes les machines actuelles, ce point de contact s'écarte si peu de la trace du plan moyen sur le sol que l'on peut négliger cet écart; d'ailleurs on suppose que, le guidon étant droit, le point B soit situé sur l'axe de rotation de la direction; il en sera toujours très proche et la longueur comprise entre B et le point de contact A de la roue d'arrière, étant sensiblement constante, pourra être appelée la *longueur* de la machine. Alors le mouvement relatif de la machine par rapport à son plan moyen est un mouvement de rotation autour de cette trace, confondue avec la droite AB.

Pour l'étudier, il faut déterminer en fonction du temps l'angle β que fait à chaque instant le plan moyen avec la perpendiculaire au sol. On suppose, dans l'établissement de l'équation différentielle à laquelle satisfait β, que le cycliste ne fait aucun mouvement du torse, et l'on néglige les mouvements des jambes, ce qui est assez légitime, vu leur faible amplitude et leur symétrie. Il

faut, d'après la théorie du mouvement relatif, écrire qu'il y a équilibre, en vertu des liaisons, entre les forces centrifuges, les forces centrifuges composées, les forces d'inertie et la pesanteur, ou que la somme des moments de ces diverses forces par rapport à la droite AB est nulle.

Le cycliste et sa machine forment un tout composé de trois parties :

1° L'ensemble du cavalier, du cadre et de la fourche directrice qui, d'après les hypothèses faites, a une forme invariable;

2° La roue motrice;

3° La roue directrice.

M. Bourlet calcule séparément les moments des quatre catégories de forces précitées, pour chacune de ces trois parties, et n'a plus qu'à égaler leur somme à zéro. On met ainsi de l'ordre dans un calcul qui est extrêmement complexe, en même temps que l'on sépare dans l'équation finale les différents groupes de termes, d'après leur signification et leur provenance.

L'équation du second ordre à laquelle arrive l'auteur contient la solution du problème suivant :

Le cycliste faisant décrire à sa machine un chemin connu, à une allure donnée, quel sera le mouvement en inclinaison du plan moyen par rapport au sol?

Mais elle contient un si grand nombre de termes, qu'on ne peut l'employer sans l'avoir simplifiée. On est conduit, tout d'abord, à ne conserver que le premier de chacun des douze groupes de termes; puis d'autres simplifications conduisent, pour le mouvement sur un sol horizontal, à l'équation *approchée*

$$M(l^2+k^2)\frac{d^2\beta}{dt^2} = Mlg\sin\beta - \left(Ml + \frac{E}{r} + \frac{E'}{r'}\right)\frac{v^2}{\rho}\cos\beta - Mld\cos\beta\,\frac{d}{dt}\,\frac{v}{\rho},$$

où les lettres ont les significations suivantes :

M est la masse totale du cavalier et de la machine;

Mk^2 le moment d'inertie de cette masse totale par rapport à un axe parallèle à AB et passant par son centre de gravité G;

l la distance de G à la base AB;

d une longueur sensiblement égale à la distance de G à une perpendiculaire à la base AB, menée par A dans le plan moyen;

v est la vitesse du point A sur sa trajectoire, et ρ le rayon de courbure de cette trajectoire.

Enfin, les termes en $\frac{E}{r}$ et $\frac{E'}{r'}$ proviennent de la rotation des roues.

Dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, le 28 novembre 1898, M. Boussinesq a établi une équation qui ne diffère de la précédente que par l'absence de ces deux termes. Les hypothèses simplificatives auxquelles il a recours reviennent, au fond, à ne pas tenir compte du mouvement des roues et de la direction. Posées *a priori*, elles se trouvent justifiées par le rapprochement précédent. Mais il y a plus : on voit que, si l'on tient compte de la rotation des roues, l'équation différentielle conserve la même forme que celles de M. Boussinesq. Par conséquent, les résultats intéressants que M. Boussinesq a tirés de son équation, pour les petites oscillations du plan moyen dans la marche rectiligne, subsistent encore lorsque l'on tient compte de la rotation des roues.

L'équation ci-dessus se simplifie encore quand on suppose que le cycliste tourne le guidon assez lentement pour rendre négligeables les variations de rapport $v:\rho$. On trouve alors

$$\frac{l^2+k^2}{l}\,\frac{d^2\beta}{dt^2} = g\sin\beta - \frac{v^2}{\rho}\cos\beta,$$

ce qui est l'équation dont M. Bourlet a fait usage dans son *Nouveau Traite des bicycles et bicyclettes.*

Deuxième Partie. — Il y a lieu de supposer que *la vitesse v de la machine* est constante, parce que les conditions théoriques de variation de vitesse qui suffiraient à assurer l'équilibre, en vertu de l'équation de M. Bourlet, seraient pratiquement irréalisables. L'équilibre d'une bicyclette en marche se définit ainsi :

Une bicyclette est en équilibre lorsqu'elle ne glisse pas latéralement, c'est-à-dire lorsque l'angle β satisfait à la double inégalité

$$-f < \operatorname{tang}\beta < +f,$$

f étant le *coefficient de frottement de glissement latéral.*

Deux cas peuvent alors se présenter :

1° L'équation du mouvement est vérifiée par une valeur *constante* de β : pour l'équilibre, il suffit alors que β ait cette valeur constante et satisfasse à l'inégalité ci-dessus; on dira alors qu'il y a *équilibre parfait.*

2° S'il n'existe pas d'intégrale de l'équation du mouvement qui se réduise à une constante, le plan moyen oscillera entre deux positions extrêmes; on dit alors que l'équilibre est *imparfait.*

Voici les principaux résultats auxquels l'auteur est conduit par l'examen de ces deux cas :

Il ne peut y avoir *équilibre parfait sur un sol horizontal* que si la trajectoire (T) du point A est convenablement choisie. En écrivant que l'équation du mouvement, donnée plus haut, est vérifiée, on obtient une équation du premier ordre dont l'intégrale générale est

$$\frac{1}{\rho} = \frac{g\operatorname{tang}\beta}{Qv^2} - He^{-\frac{Q}{d}s},$$

Q désignant la constante

$$1 - \frac{1}{Ml}\left(\frac{E}{r} + \frac{E'}{r'}\right),$$

H la constante d'intégration et s l'arc de la courbe (T), que l'auteur appelle *courbe d'équilibre parfait.*

De là, trois cas à distinguer :

1° $H = 0$; alors $\frac{1}{\rho}$ est constant; (T) est un cercle ou une droite.

2° $H \neq 0$ et $\beta \neq 0$; la courbe (T) est une spirale dont l'équation intrinsèque peut être écrite

$$\frac{1}{\rho} = \frac{g\operatorname{tang}\beta}{Qv^2}\left(1 - e^{-\frac{Q}{d}s}\right)$$

et qui tend rapidement vers un cercle asymptote.

3° $H \neq 0$ et $\beta = 0$; alors (T) est asymptote à une droite.

Dans ces deux derniers cas, la détermination de (T) s'achève par des quadratures. Au point de vue de la forme, il n'y a que *trois* familles de courbes (T), chacune à un paramètre β, savoir les cercles (ou droites) et les deux familles de spirales fournies par la dernière équation ci-dessus.

On démontre que, *étant donnée dans le plan du sol une courbe quelconque et un point* A, *on peut toujours trouver une courbe d'équilibre parfait passant par ce point* A *et ayant en ce point un contact du troisième ordre avec la courbe donnée.*

A signaler la spirale d'équilibre parfait

$$\frac{1}{\rho} = \frac{g \tang \beta}{Q v^2}\left(1 - e^{-\frac{Q}{d}s}\right)$$

qui présente un intérêt tout spécial dans la théorie du virage. Un petit arc de cette courbe, à partir de $s = 0$, se confond avec celui d'une courbe pour laquelle la courbure est proportionnelle à l'arc : or, une telle courbe est l'arc de raccordement de la droite au cercle, lorsque le cycliste effectue un virage. Il n'a qu'à provoquer, par un mouvement brusque du buste, l'inclinaison du plan moyen : il décrit alors une portion de spirale d'équilibre parfait, jusqu'à ce qu'il ait atteint le rayon de courbure du virage circulaire à parcourir.

M. Bourlet insiste, à cause de son importance toute spéciale, sur le cas du cercle et démontre cette proposition :

Le point de contact de la roue arrière décrivant, sur un sol horizontal, un cercle de rayon ρ, *à la vitesse constante* v, *il suffit, pour qu'il y ait équilibre, que l'inclinaison* α *du plan moyen sur le sol reste constante et que l'on ait* (*avec une erreur relative plus petite que* 0,03)

$$\tang \alpha = \frac{\rho g}{v^2} > \frac{1}{f};$$

la nature de cet équilibre est instable.

Ce n'est donc que grâce à la mobilité du guidon, et par suite en modifiant légèrement à chaque instant sa trajectoire, que le cycliste parvient à garder l'équilibre.

Théoriquement le maintien de l'équilibre par le guidon est possible; mais *pratiquement* cela ne suffit pas; il faut, pour que l'équilibre soit atteint, le guidon étant en mains, que la machine s'équilibre d'elle-même dans une certaine mesure lors du *lâche-mains.*

Pour l'*équilibre parfait sur un sol incliné,* les résultats sont analogues aux précédents, à cela près toutefois que les courbes d'équilibre parfait dépendent, quant à leur forme, non plus d'un seul paramètre, mais de deux. Ici encore, *étant donnés dans le plan du sol une courbe quelconque et un point* A *sur cette courbe, il existe toujours une courbe d'équilibre parfait passant en* A *et ayant, en ce point, un contact du troisième ordre avec la courbe donnée.*

Relativement à l'*équilibre imparfait,* on pourrait croire qu'il s'agit de *faire décrire au point de contact de la roue motrice un chemin donné à l'avance.* C'est généralement impossible, si l'on suppose, ce qui a lieu dans la réalité, que la vitesse v de la machine soit constante.

En effet, dès qu'on se donne la trajectoire (T) de la roue motrice, la vitesse v et les conditions initiales, l'intégrale β de l'équation du mouvement est parfai-

tement déterminée et ne reste pas comprise entre deux limites φ et $-\varphi$; on peut d'ailleurs choisir la trajectoire (T) de manière que β soit *telle fonction qu'on voudra* de t. Ainsi :

En marche uniforme, un cycliste ne peut pas, en général, faire décrire exactement et indéfiniment à la roue motrice un chemin arbitraire donné à l'avance. Cela n'est possible que dans un temps limité, au bout duquel la chute est inévitable, à moins que le cycliste ne modifie sa route.

Il convient dès lors de poser le problème autrement :

Supposant toujours la vitesse v *constante, soit* (C) *une courbe tracée sur le sol. Portons sur les normales à* (C), *de part et d'autre du pied, des longueurs égales à une petite longueur* δ *donnée à l'avance; nous obtiendrons ainsi deux courbes parallèles* (C') *et* (C''), *limitant une bande, un sentier de largeur* 2δ, *ayant la courbe* (C) *pour ligne médiane. Trouver une courbe d'équilibre comprise tout entière à l'intérieur du sentier ainsi défini.*

Ainsi présentée, la question aura vraisemblablement une solution dans le cas général; mais, au point de vue pratique, elle est peu intéressante, car tout cycliste habile réalise l'équilibre par de légers mouvements du buste, tandis que tous les calculs précédents reposent sur l'hypothèse où le buste reste immobile par rapport au cadre.

Nous citerons le théorème final :

Lorsqu'une bicyclette est en équilibre imparfait, l'angle β *est, à chaque instant, très sensiblement égal à l'angle d'équilibre qui correspond à la courbe d'équilibre parfait osculatrice, au point de contact de la roue motrice avec le sol, à la trajectoire de ce point.*

Humbert (*G.*). — Sur une interprétation géométrique de l'équation modulaire. (69-70).

L'auteur rappelle un théorème relatif aux courbes unicursales qu'il a établi dans le Volume précédent du *Bulletin* de la Société, en l'appuyant sur la théorie de la transformation des fonctions elliptiques, et l'applique aux polygones de Poncelet.

Il arrive ainsi à l'énoncé suivant :

Parmi les polygones de n *côtés inscrits à une conique* C *et circonscrits à une autre conique* C', *il en est quatre qui ont pour sommet ou pour côté un point commun ou une tangente commune à* C *et à* C'; *les centres des moyennes distances des sommets des polygones considérés sont sur une conique* C'' : *le rapport anharmonique, sur la conique* C'', *des centres des moyennes distances correspondant aux quatre polygones précédents et le rapport anharmonique des quatre points d'intersection de* C *et de* C', *sur la conique* C, *sont liés par l'équation modulaire relative à la transformation d'ordre* n.

Humbert (*G.*). — Sur les polygones de Poncelet. (70-71).

Le centre harmonique des sommets d'un polygone quelconque par rapport à une droite donnée est un point fixe, si la droite coupe en deux sommets doubles la conique circonscrite C;

ou, en langage non projectif :

Le centre des moyennes distances des sommets d'un polygone quelconque est un point fixe, si les deux points à l'infini sur la conique C *sont des sommets doubles.*

Blutel (E.). — Sur une propriété des trajectoires obliques d'une famille de géodésiques. (72).

Les courbes ($u =$ const. et $v =$ const.) d'une surface qui se coupent sous un angle constant et ont leurs courbures géodésiques dans un rapport constant en tous les points de la surface, sont des trajectoires obliques d'une même famille de courbes parallèles, et réciproquement. Si l'on considère les triangles curvilignes formés sur la surface par deux courbes C_u et C'_v avec les courbes parallèles associées, les longueurs des côtés portés par C_u et C'_v sont proportionnelles aux sinus des angles opposés.

Andrade. — Sur quelques paradoxes de Statique non euclidienne. (73-75).

Bioche (Ch.). — Mémoire sur les surfaces du troisième ordre qui admettent pour ligne asymptotique une cubique gauche. (96-113).

Introduction. — J'ai montré (*Bull. Soc. Math. de France*, 1898) que, si l'on appelle *conjugués par rapport à une cubique gauche* des points conjugués harmoniques par rapport aux extrémités d'une corde de cette cubique, toute surface du troisième ordre qui admet comme ligne asymptotique une cubique gauche peut se définir comme le lieu des conjugués des points d'un plan par rapport à cette cubique, ou le lieu des pôles du plan par rapport aux quadriques passant par cette cubique; j'appelle une pareille surface *conjuguée du plan.*

En général, le plan coupe la cubique en trois points distincts; ces points sont alors des points doubles, et la surface contient les tangentes à la cubique en ces points; réciproquement, toute surface du troisième ordre contenant une cubique gauche, possédant sur cette cubique trois points doubles et contenant les tangentes en ces points, admet la cubique comme asymptotique.

J'étudie dans ce Mémoire la surface dont je viens de parler, et je complète cette étude en considérant les surfaces correspondant : 1° au cas où le plan coupe la cubique en des points dont deux sont confondus; 2° au cas où le plan est osculateur à la cubique.

I. *Équation et propriétés caractéristiques de la surface générale.* — Une surface du troisième ordre à trois points doubles peut être représentée par l'équation

$$xyz + (ax + by + cz)t^2 + dt^3 = 0;$$

elle contient, en général, douze droites :

1° Trois dans le plan $t = 0$ passant chacune par deux des points doubles;

2° Trois dans le plan

$$ax + by + cz + dt = 0,$$

qui sont les intersections de ce plan par les faces du tétraèdre de référence autres que celle qui contient les points doubles;

3° Six droites situées sur la quadrique

$$bcyz + cazx + abxy + (ax + by + cz + dt)dt + abct^2 = 0.$$

Si la surface du troisième ordre contient une cubique passant par les points doubles ainsi que les tangentes à cette cubique en ces points, les tangentes en question appartiennent au dernier groupe de droites. En exprimant que trois de ces droites sont tangentes à une cubique gauche et excluant le cas où la surface aurait *quatre* points doubles on réduit l'équation générale à

$$xyz + \lambda(x + y + z)t^2 = 0.$$

Les surfaces représentées par cette équation admettent *deux* cubiques asymptotiques Γ et Γ', qui sont sur une même quadrique.

On peut caractériser une surface du troisième ordre, conjuguée d'un plan, par les deux propriétés suivantes :

1° *La surface a trois points doubles, par chacun desquels passent deux droites non situées dans le plan des points doubles;*

2° *Les plans de ces couples de droites se coupent sur la surface.*

Voici encore un énoncé plus simple :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface du troisième ordre à trois points doubles admette une cubique gauche comme asymptotique est que cette surface possède une section plane, composée de trois droites concourantes, ne passant pas par les points doubles.

Une surface de cette nature est déterminée quand on connaît les points doubles et trois droites qui, passant respectivement par ces trois points, ne se rencontrent pas. On peut alors définir simplement les douze droites de la surface et les deux cubiques asymptotiques.

II. *Représentation sur le plan.* — La correspondance qui existe entre les points de la surface et ceux du plan dont elle est la conjuguée donne immédiatement une représentation de la surface sur ce plan. M. Bioche détermine successivement les images des droites de la surface, des douze coniques qui passent par chacun de ses points, et des cubiques tracées sur la surface, en particulier de ses deux cubiques asymptotiques; il indique un second mode de représentation pour les cubiques.

III. *Systèmes de cubiques gauches.* — L'emploi de ces deux modes de représentation permet d'énumérer les systèmes de cubiques tracées sur la surface (par deux points quelconques de la surface passent vingt-deux cubiques), d'étudier les propriétés de ces cubiques ainsi que de leurs projections; d'où ce théorème :

La condition pour qu'un faisceau de coniques circonscrites à un triangle soit constitué par les projections d'une cubique gauche est que le pôle d'un des côtés du triangle, par rapport à chaque conique du faisceau, soit sur une conique circonscrite au triangle.

On reconnaît en outre que toute surface ayant une cubique asymptotique

(et par suite en ayant deux) est la transformée homographique d'une surface qui peut être considérée, de deux façons différentes, comme surface de translation.

IV. *Surfaces particulières.* — Dans cette dernière partie, l'auteur étudie les deux cas particuliers visés à la fin de l'Introduction :

1° Si un plan coupe une cubique en un point et la touche en un autre, la surface conjuguée du plan par rapport à la cubique a deux points doubles, dont l'un doit être considéré comme résultant de la coïncidence de deux points doubles. Elle ne présente que *quatre* droites et n'admet qu'*une seule* cubique asymptotique.

Il est à remarquer que cette surface particulière admet seulement quatre cubiques gauches passant par deux points, la surface générale en ayant vingt-deux, et la surface plus particuliere qui va être étudiée en admettant une double infinité.

2° La surface conjuguée d'un plan osculateur à une cubique n'est autre que la surface réglée à directrices confondues, connue sous le nom de *surface de Cayley*. Toute surface de Cayley est susceptible de la définition précédente.

On a immédiatement toutes les coniques ainsi que toutes les cubiques de la surface et l'on reconnaît qu'on peut faire passer une cubique par *quatre* points de la surface. Cela tient à ce qu'un cône du second ordre passant par la directrice et une génératrice coupe la surface suivant une cubique.

De Montcheuil. — Étude sur les surfaces réelles définies par l'équation $\frac{\partial^4\xi}{\partial u^2\partial u_1^2} = 0$. (114-129).

Dans un Travail précédent (*Bull. Soc. Math. de France*, 1898), l'auteur s'était occupé des surfaces définies par l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^4\xi}{\partial u^2\,\partial u_1^2} = 0,$$

où ξ est le terme indépendant de x, y, z dans l'équation du plan tangent en coordonnées symétriques u, u_1. Il avait montré que l'on obtient la congruence normale à ces surfaces en menant une droite parallèle à l'intersection de deux plans roulant sur deux développables isotropes et passant par le milieu du segment qui joint les points de contact de ces plans avec deux courbes tracées respectivement sur les développables (segment *isotrope*).

Le présent Mémoire a pour objet de considérer à part les surfaces *réelles* et de déduire du mode de génération précédent un mode particulier à celles-ci, où n'entrent que des éléments *réels*.

Au préalable, l'auteur, afin de préparer la solution qu'il a en vue, présente sous deux aspects nouveaux sa méthode *générale* de construction, qui donne aussi bien des surfaces imaginaires que des surfaces réelles.

I. *Si l'on imprime à un système de trois plans* P, P′, P″ *aux intersections parallèles* I, I′, I″, *un mouvement tel que les deux premiers plans* P, P′ *roulent respectivement sur deux développables isotropes, le troisième plan* P″ *passant constamment par le segment de droite qui joint les points de contact des plans* P, P′ *avec deux courbes respectivement tracées sur chaque développable isotrope, toute droite du plan* P″ *parallèle aux trois intersections, et dans un rapport de distances constant avec les deux droites* I, I′,

constitue l'élément le plus général de la congruence normale aux surfaces définies par l'équation (1).

II. *Soit un faisceau de plans mobile, dépendant de deux variables, tel que deux de ses plans roulent sur deux développables isotropes; soient encore deux courbes tracées respectivement sur ces développables; dans tout plan du faisceau, partageant dans un rapport constant le segment qui relie les points de contact des courbes aux plans tangents, il existe une droite parallèle à l'intersection du faisceau et normale à une famille de surfaces définies par l'équation* (1); *cette droite est celle qui passe par le point d'intersection du plan et du segment.*

Pour aborder le cas des surfaces réelles, il convient de rappeler que l'intégrale générale de l'équation (1) est

$$\xi = A u_1 - A_1 u + B - B_1,$$

où A, B sont des fonctions arbitraires de u, et A_1, B_1 des fonctions arbitraires de u_1; pour la réalité des surfaces correspondantes, il faut et il suffit que les quantités

$$u, \quad A, \quad B; \qquad u_1, \quad A_1, \quad B_1$$

soient respectivement conjuguées, ce qu'on supposera dorénavant. Il s'agit de rattacher ces surfaces à un système de plans mobiles, analogue à celui qui a été considéré dans le cas général, mais dont tous les éléments soient réels.

A cet effet, l'auteur étudie le faisceau de plans dont l'intersection commune est celle des deux plans isotropes représentés par les équations

$$(1 - u^2)x + i(1 + u^2)y - 2uz - 2(A - uB) = 0,$$
$$(1 - u_1^2)x - i(1 + u_1^2)y - 2u_1 z - 2(A_1 - u_1 B_1) = 0;$$

c'est le système des *plans orthogonaux* de ce faisceau qui joue, par rapport aux surfaces réelles, le rôle précédemment dévolu aux *plans isotropes* par rapport aux surfaces quelconques. On a, en effet, ce théorème :

Quand deux plans d'un faisceau mobile roulent respectivement sur deux développables isotropes conjuguées, si l'on égale à zéro les parties réelles et les parties imaginaires des premiers membres des équations de ces plans, on obtient un système orthogonal du faisceau; ses deux plans roulent sur deux surfaces dont les points de contact respectifs sont sur une ligne droite, bissectrice de l'angle formé par une direction fixe et par l'intersection du faisceau.

Cette corde des contacts est appelée par l'auteur *segment orthogonal*, à raison de son analogie avec la corde précédemment désignée sous le nom de *segment isotrope*. Ces deux droites rencontrent chaque développable sur la même génératrice et forment, par suite, avec ces deux génératrices un quadrilatère.

Après avoir établi l'existence d'une droite parallèle à l'intersection du faisceau considéré et coupant le segment isotrope en un point dont le rapport des distances aux deux extrémités est constant, M. de Montcheuil rattache cette droite à un système d'éléments géométriques *réels*, ce qui fournit une première solution du problème, puisqu'une telle droite est (proposition II) l'élément d'une congruence normale aux surfaces définies par l'équation (1).

On peut rattacher à la proposition I un autre mode de construction des surfaces cherchées.

Enfin l'auteur enseigne à déterminer un système orthogonal dont les deux plans coupent le segment isotrope en deux points dont les rapports de distance aux extrémités du segment aient une valeur constante. Si, par le point de rencontre de ces plans avec le segment isotrope, on mène une parallèle à l'intersection du faisceau, cette droite partagera le segment isotrope dans un rapport constant et sera, par suite, normale à une famille de surfaces réelles, ce qui fournit encore une nouvelle solution du problème.

La considération de ces derniers couples de plans orthogonaux conduit à des formules intéressantes qui généralisent la théorie des surfaces *associées* et des surfaces *adjointes* à une surface minima, due à Ossian Bonnet.

Lémeray. — Sur les équations fonctionnelles qui caractérisent les opérations associatives et les opérations distributives. (130-137).

Généralisation des résultats obtenus par l'auteur dans un Travail inséré au *Bulletin* de la Société en 1898.

Les fonctions générales puissances-P, puissances-p, etc., considérées dans ce Travail, sont appliquées ici aux solutions de quelques équations fonctionnelles. Ainsi l'équation d'Abel

$$\text{(I)} \qquad \varphi f(x, y) = \varphi x + \varphi y$$

est vérifiée par les fonctions logarithmes-l. Les puissances-p satisfont à l'équation fonctionnelle de certaines fonctions admettant un théorème d'addition

$$\text{(III)} \qquad \Xi(u + v) = f(\Xi u, \Xi v).$$

M. Lémeray dit que la fonction ψ est *distributive* par rapport à la fonction f si l'on a

$$\text{(V)} \qquad \psi f(x, y) = f(\psi x, \psi y).$$

Ainsi la multiplication est distributive par rapport à l'addition, l'élévation aux puissances est distributive par rapport à la multiplication. Chercher l'opération ψ distributive par rapport à une opération donnée f, c'est résoudre par rapport à ψ l'équation (V). Pour que ce soit possible, il faut que f soit un produit-M (ou un quotient-D); alors la fonction distributive cherchée est une puissance-p.

Les fonctions employées par l'auteur permettent d'exprimer les solutions de certaines équations fonctionnelles, mais n'indiquent pas les calculs à faire pour obtenir leurs valeurs. Aussi est-il nécessaire de donner des expressions limites permettant de les calculer : c'est ce que M. Lémeray fait en réservant les conditions de validité des formules qu'il donne.

Son Travail se termine par une application consistant dans la résolution des équations (I), (III) et (V) dans le cas où la fonction f est de la forme

$$\frac{C^2(x+y) + 2Cxy}{C^2 - xy}.$$

Duport (H.). — Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie. (138-141).

Helmholtz a proposé de prendre pour base de la Géométrie à n dimensions les hypothèses suivantes :

I. Existence d'une fonction des coordonnées des deux points (*distance*) conservant sa valeur dans tout *mouvement*.

II. Possibilité de fixer $n-1$ points du système, le système restant encore mobile (*rotation*).

III. *Monodromie,* ou retour du système à sa position primitive par une rotation suffisamment prolongée.

En partant de ces principes, Helmholtz a prouvé que l'élément de la distance est la racine carrée d'une forme quadratique par rapport aux différentielles des coordonnées. « Je ferai voir, dit M. Duport, que l'hypothèse II est suffisante pour que la question proposée puisse trouver dans l'Analyse sa solution complète. »

Dans cette première Note, il s'en tient au cas d'un espace à *deux* dimensions, et cherche la relation qui doit exister entre les distances x, y, z, t, u, v de quatre points pris deux à deux. Il met cette relation, de quatre manières différentes, sous la forme d'une équation ayant pour second membre zéro et pour premier membre une somme de trois fonctions (inconnues) de trois variables chacune. L'étude de ce système fonctionnel est renvoyée à un Travail ultérieur.

De Polignac. — Sur le théorème de Tait. (142-145).

Duporcq (E.). — Sur une généralisation de la transformation de Lie. (146-147).

La transformation de Lie associe à tout point de l'espace une droite isotrope, de telle sorte qu'aux points d'une droite quelconque correspondent les génératrices d'une demi-sphère.

M. Duporcq considère, au lieu du complexe des droites isotropes, celui des droites qui touchent une même quadrique S; il montre qu'on peut associer à tout point de l'espace une droite tangente à S, et cela de telle sorte qu'aux points d'une droite quelconque correspondent les génératrices d'une demi-quadrique circonscrite à la quadrique fixe S.

Dans cette transformation, toute tangente à S correspond à *deux* points de l'espace, tandis que, dans la transformation de Lie, il n'existe qu'*un* point auquel corresponde une droite isotrope déterminée; tout élément de contact correspond à *quatre* éléments de contact différents.

Si l'on suppose que S est une sphère, à toute droite Δ on fait correspondre deux sphères dont chacune correspond à Δ par une transformation de Lie.

Painlevé. — Sur le calcul des intégrales d'un système différentiel par la méthode de Cauchy-Lipschitz. (149-152).

Résumé d'une étude comparative sur la méthode de Cauchy-Lipschitz, sur

celle des approximations successives de M. Picard et sur la méthode déduite du calcul des limites.

La première de ces méthodes est la plus simple. Elle permet aussi d'obtenir tous les résultats auxquels conduisent les autres méthodes. Mais son avantage le plus remarquable, c'est qu'*elle définit la solution dans tout l'intervalle où elle est continue et définie sans ambiguïté par les conditions initiales,* tandis que la méthode du calcul des limites exige que les équations proposées soient analytiques et ne donne des séries convergentes que dans l'intervalle ($x_0 - \mathrm{R}$, $x_0 + \mathrm{R}$), le point x_0 étant le centre du cercle à l'intérieur duquel la solution est *holomorphe* et R le rayon de ce cercle. Quant à la méthode de M. Picard, on ne connaît encore aucun moyen de déterminer son intervalle *exact* de convergence : cet intervalle est, suivant les cas, égal à l'intervalle maximum, ou inférieur à l'intervalle attaché au calcul des limites, ainsi qu'il est montré par un exemple.

Lecornu (*L.*). — Sur certaines équations aux différences mêlées. (153-160).

L'auteur étudie d'abord l'équation

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = pf'(x),$$

dans laquelle h et p désignent deux constantes réelles données. Par la substitution $f(x) = e^{\frac{sx}{h}}$, on obtient la relation

$$e^{s} - e^{-s} = 2ps,$$

qui doit être vérifiée par la nouvelle constante s, et qui met en évidence diverses solutions : courbes logarithmiques, chaînette, droites, parabole. Après l'examen des racines imaginaires $s = u + iv$ qui conduisent aux courbes

$$y = f(x) = e^{u\frac{x}{h}} \cos v \frac{x}{h},$$

l'auteur cherche à former des solutions d'une grande généralité, la fonction inconnue $f(x)$ pouvant évidemment être choisie d'une façon arbitraire dans un intervalle $2h$. Par l'emploi d'une formule empruntée au *Traité d'Analyse* de M. Picard (t. II, p. 175), il arrive à cette expression

$$f(x) = \frac{1}{h} \sum_{\lambda} \frac{e^{\lambda\left(\frac{x}{h} - 1\right)}}{e^{\lambda} + e^{-\lambda} - 2p} \int_{a-h}^{\alpha} e^{-\lambda\frac{\mu}{h}} f(\mu)\, d\mu,$$

où la sommation est étendue à toutes les racines λ de l'équation

$$e^{\lambda} - e^{-\lambda} - 2p\lambda = 0;$$

la limite supérieure α de l'intégrale à effectuer est égale à a ou à $a + h$ suivant que x est compris entre $a - h$ et a ou entre a et $a + h$.

« Nous avons ainsi, dit M. Lecornu, l'expression de $f(x)$ sous forme d'une série de termes dont chacun, pris isolément, vérifie l'équation proposée. Il

resterait à chercher pour quelles formes de la fonction $f(x)$, et dans quelles conditions, la formule peut être utilisée en dehors des limites pour lesquelles elle est établie. »

Il indique ensuite comment on pourrait former des équations aux différences mêlées analogues à la précédente, mais renfermant plusieurs fonctions inconnues et pour lesquelles on pourrait obtenir une infinité de solutions exponentielles.

Störmer (Carl). — Solution complète en nombres entiers de l'équation

$$m \text{ arc tang } \frac{1}{x} + n \text{ arc tang } \frac{1}{y} = k\frac{\pi}{4}$$

(160-170).

Le point de départ de l'auteur est l'identité

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)\ldots(a_n + ib_n) = \mathrm{R}e^{i\left(\text{arc tang}\frac{b_1}{a_1} + \text{arc tang}\frac{b_2}{a_2} + \ldots + \text{arc tang}\frac{b_n}{a_n}\right)},$$

où R est le module du premier membre. En s'appuyant sur la théorie des entiers complexes de Gauss, il ramène la question proposée à celle-ci : « *Trouver toutes les solutions entières positives et* > 1 *des équations indéterminées*

$$1 + x^2 = z^n, \qquad 1 + x^2 = 2z^n.$$

La première est impossible en nombres entiers si $n > 1$ (Lebesgue).

Pour la seconde, M. Störmer prouve le théorème suivant :

Les valeurs entières et positives de n, pour lesquelles l'équation

$$1 + x^2 = 2z^n$$

admet des solutions entières plus grandes que 1, sont

$$n = 1, \quad n = 2, \quad n = 4.$$

Pour $n = 1$, il y a une infinité de solutions; pour $n = 2$ pareillement (équation de Pell); pour $n = 4$, Lagrange a prouvé que l'unique solution était $x = 239$, $z = 13$.

D'après cela, en écartant les solutions qui ne conviennent pas au problème considéré, on trouve quatre solutions et quatre seulement, savoir

1° La solution d'Euler

$$\text{arc tang } \frac{1}{2} + \text{arc tang } \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4};$$

2° La solution nouvelle

$$2 \text{ arc tang } \frac{1}{2} - \text{arc tang } \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4};$$

3° La solution de Véga

$$2 \text{ arc tang } \frac{1}{3} + \text{arc tang } \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4};$$

4° La solution de Machin

$$4 \text{ arc tang } \frac{1}{5} - \text{arc tang } \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

Fontené (*G.*). — Sur un système de sept clefs. (171-180).

Introduction. — Les expressions symboliques à huit termes, un réel et sept symboliques, qui seront définies plus loin et que j'appelle des *octants* ont, en général, une multiplication non associative; si, malgré ce grave défaut, je me décide à en donner l'idée, c'est que, dans ma pensée, sous une condition qui reste à trouver, les octants doivent être propres à représenter le mouvement hélicoïdal par lequel on peut amener une figure de l'espace d'une position à une autre. On verra tout au moins qu'ils conduisent à la formule de Brioschi pour la décomposition du produit de deux sommes de 8 carrés en somme de 8 carrés, et le fait qu'une formule analogue n'existe plus pour 2^n carrés avec $n > 3$, montre que les octants sont le dernier terme du groupe *quantités complexes, quaternions, octants;* les p^2-nions de M. Castan, comprenant les nonions de Sylvester, sont l'extension des quaternions dans une autre voie.

Combebiac. — Calcul des triquaternions. (180-194).

Le calcul des quaternions réalise une simplification sur la méthode cartésienne, en supprimant les axes de coordonnées, sinon l'origine.

Les méthodes de l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann se passent de tout système de référence, mais ne constituent pas un système numérique complexe, ce qui rend leur application pénible et très limitée.

L'auteur se propose d'établir un système numérique complexe capable de représenter les faits géométriques sans système de référence.

Celui des biquaternions ne représente pas directement le point ni le plan. Pour réaliser un calcul présentant cet avantage, il suffit d'introduire quatre nouvelles unités obtenues en multipliant les quatre unités quaternioniennes 1, i, j, k par une autre μ, commutative avec elles et formant avec ω et l'unité vulgaire un système numérique ayant les règles de multiplication suivantes :

$$\mu^2 = 1, \qquad \omega^2 = 0, \qquad \omega\mu = -\mu\omega = \omega.$$

Les *triquaternions* sont les quantités complexes composant ce système.

Leau (*L.*). — Représentation des fonctions par des séries de polynomes. (194-200).

On sait qu'une fonction, holomorphe dans une aire limitée par un contour convexe, peut être développée dans cette aire suivant une série de polynomes.

Cette propriété a été généralisée récemment par M. Mittag-Leffler. De son côté, M. Leau la généralise de la façon suivante :

Figurons une courbe C issue de l'origine O et allant à un point quelconque A. Si l'on multiplie l'affixe de chaque point de C par une constante K, on a une nouvelle courbe. Toutes les lignes ainsi formées constituent une famille telle qu'il existe une courbe C_p de cette famille, et une seule, ayant son extrémité en un point donné P du plan. Cela posé, soit une fonction $F(z)$ holomorphe dans une région : on pourra former (et d'une infinité de manières) une série de polynomes dont les coefficients sont les produits de ceux de F par des nombres *qui ne dépendent que de la famille de courbes considérée;* et cela de manière que *la série représente* $F(z)$ *en tout point* P *du plan, tel que la*

courbe C_μ soit à une distance de tout point singulier ayant un minimum différent de zéro.

En particulier, si l'on choisit pour C une droite, on obtient la région étoilée considérée par Mittag-Leffler en 1898.

Petrovitch (M.). — Intégration graphique de certains types d'équations différentielles du premier ordre. (200-205).

M. Klerits a décrit, en 1897, un appareil d'une extrême simplicité, qu'il a appelé *tractoriographe,* parce qu'il peut servir à décrire d'un trait continu les *tractoires* d'une courbe plane donnée (*tractoires* d'une courbe, courbes dont on déduit la proposée en portant sur les tangentes une longueur constante à partir de leur point de contact), et qui se prête, en outre, à beaucoup de solutions graphiques.

M. Petrovitch montre que cet appareil, légèrement modifié, pourrait tracer les courbes intégrales de certains types d'équations différentielles du premier ordre. Ainsi, soit

$$F(X, Y) = 0$$

l'équation de la courbe que l'on fait décrire au stylet. La roulette de l'appareil modifié tracera une intégrale de l'équation différentielle qu'on déduit de l'équation précédente en y remplaçant X et Y respectivement par

$$x + \frac{\sqrt{l^2 - (l^2 - b^2)y'^2} - by'^2}{1 - y'^2}, \qquad y - \frac{y'\left[b + \sqrt{l^2 + (l^2 - b^2)y'^2}\right]}{1 - y'^2},$$

où l et b sont des constantes. Le cas $b = 0$, qui est celui de l'appareil primitif, correspond aux tractoires de $F = 0$.

Mais on peut aussi faire varier, avec x, y, y', X, Y, la longueur b. Un cas particulièrement facile à réaliser est celui où b dépend de y' suivant la formule

$$b = l \sin\alpha \frac{\sqrt{1 - y'^2}}{y'} \qquad (\alpha = \text{const.}).$$

On a alors, en déplaçant le stylet suivant la courbe $F = 0$, une intégrale de l'équation différentielle

$$F\left(x + l\frac{\cos\alpha - y'\sin\alpha}{\sqrt{1 - y'^2}},\ y + l\frac{\sin\alpha - y'\cos\alpha}{\sqrt{1 - y'^2}}\right) = 0.$$

En supposant réalisé un appareil où b varie d'après une loi donnée en fonction de x, y, y', X, Y, on peut reconnaître si une équation différentielle donnée

$$f(x, y, y') = 0$$

est ou n'est pas intégrable au moyen de cet appareil.

Lindelöf (E.). — Sur la croissance des intégrales des équations différentielles algébriques du premier ordre. (205-215).

C'est une importante proposition de M. Borel, sur ce sujet, qui donne lieu au présent Travail. L'auteur en donne une nouvelle démonstration, qui lui

permet de généraliser et de compléter, sur certains points, les résultats de M. Borel.

Soit une équation différentielle

$$F(x, y, y') = 0$$

algébrique en x, y et y', et soit $\tau(x)$ une fonction positive croissante, telle qu'on ait quelque grand que soit l'entier positif n,

$$\lim_{x=\infty} \frac{\tau(x)}{x^n} = 0.$$

M. Lindelöf établit d'abord la proposition suivante :

Si $y(x)$ désigne une intégrale réelle de l'équation $F = 0$, *qui reste continue pour $x > x_0$, on aura*

$$|y(x)| < e^{\int^x \tau(x)\,dx}$$

à partir d'une certaine valeur de x.

Pour $\tau(x) = e^x$, c'est le théorème de M. Borel.

Quelques remarques suivent, qui permettent de préciser beaucoup ce premier résultat; d'où ce nouvel énoncé :

Étant donnée une équation différentielle algébrique du premier ordre $F(x, y, y') = 0$, *de degré m par rapport à la variable indépendante x; si cette équation admet une intégrale $y(x)$, qui reste continue pour les valeurs de x dépassant une certaine limite, on aura, à partir d'une certaine valeur de x,*

$$|y(x)| < e^{C\,[\text{illegible}]},$$

C *désignant une constante positive suffisamment grande.*

Dans une Note additionnelle, il est fait état d'une observation suggérée à M. Borel par la Communication du présent Article, et qui permet à M. Lindelöf d'ariver au résultat suivant :

Les intégrales $y(x)$ de l'équation $F = 0$, *qui restent continues lorsque x tend vers l'infini, ou bien appartiennent au type exponentiel de M. Borel, ou bien satisfont constamment, à partir d'une certaine valeur de x, à l'inégalité*

$$e^{-x^{\varepsilon}} < y(x) < e^{x^{\varepsilon}},$$

quelque petit que soit le nombre positif ε.

Koch (H. von). — Sur les fonctions implicites définies par une infinité d'équations simultanées. (215-224).

En s'appuyant sur les propriétés des déterminants d'ordre infini, l'auteur démontre l'existence, sous certaines conditions, d'une infinité de fonctions x_1, x_2, ..., nulles pour $t = 0$ et holomorphes aux environs de ce point, qui satisfassent à une infinité d'équations

$$F_i(t; x_1\, x_2, \ldots) = 0.$$

les premiers membres de ces équations étant des fonctions analytiques, nulles et holomorphes pour

$$t = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots.$$

Comme exemple, M. von Koch prend l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} + Py + t(Q_0 + Q_1 y + \dots + Q_m y^m) = 0,$$

où t est un paramètre et où les fonctions P et Q sont des fonctions périodiques de x, de période 2π, holomorphes dans une bande parallèle à l'axe réel et comprenant cet axe. Il démontre qu'il existe une fonction périodique de x, de période 2π, qui satisfait à cette équation différentielle, et qui, pour les petites valeurs de t, peut être développée suivant les puissances positives de ce paramètre. Ce résultat se rattache aux récents travaux de M. Poincaré sur la Mécanique céleste.

Fontené. — Sur la dégénérescence des 63 systèmes de coniques quadruplement tangentes à une quartique. (229-236).

Énoncé d'un théorème *inductif*, où δ et $\varkappa$ désignent respectivement les nombres de points nodaux et de points cuspidaux de la quartique :

Les systèmes de coniques qui passent par c' points nodaux donnés d'une quartique et qui, de plus, ont avec la quartique c contacts véritables et passent par c'' points cuspidaux donnés, sous la condition $c' + c + c'' = 4$, sont en nombre

$$2^{6-\delta-2\varkappa} [illegible] 1 + \delta) \text{ pour } c' = 0,\ c = 4,\ c'' = 0;$$

$$[illegible]^{\,-\delta-2\varkappa-c} [illegible] 1 \text{ pour } c' = 0,\ c = 3,\ c'' = 1;$$

chacun de ces systèmes compte pour $2^{c'}3^{c''}$ systèmes.

Des théorèmes généraux, donnés par M. Humbert en 1866 dans le *Journal de Liouville*, confirment partiellement $(c'' = 0)$ cet énoncé auquel l'auteur avait été conduit par d'autres considérations avant de connaître les travaux de M. Humbert. L'exposé de ces considérations fait l'objet de l'Article de M. Fontené.

Le Roux (J.). — Extension de la méthode de Laplace aux équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre supérieur au second. (237-262).

La méthode de Laplace constitue, pour les équations linéaires du second ordre, une méthode générale d'intégration, en ce sens qu'elle permet de déterminer toutes les intégrales explicites dépendant d'une fonction arbitraire. Si l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

admet une intégrale particulière *de la forme d'Euler*

$$z = uX + u_1X' + \dots + u_nX^{(n)}.$$

linéaire et homogène par rapport à une fonction arbitraire de x et à ses dérivées, on sait que u_0 satisfait à l'équation

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} + a u_0 = 0.$$

Il résulte de là que, si l'on effectue la première transformation de Laplace en posant

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + a z,$$

la fonction z_1 a une expression de même forme que z, mais ne contenant pas les dérivées $X^{(n)}$. Ainsi, la transformation de Laplace a pour effet de faire disparaître le premier terme dans les intégrales de la forme d'Euler. C'est à ce point de vue que M. Le Roux se place pour l'étendre aux équations linéaires d'ordre supérieur, son application réitérée devant conduire à une équation admettant une intégrale à un seul terme, qui se calculera par une équation du premier ordre.

Étant donnée une équation d'ordre n, pour laquelle x soit une variable caractéristique

$$\sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,(n-\alpha-\beta)!} A_{\alpha,\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta} = 0,$$

pour qu'elle admette une intégrale de la forme d'Euler

$$z = u_0 X^{(m)} + u_1 X^{(m-1)} + \ldots + u_m X,$$

il faut que les fonctions u_i satisfassent à des relations de récurrence que l'auteur a établies antérieurement et qui ne déterminent u_0 qu'à un facteur près, qui est une fonction arbitraire de x.

Quand x est une caractéristique simple, c'est-à-dire quand le plus haut indice de dérivation par rapport à x, dans l'équation proposée, est $n-1$, on est conduit à la transformation *asymptotique*

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + n A_{n-1,0}\, z.$$

Si l'on pose

$$\frac{z}{u_0} = z\, e^{n\int A_{n-1,0}\,dy} = v,$$

l'équation en v sera de même forme que l'équation de départ, mais le coefficient de $\frac{\partial^{n-1} v}{\partial x^{n-1}}$ étant nul, la transformation asymptotique s'obtiendra en posant simplement

$$v_1 = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

D'après cela, dans l'équation en v, isolons les termes qui ne contiennent aucun indice de dérivation par rapport à y

$$\lambda_0 \frac{\partial^p v}{\partial x^p} + \lambda_1 \frac{\partial^{p-1} v}{\partial x^{p-1}} + \ldots + \lambda_p v = \Delta(v_1).$$

Les coefficients λ_i dépendent de la fonction arbitraire de x par laquelle on

peut multiplier l'une des déterminations de u_i (l'ordre p, au plus égal à $n-2$, en est indépendant). Mais on peut, avec ces fonctions, former des expressions qui ne contiennent plus aucune indéterminée et, par suite, sont de véritables invariants : ce sont les déterminants

$$h_i = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_i \\ \frac{d\lambda_0}{dy} & \frac{d\lambda_1}{dy} & \dots & \frac{d\lambda_i}{dy} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^i\lambda_0}{dy^i} & \frac{d^i\lambda_1}{dy^i} & \dots & \frac{d^i\lambda_i}{dy^i} \end{vmatrix},$$

au nombre de $p+1$, y compris $h_0 = \lambda_0$, qui constituent une généralisation des invariants de M. Darboux.

En exprimant que les deux équations

$$\lambda_0 \frac{d^p v}{dx^p} + \lambda_1 \frac{d^{p-1} v}{dx^{p-1}} + \dots + \lambda_p v = \Delta(v_1),$$

$$\frac{dv}{dy} = v_1$$

sont compatibles, on reconnaît que v doit satisfaire :

1° A une équation d'ordre $2n-1$ en général, ayant les mêmes caractéristiques que l'équation en z (l'ordre de multiplicité de la caractéristique x est augmenté de $n-1$); c'est la *transformée principale;*

2° A un *système auxiliaire* composé en général de $n-1$ équations linéaires, de forme remarquable : les premiers membres ne contiennent que des dérivées prises par rapport à x et les coefficients dépendent de x seulement, de sorte que leur compatibilité rentre dans le cadre de la théorie des équations différentielles à une seule variable.

Une propriété presque évidente des fonctions λ est la suivante : pour que l'équation proposée admette une intégrale *à un seul terme* $z = u_0 X$, il faut et il suffit que tous les λ soient nuls.

M. Le Roux s'occupe ensuite de définir la transformation de Laplace dans le cas où x est une variable caractéristique multiple. L'étude déjà faite de la transformation du premier ordre dans le cas des caractéristiques simples s'applique sans modification essentielle aux caractéristiques multiples.

Revenant aux caractéristiques simples, l'auteur fait voir que la considération des systèmes transformés successifs, qui iraient en se compliquant rapidement, n'est pas nécessaire pour définir la suite des transformations : il introduit à cette occasion de nouveaux invariants k_i à l'aide desquels on peut former les équations successives qui admettent pour solutions les diverses valeurs des coefficients u_i. Il existe une grande analogie entre les formules auxquelles on arrive ainsi et celles que M. Darboux a données pour le second ordre. On y voit figurer de nouveaux invariants l_i, formés avec les invariants k_i, et qui s'annulent tous, à partir d'un certain rang, lorsqu'il existe une intégrale particulière de la forme d'Euler et aussi dans certains cas que l'auteur indique en terminant.

Autonne (*L.*). — Sur les variétés unicursales à plusieurs dimensions. (263-282).

Christoffel, dans un Article des *Mathematische Annalen* (t. XIX), a abordé et résolu algébriquement les deux problèmes suivants :

1° Établir l'existence des invariants absolus (rationnels) projectifs, afférents à une forme d'ordre n à p variables ;

2° Chercher dans quels cas l'égalité des invariants absolus correspondants assure l'équivalence de deux formes.

M. Autonne, en généralisant un peu les vues de Christoffel et en les interprétant géométriquement, a obtenu les résultats que nous allons résumer.

Soient Z_s les coordonnées rectilignes d'un point Z dans un espace E_{m+n} à $m+n$ dimensions ; soient t_j celles d'un point T dans un espace E_m à m dimensions. Étant donnés $m+n$ polynomes $P_s(a_\sigma; t_j)$, de degré M par rapport aux variables t, dont les coefficients sont les a_σ, on définit un point Z de l'espace à $m+n$ dimensions par les relations

$$(o) \qquad Z_s = P_s(a; t).$$

Le lieu de ce point Z, quand le point T parcourt l'espace E_m, est une variété indécomposable E à m dimensions, comptée une ou plusieurs fois, unicursale par définition.

On suppose ensuite que les τ coefficients a soient des polynomes à coefficients numériques par rapport aux coordonnées X_s d'un point X de l'espace à $m+n$ dimensions. Les équations (o) définissent alors une variété E_X de même nature que E.

Plusieurs points X, X′, X″, ... peuvent fournir la même variété E_X, mais on a dans ce cas un certain nombre de relations, telles que

$$R(X') = R(X'') = \ldots = R(X),$$

où les R sont des fonctions rationnelles des $m+n$ lettres ; ce sont par définition les *invariants absolus* de la variété E_X.

Cela posé, la variété E_X aux $n+r-\rho$ ($r, \rho \geq 0$) invariants absolus R(X) est le lieu des points *équivalents* à un point donné X quelconque.

Parmi les invariants absolus R, on en peut choisir n, tels que tous les autres soient exprimables algébriquement en fonctions de ces n-là (*invariants fondamentaux*). On en peut aussi choisir $n+r$, *semi-fondamentaux*, tels que chaque invariant absolu soit exprimable rationnellement avec les semi-fondamentaux, tandis qu'aucun semi-fondamental n'est rationnellement exprimable avec les semi-fondamentaux précédents.

Pour que deux points X et Y soient *équivalents*, il faut et il suffit que les semi-fondamentaux soient égaux.

Voici les définitions relatives à l'*équivalence* qu'adopte l'auteur :

1° Un point Y est *équivalent* à un point X quand il existe au moins un point T fournissant Y au moyen du système

$$Y_s = P_s(X; t);$$

2° Si Y est équivalent à X, par là-même X est equivalent à Y ;

3° Pour que deux points soient équivalents l'un à l'autre, il faut et il suffit qu'ils soient équivalents à un troisième.

Léméray. — Application des fonctions doublement périodiques à la solution d'un problème d'itération. (282-285).

Il s'agit du problème de Babbage :

Déterminer des fonctions $\varphi(z)$ telles que l'on ait identiquement

$$\varphi_n(z) = z,$$

en posant

$$\varphi(z) = \varphi(z), \quad \varphi_2(z) = \varphi[\varphi(z)], \quad \ldots, \quad \varphi_n(z) = \varphi[\varphi_{n-1}(z)].$$

M. Leau a démontré (*Bull. Soc. Math.*, 1898) que les solutions *uniformes* $\varphi(z)$ sont nécessairement des *fonctions rationnelles*.

M. Lémeray montre qu'il existe des fonctions *algébriques irrationnelles*, répondant à la question. A cet effet, il considère la fonction elliptique $\mathrm{sn}\,\theta$ de périodes $4\Omega_1$ et $2\Omega_2$, et un argument ζ égal à la $n^{\text{ième}}$ partie de la période $4\Omega_1$. Faisant varier θ, il pose

$$\mathrm{sn}\,\theta = z, \quad \mathrm{sn}\,\zeta = a, \quad \mathrm{sn}(\theta - \zeta) = \varphi(z),$$

et démontre aisément que l'on a

$$\varphi_n(z) = \mathrm{sn}(\theta - n\zeta);$$

par suite cette $n^{\text{ième}}$ itérative est égale à $\mathrm{sn}\,\theta$, c'est-à-dire à z.

Il est ainsi établi que la fonction $\varphi(z)$ est une solution du problème de Babbage; elle est d'ailleurs irrationnelle, ayant pour expression

$$\varphi(z) = \frac{a\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} - z\sqrt{(1-a^2)(1-k^2a^2)}}{1-k^2a^2z^2},$$

où k est le module de la fonction elliptique $\mathrm{sn}\,\theta$. Aussi M. Lémeray précise-t-il la détermination du radical $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ dans lequel se fait la substitution.

Il signale ensuite une généralisation immédiate du résultat précédent. Soit $\mathrm{F}(\theta)$ une fonction doublement périodique et ζ la $n^{\text{ième}}$ partie d'une de ses périodes; si l'on pose

$$\mathrm{F}(\theta) = z, \quad \mathrm{F}(\zeta) = a,$$

et si le théorème d'addition de la fonction F est exprimé par l'équation

$$\varphi[\mathrm{F}(\theta), \mathrm{F}(\zeta)] = \mathrm{F}(\theta - \zeta),$$

la fonction $\varphi(z, a)$ est une intégrale de l'équation fonctionnelle

$$\varphi_n(z) = z.$$

On obtient, en particulier, des intégrales rationnelles en prenant pour fonction F la tangente trigonométrique ou la tangente hyperbolique de θ, dont les équations

$$\varphi(z, a) = \frac{z-a}{1 - az}$$

expriment respectivement les théorèmes d'addition.

Ferber. — Sur un symbole analogue aux déterminants. (285-288).

Lecornu (*L.*). — Sur l'équilibre relatif d'un solide sollicité par la force centrifuge. (289-296).

1° Étude générale des positions d'équilibre d'un corps solide susceptible de tourner autour d'un axe qui est lié à un axe fixe d'entraînement et qui est animé d'une rotation uniforme autour de cet axe : les positions d'équilibre stable et d'équilibre instable sont en même nombre; il y en a une ou deux, suivant les cas.

2° Lorsqu'un corps solide est mobile autour d'un point entraîné dans un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe, il y a huit positions d'équilibre, réelles ou imaginaires. Leur recherche revient à déterminer, parmi les complexes de Painvin associés à une famille de quadriques homofocales, ceux pour lesquels il existe un nombre fini de cônes du complexe tangents à une sphère donnée et ayant leurs sommets sur cette sphère.

Landau (*E.*). — Sur la série des inverses des nombres de Fibonacci. (298-300).

Sommation de la série

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_n} + \ldots$$

où l'on a posé

$$u_1 = 1, \qquad u_2 = 1, \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

L'auteur exprime cette somme par un produit de deux fonctions thêta, savoir

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \mathfrak{F}_2\left(0 \,\middle|\, \frac{4}{\pi i} \log \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \mathfrak{F}_3\left(0 \,\middle|\, \frac{4}{\pi i} \log \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

Painlevé (*P.*). — Sur la représentation des fonctions elliptiques. (301-302).

Toute fonction elliptique $\varphi(u)$, d'ordre n, est représentable par le quotient de deux expressions de la forme

$$a_1 \wp(u+h) + a_2 \wp'(u+h) + \ldots + a_n \wp^{(n-2)}(u+h),$$

h et les a_i désignant des constantes convenables.

La constante h peut recevoir n^2 valeurs différentes. Une fois h choisi, les coefficients a_i du numérateur et les coefficients A_i du dénominateur sont déterminés au même facteur constant près. Il existe donc n^2 représentations distinctes de la fonction $\varphi(u)$ sous la forme considérée.

Ce théorème donne en particulier la représentation classique des coordonnées homogènes des courbes de genre 1 dans un espace quelconque.

2ᵉ partie

SITZUNGSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN (¹).

1er semestre 1898.

Kœnigsberger. — Sur une généralisation de l'équation de Laplace $\Delta V = 0$. (5-18).

Supposons que les composantes X, Y, Z d'une force appliquée en un point A de coordonnées x, y, z dépendent de x, y, z et des dérivées x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; ...; $x_{2\nu}$, $y_{2\nu}$, $z_{2\nu}$ d'ordres 1, 2, ..., 2ν, de x, y, z, prises par rapport au temps t; ν est un entier positif quelconque.

Lorsque X, Y, Z peuvent être mises sous la forme

$$X = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial W}{\partial x_2} - \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial W}{\partial x_\nu},$$

$$Y = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial y_1} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial W}{\partial y_2} - \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial W}{\partial y_\nu},$$

$$Z = \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial z_1} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial W}{\partial z_2} - \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial W}{\partial z_\nu},$$

où W désigne une fonction de x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_ν, y_ν, z_ν, M. Kœnigsberger propose de dire que la force envisagée admet la *fonction de forces* W.

Si O est un centre fixe, attirant (ou repoussant) le point A, suivant la loi $f(r, r_1, r_2, \ldots, r_{2\nu})$, où r désigne la distance actuelle de A à O et r_1, r_2, ..., $r_{2\nu}$ les dérivées d'ordres 1, 2, ..., 2ν de r, prises par rapport à t, la condition nécessaire et suffisante pour que la force d'attraction (ou de répulsion) émanant de O admette une fonction de forces W, au sens général donné à ce mot par M. Kœnigsberger, est que la fonction $f(r, r_1, r_2, \ldots, r_{2\nu})$ puisse être mise sous la forme

$$f(r, r_1, r_2, \ldots, r_{2\nu}) = \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial r_1} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial W}{\partial r_2} - \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial W}{\partial r_\nu}.$$

Supposons que W soit un polynome en r_1, r_2, ..., r_ν dont les coefficients dépendent de r d'une façon arbitraire. Soient alors α_ν l'exposant le plus élevé auquel figure r_ν dans ce polynome; $\alpha_{\nu-1}$ l'exposant le plus élevé auquel figure $r_{\nu-1}$ dans le coefficient de $r_\nu^{\alpha_\nu}$; $\alpha_{\nu-2}$ l'exposant le plus élevé auquel figure $r_{\nu-2}$ dans le coefficient de $r_{\nu-1}^{\alpha_{\nu-1}} r_\nu^{\alpha_\nu}$; ...; nous conviendrons de dire que le terme

$$\varphi(r)\, r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \ldots r_{\nu-1}^{\alpha_{\nu-1}} r_\nu^{\alpha_\nu},$$

où $\varphi(r)$ désigne une fonction de r seulement, est le terme le plus élevé de W. Soient aussi k_ν le quotient, ε_ν le reste de la division de α_ν par 2; $k_{\nu-1}$ le quotient, $\varepsilon_{\nu-1}$ le reste de la division de $\alpha_{\nu-1} - \varepsilon_\nu$ par 2; $k_{\nu-2}$ le quotient, $\varepsilon_{\nu-2}$ le reste de la division de $\alpha_{\nu-2} - \varepsilon_{\nu-1}$ par 2; ...; enfin k_1 le quotient, ε_1 le reste de la

(¹) Voir le *Bulletin*, XXIV₂, p. 5.

division de $\alpha_1 - \varepsilon_2$ par 2. Lorsque ε_1 est nul et que, dans le terme le plus élevé de W, la fonction $\varphi(r)$ est de la forme $\varphi(r) = \frac{c}{r} + c_1$, où c et c_1 désignent des constantes, ou encore lorsque ε_1 est égal à 1 et que, dans le terme le plus élevé de W, la fonction $\varphi(r)$ est de la forme $\varphi(r) = \frac{c}{r^2} + c_1 r + c_2$, où c, c_1, c_2 désignent des constantes, M. Kœnigsberger propose de dire que la fonction des forces W de la force centrale envisagée est le potentiel W de cette force centrale.

Il est clair que l'on peut généraliser de diverses manières les notions de fonction des forces et de potentiel données en Mécanique rationnelle. Parmi toutes ces généralisations, celle de M. Kœnigsberger puise sa raison d'être en ce qu'elle permet, entre autres, d'établir pour la force de W. Weber émanant d'un centre fixe et appliquée en un point matériel, des propositions analogues à celles qui concernent le potentiel de la force de Newton émanant d'un centre fixe et appliquée en un point matériel.

Voici les énoncés des théorèmes démontrés par M. Kœnigsberger :

Désignons par le symbole $\Delta_{\mu,\nu}$, où μ et ν peuvent être des entiers égaux ou inégaux, l'opération

$$\Delta_{\mu,\nu} = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu} + \frac{\partial^2}{\partial y_\mu \, \partial y_\nu} + \frac{\partial^2}{\partial z_\mu \, \partial z_\nu}$$

effectuée sur une fonction de $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ et de ses dérivées de divers ordres $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$, prises par rapport à la variable indépendante t; le $\Delta_{0,0}$ d'une fonction de x_0, y_0, z_0 est alors le paramètre différentiel du second ordre de cette fonction. Le produit de plusieurs symboles égaux ou inégaux Δ voudra dire que l'on doit effectuer successivement, en commençant par la droite, les opérations indiquées par ces symboles.

M. Kœnigsberger démontre que l'on a, quelle que soit la fonction des forces centrales envisagée W, la relation fondamentale

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Delta_{0,0} \Delta_{1,0}^{\varepsilon_1} \Delta_{1,1}^{k_1} \Delta_{2,1}^{\varepsilon_2} \Delta_{2,2}^{k_2} \ldots \Delta_{\nu-1,\nu-2}^{\varepsilon_{\nu-1}} \Delta_{\nu-1,\nu-1}^{k_{\nu-1}} \Delta_{\nu,\nu-1}^{\varepsilon_\nu} \Delta_{\nu}^{k_\nu} W \\ & = \alpha_\nu ! \alpha_{\nu-1} ! \ldots \alpha_2 ! \alpha_1 ! \left[\frac{\partial^{2+\varepsilon_1} \varphi(r)}{\partial r^{2+\varepsilon_1}} + \varepsilon_1 \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial^{1+\varepsilon_1} \varphi(r)}{\partial r^{1+\varepsilon_1}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Cette relation (I) peut être envisagée comme une généralisation de la relation bien connue

$$\Delta_{0,0} V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r}$$

qui a lieu pour toute fonction des forces (au sens ordinaire du mot)

$$V = \int f(r) \, dr$$

correspondant à une force centrale appliquée en un point matériel A de coordonnées x, y, z, et ayant une intensité égale à $f(r)$, où r désigne la distance de A au centre fixe O.

Lorsque $f(r)$ est inversement proportionnelle à r^2, V est le potentiel newtonien; le second membre de la relation précédente est alors nul, en sorte que V vérifie l'équation de Laplace $\Delta_{0,0} V = 0$. De même, lorsque W est un potentiel, au sens général donné à ce mot par M. Kœnigsberger, il est aisé de voir que

le second membre de la relation fondamentale (I) se réduit à zéro. L'équation

$$\Delta_{0,0}\Delta_{1,0}^{\varepsilon_1}\Delta_{1,1}^{k_1}\Delta_{2,1}^{\varepsilon_2}\dots\Delta_{\nu,\nu}^{k_\nu}W=0$$

que vérifie tout potentiel W au sens généralisé par M. Kœnigsberger, pourvu que r ne soit pas nul, est donc une généralisation de l'équation de Laplace

$$\Delta_{0,0}V=0.$$

Lorsque l'attraction centrale a lieu suivant la loi de William Weber

$$f(r, r_1, r_2)=\frac{mm_1}{r^2}\left[-1+\frac{r_1^2}{c^2}-\frac{2rr_2}{c^2}\right],$$

où r désigne la distance du point matériel envisagé A au centre d'attraction O, m et m_1 les masses de A et de O, c une constante et où $r_1=\frac{dr}{dt}$, $r_2=\frac{d^2r}{dt^2}$, il existe une fonction des forces W, au sens général donné à ce mot par M. Kœnigsberger; c'est la fonction

$$W=\frac{mm_1}{r}\left(1+\frac{r_1^2}{c^2}\right).$$

Le terme le plus élevé de cette fonction est le terme $\frac{mm_1}{c^2}\frac{1}{r}r_1^2$, en sorte que, pour la loi de William Weber, on a

$$\varphi(r)=\frac{mm_1}{c^2}\frac{1}{r}.$$

On voit donc que $\nu=1$, $\alpha_1=2$ d'où $k_1=0$, $\varepsilon_1=0$; la fonction $\varphi(r)$ est donc bien de la forme voulue pour que la fonction des forces W de William Weber soit un *potentiel* dans le sens général donné à ce mot par M. Kœnigsberger. Et l'équation de Laplace généralisée est, pour le potentiel W de William Weber, l'équation

$$\Delta_{0,0}\Delta_{1,1}W=0,$$

équation que l'on peut écrire, en effectuant successivement les deux opérations indiquées par les symboles Δ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial x_1^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y_1^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial z_1^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^2\partial x_1^2}\\+\frac{\partial^4 W}{\partial y^2\partial y_1^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^2\partial z_1^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial z^2\partial x_1^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial z^2\partial y_1^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial z^2\partial z_1^2}=0.\end{aligned}$$

On étend immédiatement les résultats précédents au cas où, au lieu d'un centre fixe O, on a soit un nombre fini de centres fixes, soit un corps continu dont les divers points attirent (ou repoussent), suivant la loi envisagée, un point matériel qui reste à distance finie, différente de zéro, de ces divers points.

Fuchs (*L.*). — Œuvres de Lejeune-Dirichlet. (78-79).

M. Fuchs annonce à l'Académie que le second et dernier volume des Œuvres de Lejeune-Dirichlet a paru en septembre 1897. Le premier volume avait été publié sous la direction de Kronecker qui a aussi préparé l'impression des 15 premiers feuillets du second volume.

Kœnigsberger (L.). — Sur une généralisation de l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ (second article). (93-101).

Lorsque la force centrale envisagée ne dépend que de r, $r_1 = \frac{dr}{dt}$, $r_2 = \frac{d^2 r}{dt^2}$, et qu'elle admet un potentiel W, au sens général donné à ce mot par M. Kœnigsberger, ce potentiel est nécessairement de la forme

$$W = \varphi_0(r) + r_1 \varphi_1(r) + r_1^2 \varphi_2(r) + \ldots + r_1^\lambda \varphi_\lambda(r),$$

où $\varphi_\lambda(r)$ est de la forme $\frac{c}{r} + c_1$ ou de la forme $\frac{c}{r^2} + c_1 r + c_2$, suivant que λ est pair ou impair, c, c_1, c_2, désignant des constantes, tandis que $\varphi_0(r)$, $\varphi_1(r)$, ..., $\varphi_{\lambda-1}(r)$ peuvent être des fonctions quelconques de r. Suivant que λ est pair ou impair, le potentiel W vérifie l'équation de Laplace généralisée

$$\Delta_{0,0}\,\Delta_{1,1}^{\frac{1}{2}\lambda}\,W = 0,$$

ou l'équation de Laplace généralisée

$$\Delta_{0,0}\,\Delta_{1,0}\,\Delta_{1,1}^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}\,W = 0.$$

Lorsqu'il y a plusieurs centres d'attraction, le potentiel est la somme des potentiels correspondant à chacun de ces centres d'attraction. Lorsque c'est une figure continue qui attire le point matériel envisagé, le potentiel est égal à $\int W\,dm$, où W désigne le potentiel correspondant à l'attraction de l'élément de masse dm de la figure continue, réduit à l'unité de masse, et où l'intégrale est étendue à tous les éléments dm de la figure continue.

Si cette figure continue est une sphère creuse ou pleine, homogène ou formée de couches concentriques et homogènes, et si l'on prend l'origine des coordonnées O au centre de la sphère, l'axe OZ suivant la droite joignant O à la position actuelle du point attiré A et le plan OZY dans le plan de la vitesse actuelle du point A supposé soit à l'extérieur de la sphère, soit dans son creux, le potentiel de la sphère creuse sur le point A sera donné par l'expression

$$\text{(II)} \quad \int_{R_0}^{R_1}\int_0\int_0^{2\pi} d\rho\,d\theta\,d\psi \left\{ \sigma\rho^2 \sin\theta \sum_{i=0}^{i=\lambda} \left[\frac{\varphi_i\left(\sqrt{z^2+\rho^2-2\rho z\cos\theta}\right)}{(z^2+\rho^2-2\rho z\cos\theta)^{\frac{1}{2}i}} (zz' - z'\rho\cos\theta - y'\rho\sin\theta\cos\psi) \right. \right.$$

dans laquelle 0, 0, z désignent les coordonnées du point A ; 0, $y' = \frac{dy}{dt}$, $z' = \frac{dz}{dt}$ les composantes de sa vitesse actuelle suivant les axes coordonnés; σ la densité de l'élément dm dont les coordonnées polaires sont ρ, θ, ψ, en prenant O comme pôle, OZ comme axe polaire à partir duquel on compte les angles θ, et le plan OZY comme plan polaire à partir duquel on compte les angles ψ; enfin R_0 et R_1 les rayons des deux surfaces sphériques limitant la sphère creuse.

Plaçons-nous en particulier dans le cas où la loi d'attraction est celle de William Weber. Le potentiel de la sphère creuse sur un point A extérieur à cette sphère, ou situé dans son creux, est alors donné par une expression de la

forme

(III) $$\int dm \left[\frac{1}{r} - \frac{r_1^2}{k^2 r} \right],$$

où k est une constante, r désigne la distance de l'élément de masse dm de la sphère au point A, $r_1 = \frac{dr}{dt}$, et où l'intégrale est étendue à tous les éléments dm de la sphère creuse. Il est d'abord aisé de voir que cette intégrale est *dans tout l'espace* une fonction finie et continue des coordonnées du point A et de leurs dérivées par rapport à t, pourvu que r_1 reste finie.

Pour évaluer ce potentiel, supposons en premier lieu que le point A soit *extérieur* à la sphère creuse. Il suffira alors de remplacer dans l'expression générale (II) du potentiel, obtenue plus haut, λ par 2 et $\varphi_0(r)$, $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r)$ par $\frac{1}{r}$, o, $\frac{1}{k^2 r}$ et d'effectuer les calculs sous l'hypothèse $z > R_1$. On obtient ainsi pour le potentiel W_e de la sphère creuse au point *extérieur* A, l'expression

$$W_e = M \left[\frac{1}{z} - \frac{z'^2}{k^2 z} \right] - \frac{4}{3} \pi \frac{3 z'^2 - v^2}{k^2 z^3} \int_{R_0}^{R_1} \sigma \rho^4 \, d\rho$$

où $v^2 = y'^2 + z'^2$ est le carré de la vitesse actuelle du point A, et où M désigne la masse $\int_{R_0}^{R_1} 4\pi\sigma\rho^2 \, d\rho$ de la sphère creuse. On voit que ce potentiel ne dépend que de la distance z du point attiré au centre de la sphère, de la vitesse du point attiré et de l'angle que fait cette vitesse avec la droite joignant le point attiré au centre de la sphère. Le premier terme $M \left[\frac{1}{z} + \frac{z'^2}{k^2 z} \right]$ représente d'ailleurs le potentiel de la masse M de la sphère creuse concentrée en son centre O, au point attiré extérieur A, pour la loi d'attraction envisagée. Ainsi le potentiel de la sphère creuse en un point *extérieur* A, est égal au potentiel de la masse de la sphère creuse concentrée en son centre, quand le cosinus de l'angle que fait la vitesse avec la droite joignant A au centre O de la sphère est égal à $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Il est aisé de vérifier à nouveau, sur l'expression obtenue pour W_e, que l'équation de Laplace généralisée, qui se réduit ici à $\Delta_{0,0}\Delta_{1,1} W_e = 0$, est satisfaite. Enfin, à cause de la continuité de l'expression (III), il est clair que l'expression obtenue pour W_e convient encore au cas où le point attiré A est situé sur la surface limitant extérieurement la sphère creuse.

Supposons, en second lieu, que le point attiré A soit situé dans le creux de la sphère creuse. Si, dans ce cas, l'on remplace encore dans l'expression générale (II) du potentiel cherché, λ par 2, $\varphi_0(r)$ par $\frac{1}{r}$, $\varphi_1(r)$ par o, $\varphi_2(r)$ par $\frac{1}{k^2 r}$ et que l'on effectue les calculs sous l'hypothèse $z < R_0$, on obtient aisément pour le potentiel W_i d'une sphère creuse, en un point A situé dans son creux, une expression de la forme

$$W_i = a + b v^2;$$

les valeurs de a et de b sont d'ailleurs données par les formules

$$a = 4\pi \int_{R_0}^{R_1} \sigma \rho \, d\rho, \qquad b = \frac{4}{3} \frac{\pi}{k^2} \int_{R_0}^{R_1} \sigma \rho \, d\rho.$$

Ainsi le potentiel W_c ne dépend ni de la position occupée par le point attiré, dans le creux de la sphère creuse, ni de la direction de sa vitesse, mais seulement de l'intensité de sa vitesse. Ici encore il est aisé de vérifier à nouveau, sur l'expression obtenue pour W_c, que l'équation de Laplace généralisée $\Delta_{0,0}\Delta_{1,1}W_e = 0$ est satisfaite. A cause de la continuité de l'expression (III) l'expression précédente de W_c convient encore au cas où le point attiré A est situé sur la surface limitant intérieurement la sphère creuse.

Si enfin le point attiré A est placé dans la masse de la sphère creuse, on fera passer par A une sphère (S) concentrique aux deux surfaces limites de la sphère creuse et l'on évaluera le potentiel W_i de la sphère creuse sur le point A en ajoutant le potentiel W_e, sur A, de la sphère creuse partielle limitée extérieurement par (S) au potentiel W_c, sur A, de la sphère creuse partielle limitée intérieurement par (S). On obtient ainsi pour W_i l'expression

$$W_i = 4\pi\left(\frac{1}{\rho} + \frac{\rho'^2}{k^2\rho}\right)\int_{R_0}^{\rho} \sigma\rho^2\, d\rho - \frac{4\pi}{3k^2}\,\frac{3\rho'^2 - v^2}{\rho^3}\int_{R_0}^{\rho} \sigma\rho^4\, d\rho$$
$$- 4\pi\int_{\rho}^{R_1} \sigma\rho\, d\rho + \frac{4\pi}{3k^2}\, v^2\int_{\rho}^{R_1} \sigma\rho\, d\rho.$$

Pour une sphère pleine et homogène de rayon R, de densité σ, on a en particulier pour le potentiel W de cette sphère en un point A quelconque de l'espace, suivant que le point A est extérieur ou intérieur à la sphère, l'une ou l'autre des deux expressions

$$W_e = \frac{4}{3}\pi R^3\sigma\left[\frac{1}{\rho} + \frac{\rho'^2}{k^2\rho}\right] + \frac{4\pi\sigma(3\rho'^2 - v^2)}{15k^2\rho^3} R^5,$$
$$W_i = 2\pi\sigma\left(R^2 - \frac{\rho^2}{3}\right) + \frac{8\pi\sigma\rho^2\rho'^2}{15k^2} + \frac{2\pi\sigma R^2 v^2}{3k^2} - \frac{2\pi\sigma\rho^2 v^2}{5k^2};$$

quand A est sur la surface de la sphère, ces deux expressions coïncident.

Il est maintenant aisé d'établir l'équation qui, quand la loi d'attraction est celle de William Weber, joue le rôle que joue l'équation de Poisson quand la loi d'attraction est celle de Newton. Il suffit, pour cela, de déduire de l'expression que l'on vient d'obtenir pour W_i, dans le cas où le point attiré A est *intérieur* à une sphère pleine homogène, l'expression de la fonction $\Delta_{00}\Delta_{11}W$ qui, quand le point A est *extérieur* à cette sphère, est nulle d'après l'équation de Laplace généralisée. Or on déduit d'abord de l'expression que l'on vient d'obtenir pour W_i, dans le cas d'une sphère pleine et homogène, la formule

$$\Delta_{11}W_i = -\frac{4\pi\sigma\rho^2}{3k^2} + \frac{4\pi\sigma R^2}{k^4};$$

comme on a manifestement

$$\Delta_{00}\left[-\frac{4\pi\sigma\rho^2}{3k^2} + \frac{4\pi\sigma R^2}{k^2}\right] = -\frac{8\pi\sigma}{k^2},$$

l'équation cherchée, analogue à celle de Poisson, et convenant à la loi d'attraction de William Weber, est l'équation

$$\Delta_{00}\Delta_{11}W_i = -\frac{8\pi\sigma}{k^2}.$$

Schwarz (H.). — Sur l'idée fondamentale qui sert de fondement à

une nouvelle démonstration d'un théorème de Weierstrass. (139). [Communication verbale non insérée dans les *Sitzungsberichte*.]

Il s'agit d'une nouvelle démonstration du théorème de Weierstrass d'après lequel, lorsqu'une intégrale particulière $x = \varphi(u)$ d'une équation différentielle algébrique du premier ordre, dans laquelle la variable indépendante u ne figure pas explicitement, est une fonction plurivoque de u ne prenant qu'un nombre fini de valeurs pour une même valeur de u, les trois quantités x_1, x_2, x_3 définies par les trois relations

$$x_1 = \varphi(u_1), \qquad x_2 = \varphi(u_2), \qquad x_3 = \varphi(u_1 + u_2),$$

où u_1 et u_2 désignent deux variables indépendantes, sont liées par une relation *algébrique*

$$G[\varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u_1 + u_2)] = 0,$$

où les coefficients ne dépendent pas de u_1, u_2.

Kœnigsberger (*L.*). — Sur une généralisation du principe de la conservation des aires et sur son application à l'intégration des équations différentielles du mouvement de systèmes admettant un potentiel cinétique du premier ordre. (148-158).

Soient $x_1^{(0)}, y_1^{(0)}, z_1^{(0)}; x_2^{(0)}, y_2^{(0)}, z_2^{(0)}; \ldots; x_n^{(0)}, y_n^{(0)}, z_n^{(0)}$ les coordonnées de n points et $x_1^{(\alpha)}, y_1^{(\alpha)}, z_1^{(\alpha)}; x_2^{(\alpha)}, y_2^{(\alpha)}, z_2^{(\alpha)}; \ldots; x_n^{(\alpha)}, y_n^{(\alpha)}, z_n^{(\alpha)}$ (pour $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$) les dérivées d'ordre α de ces coordonnées prises par rapport au temps t. Désignons par $R_{\alpha 1}$, $R_{\alpha 2}$, ... (pour $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, \nu$) des fonctions continues de $x_1^{(\alpha)}, y_1^{(\alpha)}, z_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \ldots, z_n^{(\alpha)}$, et par $R_{\alpha 1}^{(k)}, R_{\alpha 2}^{(k)}, \ldots$ (pour $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, \nu$) les dérivées d'ordre K de ces fonctions prises par rapport à t; supposons que ces fonctions vérifient les relations

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(y_i^{(0)}\frac{\partial R_{0\rho}}{\partial x_i^{(0)}} - x_i^{(0)}\frac{\partial R_{0\rho}}{\partial y_i^{(0)}}\right) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{i=n}\left(y_i^{(1)}\frac{\partial R_{1\rho}}{\partial x_i^{(1)}} - x_i^{(1)}\frac{\partial R_{1\rho}}{\partial y_i^{(1)}}\right) = 0, \qquad \ldots,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(y_i^{(\nu)}\frac{\partial R_{\nu\rho}}{\partial x_i^{(\nu)}} - x_i^{(\nu)}\frac{\partial R_{\nu\rho}}{\partial y_i^{(\nu)}}\right) = 0,$$

pour $\rho = 1, 2, \ldots$. Supposons enfin que le potentiel cinétique H du système de n points envisagé soit une fonction de t, des $3n$ coordonnées de ces n points et de leurs dérivées d'ordre 1, 2, ..., ν prises par rapport à t, qui puisse être mis sous la forme

$$\begin{aligned} H = f[t,\ & R_{01}, R_{02}, \ldots;\ R_{01}^{(1)}, R_{02}^{(1)}, \ldots;\ R_{01}^{(2)}, R_{02}^{(2)}, \ldots;\ \ldots;\ R_{01}^{(\nu)}, R_{02}^{(\nu)}, \ldots; \\ & R_{11}, R_{12}, \ldots,\ R_{11}^{(1)}, R_{12}^{(1)}, \ldots;\ R_{11}^{(2)}, R_{12}^{(2)}, \ldots;\ \ldots;\ R_{11}^{(\nu-1)}, R_{12}^{(\nu-1)}, \ldots; \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & R_{\alpha 1}, R_{\alpha 2}, \ldots;\ R_{\alpha 1}^{(1)}, R_{\alpha 2}^{(1)}, \ldots;\ R_{\alpha 1}^{(2)}, R_{\alpha 2}^{(2)}, \ldots;\ \ldots;\ R_{\alpha 1}^{(\nu-\alpha)}, R_{\alpha 2}^{(\nu-\alpha)}, \ldots; \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & R_{\nu-1,1}, R_{\nu-1,2}, \ldots,\ R_{\nu-1,1}^{(1)}, R_{\nu-1,2}^{(1)}, \ldots; \\ & R_{\nu,1}, R_{\nu,2}, \ldots]. \end{aligned}$$

Si, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, P_i, Q_i, ..., sont les composantes des forces *extérieures* appliquées au point de coordonnées $x_i^{(0)}, y_i^{(0)}, z_i^{(0)}$; si $f_{1i}, f_{2i}, \ldots, f_{mi}$; $\varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \ldots, \varphi_{mi}$; ... sont les fonctions dites *de liaison*, et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ les paramètres de liaison, les équations différentielles du mouvement du système de n points envisagés sont les équations différentielles suivantes, d'ordre 2ν,

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x'_i} + \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(\nu)}} - P_i + \lambda_1 f_{1i} + \lambda_2 f_{2i} + \ldots + \lambda_m f_{mi} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial y'_i} + \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial y_i^{(\nu)}} - Q_i + \lambda_1 \varphi_{1i} + \lambda_2 \varphi_{2i} + \ldots + \lambda_m \varphi_{mi} = 0,$$

....

Supposons que les composantes des forces extérieures et les fonctions dites *de liaison* vérifient les relations

$$\sum_{i=1}^{i=n}(y_i P_i - x_i Q_i) = 0; \qquad \sum_{i=1}^{i=n}(y_i f_{1i} - x_i \varphi_{1i}) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{i=n}(y_i f_{2i} - x_i \varphi_{2i}) = 0; \qquad \ldots; \qquad \sum_{i=1}^{i=n}(y_i f_{mi} - x_i \varphi_{mi}) = 0.$$

Sous ces conditions, M. Kœnigsberger démontre que l'équation différentielle d'ordre $2\nu - 1$,

$$\sum_{\rho=1,2,\ldots}\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu}(-1)^\alpha \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\alpha-1}(-1)^\lambda \left[y_i^{(\lambda)} \frac{d^{\alpha-\lambda-1}}{dt^{\alpha-\lambda-1}}\left(K_{\alpha\rho}\frac{\partial R_{\alpha\rho}}{\partial x_i^{(\alpha)}}\right) - x_i^{(\lambda)} \frac{d^{\alpha-\lambda-1}}{dt^{\alpha-\lambda-1}}\left(K_{\alpha\rho}\frac{\partial R_{\alpha\rho}}{\partial y_i^{(\alpha)}}\right)\right] = c,$$

où c désigne une constante arbitraire, et où, pour chaque indice α et chaque indice ρ, $K_{\alpha\rho}$ désigne l'expression

$$K_{\alpha\rho} = \frac{\partial H}{\partial R_{\alpha\rho}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial R_{\alpha\rho}^{(1)}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial R_{\alpha\rho}^{(2)}} \ldots + (-1)^{\nu-\alpha}\frac{d^{\nu-\alpha}}{dt^{\nu-\alpha}}\frac{\partial H}{\partial R_{\alpha\rho}^{(\nu-\alpha)}},$$

est une intégrale première des équations différentielles du mouvement.

Ce théorème de M. Kœnigsberger est une généralisation du théorème de la conservation des aires. Lorsqu'on l'énonce, comme on vient de le faire, dans toute sa généralité, il semble assez difficile d'en démêler la portée; mais il suffit de l'appliquer à des cas particuliers simples pour se rendre compte de son importance. Supposons, par exemple, que l'on envisage le mouvement d'un seul point A et que le potentiel cinétique donné H soit de la forme

$$H(r, r', v^2),$$

où r désigne la distance actuelle du point A à un centre fixe O, r' la dérivée $\frac{dr}{dt}$, et v^2 le carré de la vitesse actuelle de A. Les conditions sous lesquelles le théorème de M. Kœnigsberger a lieu sont alors vérifiées, et ce théorème nous apprend

que l'intégration des équations différentielles du mouvement du point A se ramène nécessairement à des quadratures seulement.

Envisageons, par exemple, un point A de masse 1 attiré par une sphère creuse formée de couches concentriques et homogènes, la loi d'attraction étant celle de William Weber. Si le point A est *extérieur* à la sphère, son potentiel cinétique est égal à

$$H = \frac{1}{2} v^2 - W_e,$$

où W_e désigne le potentiel (au sens général donné à ce mot par M. Kœnigsberger) de la sphère creuse au point A ; H ne dépend donc que de r, $\frac{dr}{dt}$, et v^2 comme on s'en assure immédiatement en remplaçant W_e par sa valeur établie dans une Communication précédente de M. Kœnigsberger à l'Académie (*Sitzungsberichte*, p. 93-101; 1898). Mais alors, d'après ce que l'on vient de voir, l'intégration des équations différentielles du mouvement du point A se ramène à des quadratures. Ces quadratures sont d'ailleurs mises en évidence; ce sont des intégrales hyperelliptiques.

Si le point A est situé dans le creux de la sphère creuse, on ramène de même, au moyen de l'expression du potentiel W_c de la sphère creuse au point A, l'intégration des équations différentielles du mouvement du point A à des quadratures. Mais ici ces quadratures peuvent être immédiatement effectuées, et l'on voit que le point A, attiré par la sphère creuse suivant la loi de William Weber, se meut toujours, dans le creux de la sphère, d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Boltzmann (*L.*). — Sur des phénomènes de rayonnement supposés irréversibles (troisième article) (182-187).

M. Boltzmann a démontré que, dans un espace vide ou dans un milieu quelconque parfaitement diélectrique, contenant des résonateurs sans résistance d'Ohm et étant limité par des parois supposées parfaitement réfléchissantes, tout phénomène électromagnétique est réversible.

Dans un Mémoire présenté à l'Académie (*Sitzungsberichte*, 1897, 2e semestre), M. Planck a étudié des phénomènes qui rentrent manifestement, comme cas particulier, dans l'ordre de recherches de M. Boltzmann. Il a intégré complètement, dans le cas particulier envisagé, les équations de Maxwell en suivant une marche fort intéressante; mais il a aussi conclu des formules qu'il a obtenues que le phénomène envisagé est irréversible, et M. Boltzmann s'élève contre cette conclusion qui est en contradiction absolue avec ses propres recherches. Dans son Mémoire, M. Boltzmann cherche à mettre en évidence la cause de l'erreur commise par M. Planck.

Fuchs (*L.*). — Sur la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires simultanées. (221-223).

Dans plusieurs Communications faites à l'Académie à partir de 1888, M. Fuchs a montré comment on peut exprimer la dérivée, prise par rapport à un paramètre t, des solutions $y = \varphi(x)$ d'une équation différentielle linéaire quelconque

donnée, sans second membre,

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0,$$

dont les coefficients $p_1, \ldots, p_n$ sont des fonctions de x et du paramètre t, en fonction linéaire et homogène de y et des dérivées de y prises par rapport à x. Il a en particulier étudié la façon dont y dépend de t, dans le cas où les coefficients $p_1, \ldots, p_n$ de l'équation différentielle linéaire et les coefficients de l'expression de $\frac{\partial y}{\partial t}$ sont des fonctions *rationnelles* de x et de t.

M. Fuchs est parvenu actuellement à se débarrasser de ces hypothèses restrictives sur la nature des coefficients; il nous apprend comment on peut étudier, quels que soient les coefficients de l'équation différentielle donnée, la façon dont y dépend du paramètre t, sans rien préjuger sur le caractère analytique des coefficients dans l'expression de la dérivée $\frac{\partial y}{\partial t}$ en fonction de y et des dérivées de y prises par rapport à x. Il retrouve ainsi les résultats déjà obtenus et croit pouvoir en annoncer de nouveaux.

Gundelfinger (*S.*). — Sur la découverte de la double périodicité et sur la part que Jacobi a prise à cette découverte. (342-345).

M. Gundelfinger croit pouvoir affirmer, contrairement à l'opinion émise par M. Bjerknes, que Jacobi a eu certainement, *indépendamment d'Abel*, une notion très nette de l'inversion des intégrales elliptiques de première espèce, et qu'en outre, il s'est servi, indépendamment d'Abel, du principe de la double périodicité, au moins comme d'un principe directeur, lorsqu'il a établi son théorème de la transformation. Il concède seulement à M. Bjerknes que Jacobi a été sans doute loin de songer à développer la théorie des fonctions inverses des intégrales elliptiques de première espèce, à l'époque où Abel développait cette théorie dans ses *Recherches*. Jacobi semble avoir été arrêté par le paradoxe qu'entraîne en apparence la notion de double périodicité, tant que l'on se borne à intégrer le long de l'axe des quantités réelles. Il est d'ailleurs presque certain qu'Abel n'a pu résoudre complètement ce paradoxe que sous l'influence de Cauchy, et il semble à M. Gundelfinger plus que probable que Cauchy lui-même a été amené à ses belles recherches sur les intégrales curvilignes par l'étude de la troisième démonstration de Gauss sur l'existence des racines des équations algébriques.

Schlesinger (*L.*). — Sur la théorie de Gauss de la moyenne arithmético-géométrique et sur les relations qu'il y a entre cette théorie et celle des fonctions modulaires. (346-360).

On peut établir les principes fondamentaux de la théorie des fonctions modulaires en prenant comme point de départ les recherches de Gauss sur la théorie de la moyenne arithmético-géométrique publiées dans le Tome III des Œuvres complètes du célèbre Géomètre (*Œuvres posthumes*) par les soins de M. Schering. Cette méthode a l'avantage de permettre d'étudier les fonctions modulaires indépendamment des fonctions doublement périodiques.

Après avoir rappelé les propriétés de la moyenne arithmético-géométrique $M(a, b)$ de deux nombres positifs a, b où $a > b$, et défini q par la formule

$$q = e^{-\pi \frac{M(a,b)}{M(a,c)}},$$

où c désigne la racine carrée positive de $a^2 - b^2$, M. Schlesinger établit, en suivant autant que possible la marche même de Gauss, que les trois fonctions de q, définies par les relations

$$P(q) = \sqrt{\frac{a}{M(a, b)}}, \quad Q(q) = \sqrt{\frac{b}{M(a, b)}}, \quad R(q) = \sqrt{\frac{c}{M(a, b)}},$$

peuvent être développées suivant les puissances de q et que l'on a

$$P(q) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2}, \quad Q(q) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n q^{n^2}, \quad R(q) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2};$$

[$P(q)$, $Q(q)$, $R(q)$ coïncident donc avec les fonctions que l'on désigne dans le même ordre par $\vartheta_3(0|\tau)$, $\vartheta_4(0|\tau)$, $\vartheta_2(0|\tau)$, où $\tau = i\,\frac{M(a, b)}{M(a, c)}$].

Il en déduit que l'on peut représenter le quotient

$$k = \frac{c}{a},$$

qui figure dans l'intégrale complète de première espèce

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

par la formule

$$k = \frac{R^2(q)}{P^2(q)}.$$

Si l'on se reporte au point de départ de la théorie des fonctions modulaires telle qu'elle a été établie par M. Hermite dans son Mémoire de 1859 (*Sur les équations modulaires*), on voit qu'il ne reste plus à M. Schlesinger pour avoir rattaché cette théorie à celle de Gauss, sans faire usage de la théorie des fonctions doublement périodiques, qu'à montrer que pour chaque nombre fini, réel ou imaginaire k^2, différant des deux nombres 0 et 1, le coefficient de i dans l'expression de τ est *positif;* cette démonstration n'offre d'ailleurs pas de difficulté.

Gerhardt (*C.-J.*). — Sur les quatre lettres de Leibniz que Samuel Kœnig a publiées en 1753, dans son appel au public. (419-427).

Des quatre lettres de Leibnitz publiées par Kœnig, à Leyde, en 1753, la première est sans doute perdue. Cette première lettre, qui était datée de Hanovre, le 16 octobre 1707, était la plus importante des quatre; c'est elle qui contenait,

en effet, les premières allusions qui semblent avoir été faites au principe de la moindre action. On sait que Maupertuis croyait avoir découvert ce principe et attachait la plus grande importance à sa découverte; on sait aussi qu'il n'admit pas l'authenticité de la lettre de Leibniz et que l'Académie des Sciences de Berlin affirma, après enquête, que cette lettre adressée, d'après Kœnig, par Leibniz à Hermann constitue un faux. Ce fut l'origine de polémiques célèbres au cours desquelles Voltaire se montra l'adversaire irréconciliable de Maupertuis.

A la fin du dix-huitième siècle, *von Murr*, à la suite de nombreuses recherches, émit l'avis que Leibniz avait adressé la lettre en question, non à Hermann, mais à Varignon. M. Gerhardt, après avoir étudié la correspondance entre Leibniz et Varignon, conservée à la bibliothèque royale de Hanovre, est amené à conclure à l'authenticité de la lettre de Leibniz et à confirmer l'opinion de *von Murr* d'après laquelle cette lettre a été adressée à Varignon.

Prix de 5000 marcs (6250 francs) à décerner en 1902.

Soient $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_n(z)$ un système fondamental d'intégrales d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients algébriques.

On demande d'étudier la fonction z des variables $\frac{u_2}{u_1}$, $\frac{u_3}{u_1}$, ..., $\frac{u_n}{u_1}$, définie par l'équation

$$u_1 f_1(z) + u_2 f_2(z) + \ldots + u_n f_n(z) = 0.$$

On demande, en particulier, de donner une représentation de la fonction z, dans le cas où elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs pour des valeurs données des variables. On recherchera aussi dans quelle mesure ces fonctions particulières z peuvent être utilisées dans l'intégration des équations différentielles linéaires du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Les manuscrits peuvent être écrits en allemand, latin, français, anglais ou italien. Ils doivent être adressés avant la fin de l'année 1901, au bureau de l'Académie, 8, rue de l'Université, à Berlin.

Second semestre 1898.

Planck (Max). — Sur des phénomènes de rayonnement qui sont irréversibles. Quatrième article. (449-476).

Il convient d'entendre par *intensité de rayonnement* d'une onde, pendant un intervalle de temps t, non pas la somme des intensités de rayonnement des divers mouvements périodiques simples dont se compose le mouvement de propagation de cette onde, somme qui est indépendante de t, mais la valeur moyenne, pendant l'intervalle de temps t, de l'énergie engendrée par le mouvement de propagation de l'onde, quantité qui dépend de t et que l'on peut supposer être une fonction continue de t admettant des dérivées par rapport à t. On suppose que t est au moins de l'ordre de grandeur de l'intervalle de temps nécessaire pour mesurer l'intensité de rayonnement de l'onde et l'on suppose aussi que l'onde rayonne pendant un temps dont le rapport à t soit suffisamment grand.

Pour décomposer l'intensité de rayonnement d'une onde, pendant le temps t,

en intensités de rayonnements partiels correspondant chacun, pendant le même temps t, à une couleur déterminée, donc à un nombre de vibrations déterminé, on fera agir toute l'onde rayonnante sur des résonateurs convenablement choisis et l'on déterminera, pour chaque résonateur l'énergie absorbée par ce résonateur.

Si l'on définit ainsi l'intensité de rayonnement correspondant, pendant un temps t, à une couleur déterminée, la mesure de cette intensité ne saurait fournir la détermination précise de l'amplitude et de la phase des oscillations donnant naissance à cette couleur; car le résonateur envisagé réagit non seulement sur la couleur correspondant à une période vibratoire égale à celle de ce résonateur, il réagit aussi sur des couleurs correspondant à des vibrations voisines, donc sur un grand nombre de vibrations qui, par des interférences réciproques, sont cause d'oscillations dans l'intensité du rayonnement.

Il reste donc quelque chose d'arbitraire dans la façon dont ces diverses vibrations contribuent chacune à déterminer l'intensité de la couleur envisagée. C'est de cet arbitraire que M. Planck profite pour distinguer entre tous les rayonnements ceux qu'il appelle les *rayonnements naturels*.

Dès que l'on se borne à envisager ces rayonnements naturels, les phénomènes de rayonnement sont tous irréversibles, sans exception aucune. L'intensité de rayonnement des ondes qui quittent le résonateur est soumise à de plus petites oscillations que les petites oscillations de l'intensité du rayonnement des ondes qui excitent le résonateur. M. Planck donne le nom d'*entropie* à une fonction déterminée qui varie toujours dans le même sens dans la suite des temps et dont l'existence suffit pour démontrer l'irréversibilité de tout phénomène de rayonnement naturel.

M. Planck examine enfin sous quelles conditions on peut admettre que les phénomènes irréversibles ayant constamment lieu dans la nature vérifient les conditions sous lesquelles un rayonnement a été défini comme étant un rayonnement naturel.

Fuchs (*L.*). — Sur la théorie des fonctions abéliennes. (447-486).

Les modules de périodicité y d'une intégrale hyperelliptique de première espèce, envisagés comme des fonctions d'un point de ramification x, vérifient une équation différentielle connue que nous désignerons, pour abréger, par (E).

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_{2p}$ un système fondamental de solution de l'équation (E); désignons par $y'_1, y'_2, \ldots, y'_{2p}$ les dérivées de $y_1, y_2, \ldots, y_{2p}$ prises par rapport à x et formons les fonctions de x,

$$y_k y'_l - y_l y'_k$$

pour toutes les combinaisons d'indices k et l choisis parmi les nombres 1, 2, ..., $2p$. Toutes ces fonctions de x sont des solutions d'une équation différentielle d'ordre $p(2p-1)$ que l'on appelle l'équation *associée* d'ordre $(2p-2)$ de l'équation (E), et que nous désignerons pour abréger par (A).

Cette équation (A) est nécessairement *réductible;* elle admet une solution *rationnelle* que M. Richard Fuchs a donnée explicitement dans sa thèse inaugurale [1]. La réductibilité de l'équation (A) fournit d'ailleurs les relations

[1] *Journal de Crelle*, t. 119.

connues dues à Weierstrass qui lient les modules de périodicité des intégrales hyperelliptiques de première et de deuxième espèce.

Ces propositions sont établies en faisant usage du groupe de substitutions de l'équation (E), groupe qui a été formé par M. Fuchs pour toute équation (E) correspondant aux modules de périodicité d'une intégrale hyperelliptique quelconque de première espèce [1], mais n'a pu encore être formé pour les équations du même type correspondant aux modules de périodicité des intégrales abéliennes non réductibles aux intégrales hyperelliptiques. La méthode précédente ne peut donc être étendue à des intégrales abéliennes quelconques.

Mais M. Fuchs a montré [2] comment on peut déterminer les coefficients de l'équation différentielle du type (E) qui correspond à une intégrale abélienne quelconque. En s'appuyant sur les équations qui fournissent cette détermination des coefficients de l'équation du type (E), M. Fuchs démontre, dans le Mémoire actuel, que l'équation associée d'ordre $(2p-2)$ de l'équation envisagée du type (E), admet nécessairement une solution appartenant au même domaine de rationalité que les coefficients de l'équation du type (E); mais alors cette équation associée d'ordre $(2p-2)$ est *réductible,* comme dans le cas des intégrales hyperelliptiques.

M. Fuchs montre enfin comment les relations qui mettent cette réduction en évidence permettent d'établir les relations connues dues à Riemann qui ont lieu entre les modules de périodicité des intégrales abéliennes de première et de deuxième espèce.

Kœnigsberger (*L.*). — Sur la réduction que l'on peut faire subir au nombre de paramètres indépendants dont dépend le mouvement d'un système, en élevant l'ordre du potentiel cinétique de ce système. (491-496).

Le potentiel cinétique H d'un système de points matériels est défini par la relation
$$H = -T - U,$$
où T est l'énergie cinétique du système et — U son énergie potentielle. Si la position du système dépend de μ paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$, l'énergie cinétique T est, dans un grand nombre de problèmes, une fonction *homogène* quadratique de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_\mu$, dont les coefficients dépendent de $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$, tandis que U est une fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$.

M. Kœnigsberger appelle *potentiel cinétique* d'un système *quelconque* une fonction H d'un certain nombre de paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ caractérisant ce système, et de leurs dérivées d'ordres 1, 2, ..., ν, où ν est un entier quelconque, choisie de façon que le système varie conformément aux équations analogues à celles de Lagrange

$$(1)\quad \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial q'_i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial q''_i} - \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial q_i^{(\nu)}} = P_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu),$$

[1] *Journal de Crelle,* t. 71.

[2] *Sitzungsberichte der Berliner Akademie;* 1897.

où $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ désignent des fonctions données de $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$. Si, dans la fonction H, figurent des dérivées d'ordre k sans qu'il en figure d'ordre supérieur, M. Kœnigsberger dit que le potentiel cinétique H est d'*ordre k*. Élever l'ordre du potentiel cinétique H d'un système en diminuant le nombre de ses paramètres indépendants, c'est donc remplacer ce potentiel cinétique H par un autre H_1 contenant moins de paramètres, mais contenant par contre des dérivées d'ordres plus élevés des paramètres restants que n'en contenait H, sans que rien soit changé à la façon dont varie le système, soit qu'on l'envisage comme ayant lieu conformément aux équations (1), soit qu'on l'envisage comme ayant lieu conformément aux équations analogues aux équations (1) qui correspondent au potentiel cinétique H_1.

M. Kœnigsberger cherche à établir des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on puisse ainsi remplacer le potentiel cinétique d'un système par un nouveau potentiel cinétique H_1.

Envisageons, en particulier, un système de points matériels en mouvement, sollicités par des forces données; la position de ce système dépend d'un nombre déterminé de paramètres indépendants. En appliquant le critérium de M. Kœnigsberger, on pourra dire sous quelles conditions le même mouvement peut être décrit au moyen d'équations différentielles analogues à celles de Lagrange [du type des équations précédentes (1), pour $\nu = 2$], en supposant, d'une part, la position des points matériels envisagés comme dépendant d'un nombre moindre de paramètres indépendants et, d'autre part, le potentiel cinétique $-T-U$ remplacé par un nouveau potentiel cinétique H_1 convenablement choisi, dépendant non seulement de ces paramètres, en nombre moindre, et de leurs dérivées premières, mais aussi de leurs dérivées secondes, prises par rapport à t.

M. Kœnigsberger détermine la forme que prend nécessairement dans tous les cas ce nouveau potentiel H_1. Dès lors, quand un phénomène a lieu conformément à des équations du type (1), analogues à celles de Lagrange, on sait quand ce même phénomène peut aussi être conçu comme ayant lieu conformément à d'autres équations du même type dans lesquelles le potentiel cinétique est d'un ordre plus *petit* que celui du potentiel cinétique donné, mais où, par contre, le nombre de paramètres indépendants est plus *grand*. C'est le problème inverse du problème d'abord résolu.

Si l'on veut traduire par une image cette augmentation du nombre de paramètres, on peut se figurer avec Helmholtz et Hertz qu'elle correspond à l'introduction de mouvements cachés, ou plus généralement de phénomènes cachés.

Frobenius (*G.*). — Sur des relations entre les caractères d'un groupe et ceux de ses mineurs. (p. 501-515).

La méthode générale donnée par M. Frobenius ([1]) pour évaluer les CARACTÈRES d'un groupe donné, n'est pas toujours d'une application facile; dans certains cas particuliers, on parvient bien plus rapidement à l'évaluation de ces caractères et, par suite, à leur représentation primitive par des substitutions linéaires, en s'appuyant sur certaines relations qui les lient aux caractères des mineurs du groupe donné.

M. Frobenius établit ces relations de deux façons différentes. Dans la pre-

---

([1]) Voir le Compte rendu des *Sitzungsberichte* de 1896, *Bulletin*, t. XXIII_2, p. 151.

mière, il part des facteurs premiers du déterminant du groupe donné et montre comment on peut alors obtenir les facteurs premiers du déterminant de l'un quelconque des mineurs contenus dans ce groupe. Dans la seconde, il suit la marche inverse et construit, en s'élevant en quelque sorte du composant au composé, les facteurs premiers du déterminant du groupe donné au moyen des facteurs premiers du déterminant du mineur envisagé.

Les résultats obtenus sont particulièrement simples, lorsque le mineur envisagé du groupe donné est un sous-groupe *invariant* de ce groupe donné.

Les formules obtenues sont intimement liées à la décomposition du groupe donné en complexes d'éléments, équivalents suivant le système de modules formé par deux mineurs du groupe donné. L'étude du cas particulier où ces deux mineurs sont identiques permet de déterminer immédiatement un caractère de chaque groupe de permutation qui est doublement transitif.

Lüdeling (*G.*). — Sur la variation diurne du magnétisme terrestre, observée à des stations de la zone polaire. (524-530).

Schwarz (*H.*). — Sur la résolution d'un problème particulier de la théorie des fonctions, en relation avec la théorie des séries hypergéométriques. (589).

Cette Communication de M. Schwarz à l'Académie ne sera publiée qu'ultérieurement.

M. Koser présente à l'Académie le tome LXXII des Publications tirées des Archives prussiennes.

Ce tome contient la correspondance du roi Frédéric II et de *Maupertuis,* président de l'Académie.

Vogel (*H.-C.*). — Sur le spectre d'Ataïr et sur la composante, suivant le rayon visuel, du mouvement de cette étoile dans l'espace.

Les raies métalliques des spectres des étoiles de la première classe spectrale I_a sont toutes très nettement limitées; seules les raies de l'hydrogène sont plus ou moins fondues. Cependant Ataïr, quoique faisant partie de cette première classe spectrale I_a, fait exception à cette règle; son spectre contient, en effet, comme l'a observé Scheiner, de faibles bandes quelque peu fondues, différentes des larges lignes de l'hydrogène. M. Vogel montre que ce fait, très anormal dans une étoile du type I_a, peut être expliqué par la *rotation* de l'étoile. Il est toutefois nécessaire d'admettre que cette rotation est assez rapide puisqu'un point de l'équateur d'Ataïr aurait une vitesse de 27^{km} par seconde, donc 13 fois plus grande que celle de l'équateur d'un point de notre Soleil; toutefois cette vitesse n'est que le double de celle d'un point de l'équateur de Jupiter dans le mouvement de rotation de cette planète; elle n'a donc rien d'invraisemblable.

Les observations spectroscopiques faites à Potsdam dans les dernières années permettent de fixer à $36^{km},1 \pm 0^{km},7$ la vitesse, estimée suivant le rayon visuel,

avec laquelle Ataïr s'éloigne de nous en une seconde. Ce résultat n'est pas conforme à celui qui a été énoncé par M. Deslandres (*Comptes rendus*, 1895, p. 629) et d'après lequel Ataïr serait au moins une étoile triple.

Kœnigsberger (L.). — Sur la forme du développement de fonctions algébriques et sur l'irréductibilité de certaines équations algébriques. (735-741).

En s'appuyant sur des recherches récentes, contenues dans un Mémoire publié dans le tome 115 du *Journal de Crelle,* sur la généralisation d'un théorème d'Eisenstein et l'irréductibilité de certaines équations algébriques, M. Kœnigsberger établit la forme des coefficients de l'équation algébrique

$$(1)\qquad y^n + f_1(x)y^{n-1} + f_2(x)y^{n-2} + \ldots + f_{n-1}(x)y + f_n(x) = 0,$$

dont on sait : 1° que si $x = \alpha$ est un zéro de $f_n(x)$, l'équation admet, pour $x = \alpha$, un nombre donné ν de solutions confondues $y = 0$; 2° que les ν fonctions de y qui représentent ces ν solutions aux environs de $x = \alpha$, se groupent en cycles de $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ éléments, et que les degrés du premier terme du développement sont respectivement

$$\frac{\rho_1}{\mu_1},\quad \frac{\rho_2}{\mu_2},\quad \ldots,\quad \frac{\rho_k}{\mu_k},$$

où

$$\frac{\rho_1}{\mu_1} \geqq \frac{\rho_2}{\mu_2} \geqq \ldots \geqq \frac{\rho_k}{\mu_k},$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ étant des nombres entiers positifs donnés. Si φ et ψ, affectés d'indices quelconques, désignent des fonctions *entières* de x, si l'on pose $\delta = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k$ et que l'on représente par $\delta_{\gamma_\iota}^{(\iota)}$, pour chaque indice et chaque accent, soit le plus grand entier contenu dans l'expression

$$(2)\qquad (\mu_\iota - \gamma_\iota)\frac{\rho_\iota}{\mu_\iota} + \rho_{\iota+1} + \rho_{\iota+2} + \ldots + \rho_k,$$

soit ce plus grand entier augmenté d'une unité, suivant que l'expression (2) est elle-même un nombre entier ou non, l'équation algébrique envisagée est nécessairement de la forme

$$\begin{aligned}(x-\alpha)^{\delta}\varphi_0 &+ (x+\alpha)^{\delta_1^{(1)}}\varphi_{11}y + (x-\alpha)^{\delta_2^{(1)}}\varphi_{12}y^2 + \ldots + (x-\alpha)^{\delta_{\mu_1}^{(1)}}\varphi_{1\mu_1}y^{\mu_1}\\ &+ (x-\alpha)^{\delta_1^{(2)}}\varphi_{21}y^{\mu_1+1} + (x-\alpha)^{\delta_2^{(2)}}\varphi_{22}y^{\mu_1+2} + \ldots + (x-\alpha)^{\delta_{\mu_2}^{(2)}}\varphi_{2\mu_2}y^{\mu_1+\mu_2}\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ (x-\alpha)^{\delta_1^{(k)}}\varphi_{k1}y^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{k-1}+1} + \ldots + (x-\alpha)^{\delta_{\mu_k-1}^{(k)}}\varphi_{k\mu_k-1}y^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_k-1}\\ &+ \psi_0 y^{\nu} + \psi_1 y^{\nu+1} + \ldots + \psi_{n-\nu-1}y^{n-1} + y^n = 0,\end{aligned}$$

où les fonctions entières $\varphi_0, \varphi_{1\mu_1}, \varphi_{2\mu_2}, \ldots, \varphi_{k-1,\mu_{k-1}}$ et ψ_0 de la variable x, ne s'annulent pas pour $x = \alpha$.

M. Kœnigsberger recherche ensuite des conditions qui soient suffisantes pour que l'on puisse énoncer la réciproque de ce théorème.

En appliquant les résultats obtenus à des cas très particuliers, il parvient aux trois propositions que voici :

I. Supposons que tous les coefficients de l'équation (1), sauf le premier, aient un facteur linéaire commun ; si le premier membre de l'équation (1) est divisible par un polynome du même type dont tous les coefficients aient donc aussi, sauf le premier, le même facteur commun, et si ce facteur commun figure dans le dernier coefficient du polynome diviseur à une puissance inférieure d'une unité à celle à laquelle il figure dans le dernier coefficient $f_n(x)$ du premier membre de l'équation (1), on peut affirmer que le quotient de ce premier membre de l'équation (1) par le polynome diviseur envisagé est nécessairement *irréductible*.

On en conclut, entre autres, l'irréductibilité de l'équation de la division du cercle appartenant à une puissance d'un nombre premier et supposée débarrassée des racines non primitives de l'unité.

II. Soient

$$y_1,\quad y_2,\quad \ldots,\quad y_m;\qquad \eta_1,\quad \eta_2,\quad \ldots,\quad \eta_n$$

les solutions des deux équations algébriques

$$y^m + (x-\alpha)^{e_1} f_1(x)\, y^{m-1} + (x-\alpha)^{e_2} f_2(x)\, y^{m-2} + \ldots \\ + (x-\alpha)^{e_{m-1}} f_{m-1}(x)\, y + (x-\alpha)^r f_m(x) = 0,$$

$$y_n + (x-\alpha)^{\varepsilon_1} \varphi_1(x)\, y^{n-1} + (x-\beta)^{\varepsilon_2} \varphi_2(x)\, y^{n-2} + \ldots \\ + (x-\beta)^{\varepsilon_{n-1}} \varphi_{n-1}(x)\, y + (x-\alpha)^\rho \varphi_n(x) = 0,$$

où $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_m(x)$; $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ désignent des fonctions entières de x, telles que $f_m(\alpha)$ et $\varphi_n(\alpha)$ soient différents de zéro, où r désigne un entier premier relatif à m, ρ un entier premier relatif à n, où enfin e_i désigne pour chaque indice i, le plus grand entier contenu dans $\frac{ir}{m}$, augmenté d'une unité, et ε_i le plus grand entier contenu dans $\frac{i\rho}{n}$, augmenté d'une unité.

Supposons que la première des deux équations algébriques envisagées n'ait pas de point de ramification en $x = \beta$, et que la seconde n'ait pas de point de ramification en $x = \alpha$, et envisageons alors une équation de degré mn de la forme

$$Y^{mn} + F_1(x)\, Y^{mn-1} + F_2(x)\, Y^{mn-2} + \ldots + F_{mn}(x) = 0,$$

où $F_1(x)$, $F_2(x)$, $\ldots$, $F_{mn}(x)$ désignent des fonctions entières telles que les mn racines de cette équation soient des fonctions bilinéaires

$$\psi_0(x)\, y_\lambda \eta_\mu + \psi_1(x)\, y_\lambda + \psi_2(x)\, \eta_\mu + \psi(x)$$

des solutions y_1, y_2, $\ldots$, y_m, η_1, η_2, $\ldots$, η_n des deux équations proposées, à coefficients $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi(x)$ fonctions *entières* de x. Si m et n sont premiers relatifs, l'équation envisagée de degré mn sera nécessairement *irréductible*.

On en conclut, entre autres, l'irréductibilité de l'équation de la division du cercle, correspondant à un nombre entier quelconque et supposée débarrassée des racines non primitives de l'unité.

III. Envisageons l'équation

$$y^{2n} + (x-\alpha)^{e_1} F_1(x) y^{2n-1} + (x-\alpha)^{e_2} F_2(x) y^{2n-2} + \dots + (x-\alpha)^{e_{2n-1}} F_{2n-1}(x) y + (x-\alpha)^r F_{2n}(x) = 0,$$

où $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_{2n}(x)$ désignent des fonctions entières de x, telles que $F_{2n}(\alpha)$ soit différent de zéro, où r est un nombre impair, premier relatif à n, où e_i représente, pour chaque indice i, le plus grand entier contenu dans $\frac{ir}{2n}$, augmenté d'une unité. Cette équation est toujours irréductible par adjonction de fonctions rationnelles quelconques; si β désigne un nombre quelconque différent de α, elle est encore irréductible par adjonction de $\sqrt{x-\beta}$; sous certaines conditions qu'il faut chaque fois déterminer, elle peut être réductible par adjonction de $\sqrt{x-\alpha}$.

On en conclut que l'équation de la division du cercle correspondant à un nombre premier p qui, comme on sait, est réductible par adjonction de $\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$, reste au contraire *irréductible* par adjonction de $\sqrt{(-1)^{\frac{q-1}{2}} q}$, quel que soit le nombre premier q différent de p que l'on envisage.

Si, dans le plan des imaginaires, on envisage toutes les droites passant par l'origine des coordonnées et faisant avec l'axe des quantités réelles un angle dont la mesure soit commensurable à π, aucune de ces droites, sauf les bissectrices des axes des quantités réelles et purement imaginaires, ne contient l'affixe d'un nombre premier complexe de la forme $\sqrt{p}$, où p désigne un nombre premier réel quelconque de la forme $4n+1$.

Hartmann (*J.*). — Sur l'échelle du spectre solaire de Kirchhoff. (742-756).

On trouve dans cet article l'historique des recherches que l'on a faites pour transformer en longueurs d'ondes les nombres fournis par la division du spectre adoptée par Kirchhoff. On y démontre que le spectre de Kirchhoff est formé de cinq parties de dispersions différentes. Enfin, on y établit des formules permettant d'effectuer avec une grande approximation la transformation cherchée.

Lummer (*O.*) et *Pringsheim* (*E.*). — Recherches sur la répartition de l'énergie dans le spectre d'un corps noir. (785).

Auwers. — Sur de nouvelles recherches destinées à déterminer la trajectoire de Procyon. (845). Cette Communication faite à l'Académie ne sera pas publiée.

La trajectoire elliptique à grande excentricité donnée par M. Sée permet, il est vrai, de déterminer approximativement la position du compagnon Procyon, récemment découvert, mais elle ne permet pas de rendre compte des observations méridiennes faites sur Procyon lui-même, depuis 148 ans, ni des obser-

vations très précises de sa déclinaison faites par O. Struve, de 1851 à 1890. En utilisant toutes ces observations on trouverait plutôt une ellipse de petite excentricité; mais cette ellipse ne permettrait pas de représenter approximativement le mouvement réel du compagnon Procyon. La question reste donc ouverte.

J. M.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM. In-4° [1].

Tome VI; mai 1897-avril 1898.

Korteweg (*D.-J.*). — Sur certaines vibrations d'ordre supérieur d'intensité anormale (vibrations de relation) dans les mécanismes à plusieurs degrés de liberté. (3-6).

Compte rendu d'une étude qui va paraître dans les *Verhandelingen* de l'Académie.

Lorentz (*H.-A.*). — Sur la résistance qu'éprouve un courant de liquide dans un tuyau cylindrique. (28-51).

Aussi longtemps que la vitesse moyenne d'un courant stationnaire de liquide ne surpasse pas une limite dépendant du diamètre du tuyau et du caractère du liquide, les particularités du mouvement se déduisent des équations de mouvement connues. Les particules se meuvent dans la direction de l'axe et la différence de pression de deux sections, le glissement le long de la paroi étant impossible, est proportionnelle au coefficient de frottement intérieur et à la première puissance de la vitesse moyenne; de plus, dans le cas de tuyaux circulaires, elle se détermine d'après la loi de Poiseuille. Au contraire, si la vitesse moyenne surpasse cette limite (*vitesse critique* de M. Osborne Reynolds), les phénomènes sont bien différents. La différence de pression, nécessaire pour la continuation du courant, et donc en même temps la résistance exercée par le tuyau, devient proportionnelle à une puissance plus élevée de la vitesse moyenne U, d'après plusieurs observations proportionnelles à U^2, suivant M. Reynolds à $U^{1,7}$. Que la résistance puisse être proportionnelle à une puissance de la vitesse moyenne paraît encore un peu singulier, quoique les belles épreuves de M. Reynolds (*Phil. Trans.*, vol. CLXXIV, p. 935; 1883) aient révélé le vrai caractère de ce mouvement à grande vitesse. Ce mouvement se décompose en un mouvement dans la direction de l'axe (mouvement principal) et en des tourbillons. L'auteur, après avoir critiqué et complété les travaux de MM. Reynolds et Boussinesq (*Phil. Trans.*, vol. CLXXXVI, p. 123,

(1) Voir *Bulletin*, T. XXII, p. 89.

1895, et *Mémoires des Savants étrangers*, t. XXIII, n° 1, 1877) sur le mouvement principal, étudie les tourbillons accessoires. Ses résultats importants démontrent que l'accroissement de la résistance des mouvements à grande vitesse est en rapport intime avec l'observation bien connue qu'en procédant de l'axe vers la paroi la vitesse diminue d'abord insensiblement et ensuite de plus en plus considérablement, que le travail nécessaire à surmonter le frottement du mouvement principal,abstraction faite du travail exigé à surmonter le frottement des tourbillons, est plus grand que dans le cas où ces tourbillons ne se présentent pas.

Kapteyn (*J.-C.*). — Sur la distribution des vitesses cosmiques. (51-60).

Complément d'une communication antérieure (*Verslag*, t. IV, p. 4-18). Dans la communication précédente l'auteur avait fait voir comment la loi de la distribution des vitesses cosmiques peut être déduite de la manière sous laquelle les angles p (entre les mouvements propres totaux et le mouvement purement parallactique) sont distribués sur les 180°. Ici, il démontre que, de même le montant du mouvement propre peut mener au même but et qu'ainsi l'exactitude des résultats est augmentée considérablement. A l'aide d'une certaine courbe plane $f(\rho, \varphi) = 0$, dont les rayons vecteurs ρ représentent les mouvements propres moyens qui correspondent aux valeurs φ, il trouve que la distribution des angles p sur les 180°, et de même celle des valeurs moyennes μ du mouvement propre correspondant aux valeurs différentes de p, est indépendante des distances et ne dépend donc que de la loi des vitesses. Ainsi, en acceptant l'hypothèse b de la communication précédente, il faut qu'on puisse trouver cette loi des vitesses. A l'aide des observations de Bradley sur 2355 étoiles divisées en 17 groupes l'auteur calcule l'asymétrie

$$\theta = \log(n_0^{90} + n_{90}^{180}) - \log(n_0^{-90} + n_{90}^{180})$$

dans la distribution des p, où n_a^b indique le nombre des étoiles pour lesquelles p est compris entre a et b. Il trouve que θ varie très sensiblement avec la position. Cette variation est sensiblement proportionnelle à $\sin\chi$ ou plutôt à $\sin\chi\cos\delta$, où χ représente l'angle entre les grands cercles qui joignent le centre de chacune des 17 régions au pôle et à l'antiapex, tandis que δ indique la déclinaison. Donc l'auteur croit devoir accepter une cause générale de cette variation. Ces causes peuvent être : 1° un mouvement systématique dans la direction du pôle austral de toutes les étoiles à mouvement propre considérable; 2° une correction négative de la déclinaison de l'apex; 3° une correction négative de tous les mouvements propres en déclinaison et bien une correction constante β ou une correction $\beta\cos\delta$ proportionnelle à $\cos\delta$, à mesure qu'on pose la variation proportionnelle à $\sin\chi$ ou à $\sin\chi\cos\delta$. De ces trois causes l'auteur élimine la première et la seconde, tandis qu'il croit la troisième très plausible.

Wind (*C.-H.*). — Sur la dispersion de la rotation magnétique du plan de polarisation. (92-94).

M. Poincaré croit pouvoir déduire de la théorie de M. H.-A. Lorentz une formule pour la dispersion susdite qui serait en contradiction évidente avec les

expériences (voir *L'Éclairage électrique*, t. XI, p. 488; 1897). Au contraire, M. Wind, loin d'être convaincu par le raisonnement de M. Poincaré, tâche de faire voir comment la théorie de M. Lorentz, d'après l'exposé que l'auteur lui-même en a donné tout récemment, mène à une formule de dispersion tout à fait d'accord avec l'expérience.

Lorentz (H.-A.). — Remarques sur la communication de M. Wind. (94-98).

Dans ce travail M. Lorentz indique l'erreur qui s'est glissée dans les considérations de M. Poincaré et développe une formule de dispersion plus générale dont celle de M. Wind forme un cas particulier; de plus, il fait ressortir que cette formule est d'accord avec les résultats des expériences de M. Verdet.

Lorentz (H.-A.). — Sur la polarisation partielle de la lumière émise par une flamme placée dans un champ magnétique. (193-208).

Si l'on place une flamme de sodium entre les pôles d'un électro-aimant et qu'au moyen d'un polariscope de Savart on examine la lumière émise dans une direction perpendiculaire aux lignes de force, on constate une polarisation partielle, les vibrations électriques parallèles aux lignes de force ayant une moindre intensité que celles qui leur sont perpendiculaires. L'auteur fait voir que ce phénomène, dont la découverte est due à MM. Egoroff et Georgiewsky (*Comptes rendus*, 5 avril, 3 mai, 5 juillet 1897), peut être attribué à l'absorption que les rayons provenant de la partie postérieure de la flamme éprouvent dans la partie antérieure. D'après une loi bien connue, une telle absorption atteint son maximum s'il y a égalité de périodes entre les particules lumineuses et les particules absorbantes; ce cas se présente dans l'absence d'une force magnétique extérieure, toutes les particules vibrantes ayant alors la même période T. Après l'excitation du champ magnétique les oscillations parallèles aux lignes de force conservent cette période; mais, comme M. Zeeman l'a démontré, les vibrations perpendiculaires à ces lignes présentent deux nouvelles périodes $T - t$ et $T + t$. Il en résulte que l'absorption est déterminée en ce qui regarde les vibrations de la seconde espèce et que, dans la lumière émise, ces vibrations auront une plus grande intensité que celles de la première espèce. Le Mémoire de M. Lorentz contient toute une théorie mathématique de ces absorptions, basée sur la considération du mouvement des ions dans le champ magnétique, et la description de l'expérience suivante qui confirme l'explication proposée : Si la flamme L_1, dont il a été question dans ce qui précède, est traversée par les rayons d'une seconde flamme de sodium L_2, placée elle-même hors du champ magnétique, les vibrations de ces rayons, en tant qu'elles sont perpendiculaires aux lignes de force, doivent éprouver une moindre absorption, dès que le champ magnétique a détruit l'égalité de périodes que ces vibrations présentent dans les deux flammes. Il en doit résulter pour la lumière de L_2, après son passage à travers L_1, une polarisation analogue à celle qui existe dans la lumière de L_1. C'est ce qu'on observe en effet, en opérant sous des circonstances favorables.

Van der Waals (J.-D.). — Sur la représentation graphique des équilibres à l'aide de la fonction ξ. (209-218).

Pour un mélange de deux matières les conditions des phénomènes d'équilibre à une température donnée s'expriment d'une manière naturelle à l'aide des propriétés de la fonction ψ. Si la valeur de ψ est considérée comme dépendant du volume et de la composition du mélange, ψ est une fonction caractéristique, de manière que toutes les quantités thermodynamiques se déduisent des dérivées partielles de ψ et de quelques combinaisons connues de ces dérivées. Parce que la fonction ψ est uniforme, la représentation géométrique n'exige qu'une nappe unique de surface. Aussi la fonction $\xi = \psi + pv$, exprimée en température, pression et composition, est une fonction caractéristique; seulement la surface qui en donne la représentation admet trois feuilles, de manière qu'à une phase homogène quelconque il correspond en général trois valeurs de ξ. L'auteur étudie cette représentation dans le cas d'un mélange de trois matières, la température et la pression étant données. Le théorème général « une matière se range sous une pression et une température données de manière que la somme des valeurs de ξ soit minimum » le conduit à des propriétés de la surface ξ et à des constructions qui s'y rapportent.

Kapteyn (J.-C.) — Vitesse du système solaire à travers l'espace et parallaxe moyenne des étoiles de grandeurs différentes. (238-244).

Lorentz (H.-A.). — L'éther prend-il part au mouvement annuel de la Terre? Remarques à propos d'un Mémoire récent de M. A.-A. Michelson. (266-274).

Dans l'*American Journal of Science*, série 4, t. III, p. 475, 1897, M. Michelson a décrit une expérience d'interférence par laquelle on aurait peut-être pu découvrir une différence de vitesse entre deux couches horizontales de l'éther. Le résultat négatif de cette tentative est en accord avec l'hypothèse que le mouvement de l'éther, si toutefois il existe, est irrotational, c'est-à-dire que les composantes de la vitesse sont égales aux dérivées partielles d'une certaine fonction des coordonnées. C'est une des hypothèses sur lesquelles M. Lorentz a fondé sa théorie de l'aberration, hypothèses qu'on peut résumer de la manière suivante :

A. Les corps transparents contiennent de l'éther qui peut se mouvoir librement à travers la matière pondérable. A la surface de séparation de deux milieux transparents il y a continuité des composantes de la vitesse de l'éther.

B. Le mouvement de l'éther est irrotational.

C. L'entraînement des ondes lumineuses par les corps transparents est isotrope et déterminé par le coefficient bien connu de Fresnel.

Dans les *Archives néerlandaises*, t. XXI, p. 103, 1887, l'auteur a démontré que ces hypothèses suffisent à l'explication de l'aberration et de plusieurs phénomènes qui s'y rattachent; il y parvint aussi à une théorie qui peut être regardée comme une modification de celle qui avait été proposée par M. Stokes. Ce savant avait admis en effet l'hypothèse B, mais de plus il supposait qu'à la

surface de la Terre la vitesse de l'éther est égale à celle de la planète. Or cette dernière hypothèse étant en contradiction avec B, il était nécessaire de l'abandonner et de joindre à B les hypothèses A et C. Selon l'auteur on n'a à choisir qu'entre la théorie, ainsi modifiée, de M. Stokes et celle de Fresnel (absence de tout mouvement de l'éther) qui, du reste, y est comprise comme un cas particulier. Dans chacune de ces deux théories il faut encore introduire une nouvelle hypothèse, si l'on veut rendre compte du résultat négatif de l'expérience que M. Michelson a exécutée en 1881 (*American Journal of Science,* série 3, t. XXII, p. 120) et qu'il a répétée en 1887 avec le concours de M. Morley (*American Journal of Science,* série 3, t. XXXIV, p. 333). Cette hypothèse aussi énoncée par M. Fitz-Gerald, peut être exprimée dans la forme suivante : Soient l_1 et l_2 deux dimensions perpendiculaires entre elles du corps solide (laiton ou pierre) qui, dans ces expériences, a servi de support à l'appareil interférentiel, et supposons que ces lignes aient la même longueur, si le corps est en repos par rapport à l'éther environnant. Alors, si le corps vient à se déplacer à travers ce milieu avec une vitesse p dans la direction de l_1, le rapport des longueurs de l_1 et l_2 deviendra $1 - \frac{p^2}{2V^2}$, V étant la vitesse de la lumière dans l'éther.

Van der Waals (J.-D.). — Règle approximative pour la forme de la courbe de plissement d'un mélange. (279-303).

La forme de la courbe de plissement d'un mélange de deux substances n'a été étudiée expérimentalement qu'en deux cas particuliers, par M. J.-P. Kuenen. Dans ces deux cas la forme de la courbe de plissement est très différente. Dans le premier cas (de CO^2 et CH^3Cl) la courbe $f(x, y) = 0$ possède un point où la pression y est maximum, dans le second cas (de Az^2O et C^2H^6) elle admet un point où la température x est minimum. Ces deux cas présentant des résultats divergents, il est probable que dans d'autres cas on trouvera encore bien d'autres formes. Donc, la recherche de toutes les formes possibles a sa raison d'être. Seulement, les déterminations expérimentales sont laborieuses et prennent beaucoup de temps. Donc il est désirable d'essayer si la théorie n'est pas à même de révéler toutes les formes possibles de la courbe. De plus, la théorie seule peut décider quelques détails plus délicats. Ainsi l'auteur a retracé cette théorie mathématique; en voici les résultats principaux : En indiquant par $1 - x$ et x les proportions des deux substances mélangées et en posant pour abréger

$$a_1(1 - x)^2 + 2a_{1,2}(1 - x)x + a_2x^2 = a_x,$$

$$b_1(1 - x) + b_2x = b_x,$$

on trouve l'équation de la courbe de plissement par l'élimination de x entre les équations

$$\frac{\tau}{273} = \frac{8}{27}\frac{a_x}{b_x}, \qquad p = \frac{1}{27}\frac{a_x}{b_x^2}.$$

L'équation cherchée est donc

$$Ap^2 + 2Bp\tau + C\tau^2 = Dp\tau^2,$$

où A, B, C, D représentent des constantes qui dépendent des cinq paramètres a_1, $a_{1,2}$, a_2, b_1, b_2. Donc la courbe de plissement elle-même est une cubique rationnelle dont l'origine est le point double. Dans le premier des deux cas mentionnés on a $A = -1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{12}$ pour $D = 1$; alors l'origine est un point double à branches réelles (nœud); dans le second cas on a $A = 4$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$ pour $D = 1$ et l'origine est un point double à branches imaginaires (point isolé).

Kapteyn (*W.*). — Sur quelques intégrales définies. (329-335).

Applications de la formule :

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(x)\left[l\,\frac{1-z}{1-z}\right]^m\frac{dz}{z} = \sum \frac{f(z)}{z}\left[l\,\frac{1-z}{1-z}\right]^m,$$

où $f(z)$ représente une fonction, uniforme à l'intérieur d'une circonférence décrite avec un rayon égal à l'unité autour de l'origine de la variable complexe $z = x + iy$ comme centre, n'admettant dans ce domaine d'autres points singuliers que des pôles, tandis que le chemin d'intégration forme le contour du domaine indiqué après qu'on l'a diminué des points $z = \pm 1$ à l'aide de deux demi circonférences décrites avec un rayon minimum de ces points $z = \pm 1$ comme centres. En remplaçant $f(z)$ successivement par 1, $\frac{z}{z^2-1}$, z^{n+1}, $(z+1)^n$, l'auteur trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log\operatorname{tang}\theta)^{2k}\,d\theta = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} S_k,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log\operatorname{tang}\theta)^{2k-1}\,d\theta = 0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log\operatorname{tang}\theta)^{2k}\,\frac{d\theta}{\cos 2\theta} = 0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log\operatorname{tang}\theta)^{2k-1}\,\frac{d\theta}{\cos 2\theta} = \frac{\pi^{2k}}{2^{2k-1}}\,T_k,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4k\theta\,\log\operatorname{tang}\theta\,d\theta = 0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2(2k-1)\theta\,\log\operatorname{tang}\theta\,d\theta = -\frac{\pi}{2(2k-1)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k\theta\,\cos k\theta\,\log\operatorname{tang}\theta\,d\theta = -\frac{\pi}{2^{k+1}}\sum_{n=1}^{n=k}\frac{2^n}{n},$$

où les S_k sont les coefficients du développement connu

$$\sec x = 1 + S_1\frac{x^2}{2!} + S_2\frac{x^4}{4!} + \dots$$

tandis que la relation

$$T_k = \frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)}{2k} B_k$$

lie les coefficients T_k aux nombres de Bernoulli.

Van de Sande Bakhuyzen (*H.-G.*). — Remarques sur la distribution des étoiles dans l'espace. (394-404).

Un des moyens rares de recherche sur la distribution des étoiles dans l'espace consiste dans l'étude des données statistiques sur les nombres d'étoiles qui semblent faire partie d'un même groupe, ou par leur clarté commune, ou par leur spectre, ou par leur degré de mouvement propre. Ces données, mises en rapport avec des hypothèses quelconques sur la distribution des étoiles, mènent donc à une appréciation du degré de probabilité de ces hypothèses. De cette manière on a obtenu des résultats bien importants. Seulement les résultats déduits de l'étude de la statistique des mouvements propres ont souvent une valeur scientifique plus petite, parce qu'on ne se rend pas toujours compte de l'influence de l'hypothèse en question sur le nombre des étoiles à un mouvement propre donné. Cette influence a été évaluée d'une manière rigoureuse par M. J.-C. Kapteyn ([1]), qui a cherché la relation entre le nombre des étoiles dont le mouvement propre fait un angle donné avec la direction de l'apex et cet angle. Au contraire, l'auteur désire connaître la relation entre le nombre des étoiles et la grandeur du mouvement propre. A cet effet il suppose que toutes les étoiles possèdent des vitesses linéaires égales de toutes les directions possibles et que le système solaire est animé d'une vitesse différente. Alors l'évaluation du nombre des étoiles dont le mouvement apparent, vu du soleil, admet une valeur angulaire déterminée, mène au problème de la complanation de la partie de la surface d'une sphère située à l'intérieur d'un cylindre droit excentrique. L'intégrale elliptique qui y entre doit être intégrée suivant le rayon du cylindre et la distance de l'axe du cylindre au centre de la sphère, de manière que le résultat ne se présente pas dans une forme abordable. Donc, eu égard à la difficulté du calcul, l'auteur croit que la formule très simple obtenue par M. G. Jaeger (*Sitzungsberichte* de Vienne, t. CIII, p. 145) n'est pas au-dessus de tout doute. L'auteur s'occupe ensuite du problème simplifié où l'on n'introduit pas la valeur entière du mouvement propre, mais sa projection sur le grand cercle qui passe par l'apex et par l'étoile, de manière à échapper à l'influence du mouvement propre du système solaire; enfin il s'occupe encore d'autres hypothèses.

Schoute (*P.-H.*). — Sur les focales planes et les surfaces focales. (404-407).

L'auteur étend ses résultats sur les focales planes de courbes planes à un ou plusieurs axes de symétrie (*Comptes rendus*, 7 déc. 1897) aux surfaces focales de surfaces à un ou plusieurs plans de symétrie. A cet effet, il est nécessaire de s'imaginer un espace E^4 à quatre dimensions, où OX, OY, OZ, OT représentent quatre axes perpendiculaires deux à deux. Alors chaque surface S

([1]) *Verslag*, t. VI, p. 51-60.

située dans l'espace tridimensional O(X, Y, Z) dont le plan O(X, Y) est plan de symétrie, admet une surface focale S′ située dans l'espace tridimensional O(X, Y, T) dont le plan O(X, Y) est plan de symétrie tout de même. La relation réciproque entre ces deux surfaces est donnée par le système renversible de formules de transformation

$$x_1 = x_2 + z\frac{dz}{dx}, \qquad y_1 = y_2 + z\frac{dz}{dy}, \qquad t = iz\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Ainsi l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ admet pour surfaces focales les deux hyperboloïdes $\frac{x^2}{a^2 - c^2} - \frac{y^2}{b^2 - c^2} - \frac{t^2}{c^2} = 1$ et $\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} - \frac{t^2}{b^2} = 1$ et la surface cubique $3az^2 = 2(x^3 - y^3)$ admet pour surface focale la surface du huitième ordre

$$\begin{aligned}9\{4[3(x^2 + y^2 + t^2) - 3a(x - y) + a^2]^2 \\ - a[(a + 4x)^2 - (a + 4y)^2]\}^2 = 16a^2(a - 4x)^2(a + 4y)^2.\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où S est de révolution autour de l'axe OZ, S′ est de révolution autour de l'axe OT, et alors les formules de transformation entre les courbes méridiennes de ces deux surfaces prennent la forme très simple indiquée dans la Note citée.

De Vries (J.). — Sur quelques groupes de cercles. (418-421).

Dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* on trouve (t. IV, p. 122) la question suivante : n droites d'un plan peuvent-elles être choisies de façon que les $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ cercles circonscrits aux triangles qu'elles forment, prises trois à trois, passent par un même point? Au sujet de cette question qui est résolue par n tangentes quelconques d'une même parabole, le point de concours des cercles étant le foyer de la courbe, l'auteur rappelle la figure du quadrilatère complet avec ses quatre cercles; par une inversion dont le centre ne se trouve pas dans le plan de la figure, il la transforme en une configuration de huit points et de huit cercles sur la sphère; de quatre manières différentes ces huit points forment les sommets de deux tétraèdres de Moebius à la fois inscrits et circonscrits l'un à l'autre; les sommets d'un cube en forment l'exemple le plus simple. Ensuite il passe au quintilatère complet et démontre, encore à l'aide d'une inversion de la figure plane en une figure sphérique, le théorème de Miquel, d'après lequel les cinq foyers des paraboles qui touchent quatre des cinq côtés du quintilatère donné se trouvent sur une même circonférence.

Kluyver (J.-C.). — Sur le développement du binome. (421-432).

Si un des deux événements contraires P, Q est le résultat nécessaire d'une expérience déterminée et si p, q représentent les probabilités de ces événements, ou $p + q = 1$ et $p > q$, chaque terme $n_\beta p^\alpha q^\beta$ du binome $(p + q)^n$ fait connaître la probabilité d'un certain résultat de α fois P et β fois Q dans le cas de $n = (\alpha + \beta)$ expériences prises l'une après l'autre, et le résultat le plus probable correspond au plus grand terme. Ici l'auteur se demande si la somme des déviations dans l'une des deux directions équivaut à la somme des déviations dans l'autre, c'est-à-dire si les deux sommes, d'abord du groupe des

termes qui précèdent le terme maximum, ensuite du groupe des termes qui le suivent, sont égales. En 1895, M. T.-C. Simmons a cherché à démontrer (voir *London Math. Soc. Proceedings*, t. XXVI, p. 290) que, pour $p > q$, la première somme surpasse la seconde. Mais, d'après les recherches plus directes de l'auteur, la chose est bien plus délicate. Si A, M, B représentent respectivement la somme des termes qui précèdent le terme maximum, le terme maximum et la somme des termes qui suivent le terme maximum, M. Simmons trouve

$$A - B = \frac{1}{3}(p - q)M.$$

D'après M. Kluyver, cette formule approchée exige une correction; elle est plus exacte sous la forme

$$A - B = \left[\frac{1}{3}(p - q) + 2\theta\right]M,$$

où θ, comprise entre -1 et $+1$, est donnée par les relations

$$\alpha_m = np - \theta, \qquad \beta_m = nq + \theta,$$

α_m et β_m se rapportant au terme maximum M. Ainsi, comme le démontre le tableau suivant,

$(p+q)^n$.	$p-q$.	θ.	$\frac{A-B}{M}$.	$\frac{1}{3}(p-q)+2\theta$.
$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^5$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0,763	0,778
$\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right)^7$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	−0,131	−0,111
$\left(\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\right)^9$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{4}{7}$	−0,981	−1
$\left(\frac{10}{13}+\frac{3}{13}\right)^{27}$	$\frac{7}{13}$	$-\frac{3}{13}$	−0,278	−0,282

déjà pour des valeurs assez petites de n, la formule corrigée donne des résultats très satisfaisants, tandis que la formule originale de M. Simmons est en erreur quant au signe de A — B en trois des quatre cas cités.

Les résultats de cette recherche s'appliquent directement au problème suivant : Dans un certain jeu, on a la probabilité p de gagner q et la probabilité q de perdre p, où $p < q$; on demande laquelle des deux probabilités G et P de gagner ou de perdre après n expériences réitérées est la plus grande.

L'auteur trouve que les deux probabilités G et P, quoique tant soit peu égales, oscillent l'une autour de l'autre avec n, de manière que l'on a $G > P$ pour certaines valeurs de n et $G < P$ pour d'autres. Cependant, si n reste indéterminé, la probabilité du cas $G > P$ surpasse celle du cas contraire $G < P$.

De Vries (G.). — Le tourbillon cyclonal. (432-448).

Dans cette étude, rédigée en français, l'auteur s'occupe d'un tourbillon de révolution, en même temps animé d'une rotation autour de son axe. Son analyse est en rapport avec les équations de mouvement données par M. A.-B. Basset (*Treatise on Hydrodynamics*, t. II, p. 81); ses résultats sont d'accord avec les études de MM. Helm Clayton et Douglas Archibald.

Schoute (*P.-H.*). — Franciscus Johannes Van den Berg. (456).

La biographie de F.-J. Van den Berg, de 1864 à 1884 professeur de Mathématiques et de Mécanique appliquée à l'École polytechnique de Delft, a paru dans le *Jaarboek* de l'Académie de 1897; elle est suivie d'une liste des travaux de ce savant contenant une analyse très sommaire de chaque Mémoire.

Kasterin (*N.*). — Sur la dispersion des ondes acoustiques en un milieu hétérogène. (460-480, 532).

Dans cette communication, rédigée en allemand, le Professeur de Moscou, pour se former une idée nette du mécanisme de l'absorption et de la dispersion de la lumière dans les milieux optiques, étudie les phénomènes analogues de la propagation des ondes acoustiques dans un milieu artificiel non homogène. D'après ses expériences et théories, un certain degré d'approximation fait trouver une analogie parfaite entre la propagation des ondes acoustiques dans un milieu non homogène et celle de la lumière dans les milieux absorbants. Ici il étudie en détail le passage du son à travers un milieu homogène chargé d'un système régulier de petites sphères égales, rigides et fixes, formant dans le milieu illimité de l'air une couche d'une certaine épaisseur; les centres de ces sphères sont les sommets de parallélépipèdes droits égaux, aux arêtes a, b, c, la direction a étant perpendiculaire aux plans limitants de la couche. Le problème général de la propagation du son à travers cette couche exige qu'on suppose que le rayon r des sphères et les distances a, b, c aient par rapport à la longueur d'onde λ tout ordre de grandeur; il se simplifie si r et b, c sont petits en comparaison de λ. Ici l'auteur ne considère que les cas les plus simples. Enfin il vérifie ses résultats théoriques à l'aide d'expériences prises avec des tuyaux d'orgue remplis de petites sphères.

Lorentz (*H.-A.*). — Phénomènes optiques qui dépendent de la charge électrique et de la masse des ions. (506-519, 555-565).

En mesurant le déplacement des raies spectrales causé par des forces magnétiques (effet Zeeman), on peut trouver la valeur du rapport $\frac{e}{m}$, e étant la charge et m la masse des ions qui sont en jeu dans les phénomènes lumineux. Il y a d'autres phénomènes, la dispersion par exemple, qui dépendent de la valeur de $\frac{e^2}{m}$. Pour le faire voir l'auteur considère un corps dont les molécules contiennent des ions capables de vibrer autour d'une position d'équilibre. En supposant qu'il y ait plusieurs espèces de ces particules et en désignant, pour une quelconque de ces espèces, par N le nombre par unité de volume, par e et m la charge et la masse et par n_0 le nombre des vibrations propres pendant un temps 2π, l'auteur trouve pour l'indice de réfraction μ la formule théorique suivante :

$$\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 2} = \frac{4}{3}\pi \sum V^2 N \frac{e^2}{m} \cdot \frac{1}{n_0^2 - n^2},$$

où Σ se rapporte aux différentes espèces d'ions, tandis que V et n représentent

la vitesse de la lumière dans l'éther et le nombre des vibrations de la lumière incidente pendant le temps 2π. La charge e doit être exprimée en unités électromagnétiques. S'il n'y a qu'une seule espèce d'ions, la formule prend la forme

$$\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 2} = \frac{4}{3}\pi V^2 \frac{\Delta}{p}\left(\frac{e}{m}\right)^2 \cdot \frac{1}{n_0^2 - n^2},$$

Δ étant la densité du milieu et p le rapport entre la masse d'une molécule et celle de l'ion mobile qu'elle contient. Cette formule est appliquée aux mesures de M. Ketteler sur la dispersion de l'hydrogène.

Ensuite M. Lorentz considère un second phénomène où entre le quotient $\frac{e^2}{m}$, l'absorption produite par une masse gazeuse. Il suppose que, pendant le temps qui s'écoule entre deux chocs successifs d'une molécule, l'ion qu'elle contient puisse vibrer librement sous l'influence de la lumière incidente, mais qu'à chaque rencontre la vibration acquise soit profondément dérangée, l'énergie vibratoire étant ainsi convertie en chaleur.

Dans la seconde partie du travail M. Lorentz discute principalement la largeur des raies d'absorption. La différence des nombres de vibrations par unité de temps qui correspondent aux bords d'une raie est du même ordre de grandeur que le nombre des chocs qu'une particule rayonnante subit pendant l'unité de temps. Quant à la position de la raie dans le spectre, elle doit se déplacer légèrement vers le rouge si l'on augmente la densité de la vapeur, mais, tant qu'il s'agit d'une absorption aussi faible que celle d'une flamme de sodium, le déplacement reste inférieur à la largeur de la raie. Il en est de même du déplacement qu'indiquent les formules pour le cas où la densité d'un gaz étranger mélangé à la vapeur absorbante serait augmentée; donc la théorie mathématique développée par l'auteur ne suffit pas encore à rendre compte des observations de M. Humphreys sur l'influence de la pression sur la position des raies spectrales.

Wythoff (*W.-A.*). — Un système d'opérations dans l'espace à quatre dimensions analogues aux quaternions de Hamilton. (520-530).

Un *planivecteur*, ou vecteur tout court, est une partie limitée d'aire donnée d'un plan, déterminé de position dans l'espace à quatre dimensions, et dont le contour est parcouru dans un sens déterminé. Ainsi deux vecteurs sont égaux s'ils ont même aire, s'ils se trouvent dans le même plan ou en des plans parfaitement parallèles et si leurs contours sont parcourus dans le même sens. Des vecteurs égaux ont des projections égales sur un plan quelconque. La somme de plusieurs vecteurs n'est, en général, pas réductible à un vecteur unique. En effet, si OX_i ($i = 1, 2, 3, 4$) représentent quatre axes perpendiculaires entre eux et qu'on désigne par P_{ik} l'unité de vecteur située dans le plan X_iOX_k, l'ordre des indices indiquant le sens de ce vecteur, la décomposition d'un vecteur α suivant les six plans coordonnés X_iOX_k correspond à la formule

$$\alpha = a_{23}p_{23} + a_{31}p_{31} + a_{12}p_{12} + a_{14}p_{14} + a_{24}p_{24} + a_{34}p_{34},$$

où l'on a toujours la relation

$$a_{23}a_{14} + a_{31}a_{24} + a_{12}a_{34} = 0.$$

Donc la composition de plusieurs vecteurs α mène au résultat

$$A_{23}p_{23} + A_{31}p_{31} + A_{12}p_{12} + \ldots,$$

où A_{ik} remplace Σa_{ik} et en général les six quantités A_{ik} ne satisfont pas à la relation

$$A_{23}A_{14} + A_{31}A_{24} + A_{12}A_{34} = 0.$$

La réduction d'une somme de vecteurs à deux vecteurs situés en deux plans différents est possible d'une infinité de manières. Au contraire cette somme se réduit d'une manière unique à un *bivecteur*, c'est-à-dire à la somme de deux vecteurs situés en deux plans parfaitement rectangulaires l'un à l'autre. Seulement en deux cas la réduction à un bivecteur est indéterminée; dans le premier cas on a $A_{23} = A_{14}$, $A_{31} = A_{24}$, $A_{12} = A_{34}$ et dans le second $A_{23} = -A_{14}$, $A_{31} = -A_{24}$, $A_{12} = -A_{34}$. Dans ces deux cas chaque décomposition de la somme en deux vecteurs mène à deux vecteurs d'aire égale. Donc l'auteur parle de bivecteurs isocèles et bien de bivecteurs isocèles dextrogyres dans le premier cas et de bivecteurs isocèles lévogyres dans le second. D'un bivecteur isocèle le couple de plans est indéterminé.

Ensuite l'auteur s'occupe d'opérations scalaires et vectorielles des bivecteurs. Les opérations scalaires n'affectent pas le couple des plans du bivecteur. On y range d'abord les variations proportionnelles des deux composantes, accompagnées ou non d'un changement de signe; ces scalaires s'expriment par des nombres positifs ou négatifs. Ensuite l'opération qui transporte chacune des deux composantes dans le plan de l'autre composante est une opération scalaire; cela est possible de deux manières, si toutefois on introduit la restriction que chacune des composantes transportées doit occuper une même position par rapport à la composante originale. Si h indique une de ces deux opérations, $-h$ indique l'autre. Donc l'opération scalaire la plus générale peut être mise dans la forme $p + qh$.

Les opérations vectorielles changent un bivecteur en un autre situé dans un couple de plans coupant orthogonalement les plans du bivecteur original. On peut s'imaginer que cette opération s'effectue à l'aide d'une révolution par un angle droit autour d'un plan contenant un des angles plans des deux bivecteurs, suivie d'une opération scalaire; la révolution qui transporte le bivecteur donné dans les plans du second bivecteur s'appelle le *verseur*, l'opération scalaire complétante s'appelle le *tenseur*.

Enfin l'auteur étudie les biquaternions, représentés par

$$q = a_0 + b_0 h + (a_1 + b_1 h)i + (a_2 + b_2 h)j + (a_3 + b_3 h)k,$$

qui permettent de transformer deux bivecteurs quelconques donnés l'un dans l'autre. Il considère des sommes de biquaternions conjugués et indique le rapport entre ses propres recherches et la théorie de Clifford.

Pour plus de détails on conseille la thèse hollandaise de M. Wythoff intitulée : *Le biquaternion comme opération dans l'espace à quatre dimensions* (Amsterdam, Ipenbuur et van Seldam, 1898).

Tome VII; mai 1898-avril 1899 (¹).

Schoute (*P.-H.*). — La représentation cyclographique des cercles de Joachimsthal. (6-12).

Dans sa *Cyklographie* M. W. Fiedler de Zürich a développé une théorie d'après laquelle un cercle quelconque du plan est représenté par les deux points de l'espace qui se projettent orthogonalement sur ce plan au centre du cercle et qui se trouvent de part et d'autre de ce plan à une distance égale au rayon du cercle. D'après cette théorie le réseau des cercles qui passent par un point P est représenté par un cône de révolution dont P est le sommet et dont les génératrices font avec le plan des angles de 45°; tandis que les cercles d'un réseau général sont représentés par un hyperboloïde de révolution dont la courbe méridienne est une hyperbole équilatère et bien un hyperboloïde à une ou à deux nappes à mesure que le cercle coupant tous les cercles du réseau sous des angles droits est réel ou imaginaire. Et les cercles d'un faisceau y sont représentés par une hyperbole équilatère dont l'axe réel ou l'axe transverse est normal au plan des cercles à mesure que les deux points de base du faisceau sont réels ou imaginaires; si ces deux points coïncident, cette hyperbole dégénère en deux droites.

L'application de cette théorie au groupe doublement infini des cercles de Joachimsthal d'une conique forme le sujet de cette Communication.

D'après le théorème de Joachimsthal complété par Laguerre les cercles qui passent par les triples de points d'une ellipse qui sont *conormaux* avec un point donné A de cette courbe, forment un faisceau, dont le point A′ diamétralement opposé de A et la projection $O_{a'}$ du centre O sur la tangente $t_{a'}$ en A′ sont les deux points de base. Ainsi la surface qui forme la représentation des cercles de Joachimsthal peut être engendrée par le mouvement d'une hyperbole équilatère variable dont l'axe réel est toujours normal au plan de l'ellipse. Si le point A parcourt l'ellipse, l'axe transverse de cette hyperbole qui bissecte rectangulairement la distance $A'O_{a'}$ des points de base du faisceau de cercles, reste toujours normal à une ellipse ε' homothétique et concentrique à l'ellipse donnée ε, dont les axes sont a et b, si ceux de l'ellipse donnée sont désignés par $2a$ et $2b$. De cette remarque découle qu'un point quelconque P du plan est la projection de quatre couples de points-image, de manière que la surface-image est du huitième ordre. En effet, un calcul assez simple fait trouver son équation dans la forme

$$\frac{4a^2x^2}{(u^2+a^2)^2}+\frac{4b^2y^2}{(u^2+b^2)^2}=1,$$

où u^2 remplace $x^2+y^2-z^2$, l'ellipse donnée étant représentée par

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad z=0.$$

(¹) Dorénavant l'Académie publie en même temps une traduction anglaise des Mémoires parus dans le *Verslag* sous le titre *Proceedings of the Meetings*, etc. Les numéros des pages de ce compte rendu-ci se rapportent toujours à l'édition originale.

2e Partie

De la surface-image le cercle d'intersection du cône $u^2 = 0$ avec le plan à l'infini est une courbe quadruple; à côté de cette courbe quadruple elle contient deux coniques doubles et huit droites, tandis que les sommets de l'ellipse donnée ε en sont des points doubles. Le contour apparent de la surface sur le plan de ε est formé par la développée de l'ellipse ε'.

A l'aide de la surface-image on trouve que le système doublement infini des cercles de Joachimsthal a les caractéristiques 4, 8, 16, c'est-à-dire que 4 de ces cercles passent par deux points donnés, que 8 de ces cercles passent par un point donné et touchent une droite donnée, que 16 de ces cercles touchent deux droites données.

Si la conique donnée est une hyperbole on trouve un résultat tout à fait analogue; seulement dans le cas d'une parabole la surface-image se simplifie au cône de révolution $u^2 = 0$, dont le sommet de la parabole forme le sommet, tous les cercles de Joachimsthal passant par ce point.

Lorentz (*H.-A.*). — Considérations sur l'influence d'un champ magnétique sur l'émission de la lumière. (113-122).

Les expériences de MM. Cornu, Michelson, Preston, Becquerel et Deslandres ont prouvé que, dans bien des cas, la théorie élémentaire bien connue de l'effet Zeeman est insuffisante. En attendant que de nouvelles hypothèses nous viennent fournir une explication de l'ensemble des phénomènes, il y a intérêt à examiner les conséquences auxquelles on peut arriver indépendamment de toute hypothèse spéciale sur le mécanisme de la radiation. C'est au moyen de considérations mathématiques très générales sur la symétrie matérielle dont il s'agit, que l'auteur démontre les théorèmes suivants :

1° Dans les expériences où la direction de la radiation coïncide avec celle des lignes de force, la lumière qu'on trouve dans un point déterminé du spectre ne peut jamais être polarisée rectilignement ou elliptiquement. Si elle présente une polarisation, celle-ci doit être circulaire, complète ou bien partielle. Le sens de cette polarisation se renversera avec le champ magnétique.

2° Si, au contraire, on examine la lumière émise perpendiculairement aux lignes de force, et étalée de nouveau en un spectre, on ne trouvera jamais une polarisation circulaire ou elliptique. Il ne peut y avoir qu'une polarisation rectiligne dans un plan perpendiculaire ou parallèle aux lignes de force.

Du reste, il y aura une certaine connexité entre les phénomènes qui se produisent dans les deux directions qui viennent d'être distinguées. Si, par exemple, dans les expériences de la seconde classe les rayons qui arrivent dans une partie déterminée du spectre sont complètement polarisés, perpendiculairement aux lignes de force, cette partie du spectre restera obscure dans les expériences de la première classe. On peut donc prédire que dans ces dernières il ne restera que la composante centrale de la ligne triple dans laquelle MM. Becquerel et Deslandres ont vu se changer une raie du fer.

L'auteur revient ensuite aux équations du mouvement qu'il a établies dans un Mémoire antérieur (*Annales de Wiedemann*, t. LXIII, p. 278). Ces équations se rapportent aux oscillations infiniment petites d'une molécule possédant un nombre quelconque de degrés de liberté et dans laquelle des charges électriques sont distribuées d'une manière arbitraire. Elles avaient conduit à une équation qui peut rendre compte des lignes triples dans le spectre; il suffirait pour cela de supposer qu'au dehors du champ magnétique il y ait *trois*

degrés de liberté qui soient équivalents, c'est-à-dire que trois des vibrations principales de la molécule aient des périodes égales. Or, cette équation n'explique pas le quadruplet observé le premier par M. Cornu dans le cas de l'une des raies D et cela même si l'on admet que la molécule dispose de *quatre* degrés de liberté équivalents. Cependant, comme l'a remarqué M. A. Pannekoek, de Leyde, cet insuccès tient à ce que l'équation dont il s'agit n'est plus exacte dans ce dernier cas, quelques-uns des termes omis étant du même ordre de grandeur que ceux qu'on a gardés. En se servant des équations de mouvement primitives, M. Pannekoek arrive à une explication du quadruplet, à laquelle on peut seulement objecter qu'il semble bien difficile d'imaginer un système matériel qui possède les propriétés qu'elle exige.

Van de Sande Bakhuyzen (H.-G.). — George Frederik Willem Baehr. (131-132).

In Memoriam et Nécrologie de G.-F.-W. Baehr, de 1864 à 1883 professeur de Mathématiques et de Mécanique à l'École Polytechnique de Delft.

Korteweg (D.-J.) — Compte rendu de la seconde Conférence de Londres sur le Catalogue international. (138-143).

Van der Waals (J.-D.). — Déduction simple de l'équation caractéristique pour des substances à molécules finies et composées. (160-165).

L'auteur fait entrevoir la manière dont on peut déterminer la seconde correction ε_1 de la formule

$$b = b_x \left[1 - \frac{17}{32}\frac{b_x}{V} + \varepsilon_1 \left(\frac{b_x}{V}\right)^2 - \dots\right]$$

à l'aide d'intégrations sans doute très laborieuses, où il s'agit de déterminer la valeur moyenne du volume limité par trois sphères de rayons égaux qui se pénètrent.

Kluyver (J.-C.) et *Korteweg (D.-J.).* — Rapport sur un Mémoire de M. N.-L.-W.-A. Gravelaar intitulé : « Les Œuvres de John Napier ». (218-223).

Le Mémoire en question paraîtra dans les *Verhandelingen* de l'Académie.

Van der Waals (J.-D.). — Contraction de volume et contraction de pression dans les mélanges. (239-250, 270-280, 469-477).

Kapteyn (W.) et *Cardinaal (J.).* — Rapport sur un Mémoire de M. K. Bes intitulé : « Théorie générale de l'élimination

d'après la méthode Bézout suivant un nouveau procédé. (264-267).

Le Mémoire va paraître dans les *Verhandelingen* de l'Académie.

Cardinaal (J.). — Représentation des vis de M. Ball qui passent par un point ou qui se trouvent dans un plan, d'après la méthode de Caporali. (315-319).

Cette Communication fait suite à un discours tenu au Congrès de la *Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte* de Dusseldorf (septembre 1898) qui va paraître dans le *Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung;* elle est accompagnée d'une planche montrant le cylindroïde et sa représentation.

Lorentz (H.-A.). — Sur les vibrations de systèmes portant des charges électriques et placés dans un champ magnétique. (320-340).

Les composantes des triplets et quadruplets, dans lesquelles les lignes spectrales se décomposent sous l'action d'une force magnétique, sont dans la plupart des cas si bien définies que le temps de vibration doit avoir été également modifié dans toutes les particules de la source lumineuse. Pour s'en rendre compte on peut admettre que toutes les molécules ont la même orientation ou bien qu'elles possèdent les mêmes propriétés dans tous les sens. A cause des difficultés qui se présentent si l'on accepte la première hypothèse, l'auteur se place au dernier point de vue et considère une couche sphérique infiniment mince et recouverte d'une charge électrique fixement liée à la matière pondérable de la couche. A l'état d'équilibre cette matière et la charge sont distribuées uniformément avec les densités superficielles ρ et σ et les points de la couche ne peuvent se déplacer que dans la surface elle-même; un déplacement s provoque une force élastique $k^2 s$ de sens opposé par unité de surface, k ayant la même valeur dans tous les points de la sphère. Au dehors d'un champ magnétique les mouvements dont ce système est capable, suivent des lois assez simples. Chaque vibration principale dépend d'une certaine fonction sphérique Y_h, de telle manière que la composante du déplacement suivant une direction l quelconque de la surface sphérique peut être représentée par

$$q\cos(n_h t + c)\frac{\partial Y_h}{\partial l},$$

où q et c sont des constantes, tandis que n_h désigne le nombre des vibrations dans un temps 2π, ou la fréquence des vibrations. Le nombre h indique l'ordre de la fonction sphérique, ou si l'on veut celui des vibrations. Si le rayon de la sphère est représenté par a et la vitesse de la lumière par V, on trouve

$$\rho n_h^2 = k^2 + 4\pi V^2 \frac{h(h+1)}{2h+1}\cdot\frac{\sigma^2}{a}.$$

Dès que la charge magnétique entre en jeu, les temps de vibrations se modifient. Après avoir montré que les vibrations du premier ordre donnent lieu

à un triplet tel qu'il a été découvert par M. Zeeman, l'auteur passe à l'examen de celles du second ordre. Il les ramène à *cinq* fonctions sphériques spéciales, dans lesquelles on peut décomposer toutes les fonctions sphériques du second ordre, et auxquelles correspondent cinq états différents de mouvement qui peuvent exister indépendamment les uns des autres, tant qu'il n'y a pas de force magnétique; alors ces cinq modes de mouvement présentent la même fréquence n_2. Si l'on donne à l'axe OZ la direction de la force magnétique H, le centre de la sphère étant pris pour origine des coordonnées, et si dans le plan XOY on introduit deux axes OX′ et OY′ faisant avec OX et OY des angles de 45°, ces cinq fonctions sont

$$Y_{xy} = \frac{3xy}{a^2}, \qquad Y_{x'y'} = \frac{3x'y'}{2a^2} = \frac{3(y^2 - x^2)}{4a^2},$$

$$Y_{xz} = \frac{3xz}{2a^2}, \qquad Y_{yz} = \frac{3yx}{2a^2}, \qquad Y_{zz} = \frac{1}{2}\left(\frac{3z^2}{a^2} - 1\right).$$

Les vibrations correspondantes peuvent être représentées par les symboles $[Y_{xy}]$, etc. Or, dans le champ magnétique peuvent avoir lieu les mouvements suivants :

1° Des vibrations $[Y_{zz}]$ dont la fréquence est toujours n_2;

2° Deux mouvements pour lesquels la fréquence est devenue

$$n_2 + \frac{H\sigma}{6\rho}, \qquad n_2 - \frac{H\sigma}{6\rho},$$

disons $n_2 \pm n'_2$; chacun de ces mouvements se compose d'une vibration $[Y_{xy}]$ et d'une vibration $[Y_{x'y'}]$ à amplitudes égales, mais dont les phases diffèrent entre elles d'un quart de période, cette différence ayant pour les deux mouvements des signes contraires;

3° Deux mouvements qu'on obtient en composant d'une manière analogue une vibration $[Y_{xz}]$ et une vibration $[Y_{yz}]$ dont les fréquences sont respectivement $n_2 + \frac{1}{2} n'_2$ et $n_2 - \frac{1}{2} n'_2$.

D'après ces résultats on pourrait s'attendre au premier abord à un quintuplet. Seulement il y a une difficulté. Vu l'extrême petitesse des particules lumineuses par rapport à la longueur d'onde, les vibrations du second ordre ne pourront émettre aucune lumière sensible; en effet, dans ces vibrations on trouvera toujours, en différentes parties de la surface sphérique, des phases opposées. La lumière qu'on observe ne peut être due qu'à des vibrations dans lesquelles une charge, qui a partout le même signe, est animée en son entier d'un mouvement de va-et-vient. De tels mouvements peuvent être appelés des *vibrations du premier ordre,* même dans le cas où ils ne dépendent pas précisément d'une fonction sphérique. Cependant M. Lorentz a imaginé une cause en vertu de laquelle les vibrations du second ordre pourraient se révéler dans le spectre. On sait que deux vibrations simples aux fréquences n_1 et n_2, exécutées simultanément par une source sonore, peuvent donner lieu à des vibrations dites *de combinaison*, dont les fréquences sont $n_1 - n_2$ et $n_1 + n_2$. Il y a bien des années M. V.-A. Julius s'est demandé si quelque chose d'analogue ne se passerait pas dans les sources lumineuses; on expliquerait par cela certaines relations bien connues entre les nombres de vibrations des raies spectrales. Dans les cas dont il est question ici, ces vibrations de combinaison pourront être

produites de plusieurs manières. Sans faire des hypothèses spéciales on peut démontrer par exemple que des vibrations capables d'émettre de la lumière peuvent résulter de la combinaison d'une des cinq vibrations du second ordre avec une des trois vibrations du premier ordre. Si maintenant le phénomène de Zeeman se présente sous forme de triplet dans ces dernières vibrations et sous forme de quintuplet dans celles du second ordre, on pourrait croire que chacune des raies spectrales provenant des combinaisons, et dont M. Lorentz considère seulement celle qui a la fréquence $n_1 - n_2$, se diviserait dans le champ magnétique en 15 raies. Cependant le phénomène est moins compliqué, plusieurs de ces composantes ayant nécessairement l'intensité zéro. Le calcul continué conduit aux résultats suivants : En faisant l'expérience perpendiculairement aux lignes de force, on aura neuf lignes, désignées dans le tableau suivant par les lettres O, A, B.

B_3	B_2	A	B_1	O	B'_1	A'	B'_2	B'_3
n'_1	$\frac{1}{2} n'_2$	$n'_1 - \frac{1}{2} n'_2$	$n'_1 - n'_2$		$n'_1 - n'_2$	$n'_1 - \frac{1}{2} n'_2$	$\frac{1}{2} n'_2$	n'_1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	9	9	12	9	9	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}$

La ligne médiane O, par rapport à laquelle le phénomène est symétrique, occupe la position de la ligne originale; de même que les lignes A, elle est polarisée perpendiculairement aux lignes de force, tandis que le plan de polarisation de toutes les raies B est parallèle à ces lignes. Les distances entre les lignes B_3, ... et la raie centrale sont proportionnelles aux quantitée n'_1, ..., inscrites dans la seconde ligne du tableau; ici n'_2 a la signification indiquée et $2n'_1$ correspond à la distance des raies extérieures du triplet des vibrations du premier ordre. Enfin les nombres de la dernière ligne indiquent les intensités relatives des composantes; ils ont été calculés dans la supposition que toutes les vibrations ont lieu indifféremment dans toutes les directions et que, dans les mouvements des particules, il n'y a rien qui favorise certaines combinaisons plutôt que les autres. Du reste, l'absorption produite dans les couches extérieures de la source modifiera les nombres; elle tendra surtout à affaiblir l'intensité de la ligne médiane. Si n'_1 disparaît, les lignes B_3 et B'_3 se confondent en une seule avec l'intensité 3. Dans ce cas, les raies A, A', B, B' constituent précisément un quadruplet, comme M. Cornu l'a découvert dans la raie D du sodium; mais, en outre, il y aurait les lignes plus faibles B_2, B'_2 et la ligne centrale O. Si les vibrations du premier ordre étaient exécutées par la couche sphérique, en d'autres termes si c'étaient les vibrations qui dépendent d'une fonction sphérique, on aurait $n'_2 = \frac{2}{3} n'_1$. Alors il y aurait coïncidence de B_1 et B_2 d'une part et de B'_1 et B'_2 de l'autre. Il en résulterait deux lignes plus fortes situées plus près du milieu O que les raies A et s'il était permis de faire abstraction des lignes O et B_3, on aurait un quadruplet dont les composantes extérieures sont polarisées perpendiculairement aux lignes de force.

De Vries (*J.*). — Courbes planes quartiques trinodales. (340-349).

Si les deux coniques

$$\Phi \equiv b_1 x_2 x_3 + b_2 x_3 x_1 + b_3 x_1 x_2 = 0,$$

$$\Psi \equiv c_1 x_2 x_3 + c_2 x_3 x_1 + c_3 x_1 x_2 = 0$$

qui passent par les trois nœuds D_1, D_2, D_3 de la quartique donnée

$$\Gamma_4 = a_{11}x_2^2x_3^2 + a_{22}x_3^2x_1^2 + a_{33}x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2x_3(a_{23}x_1 + a_{31}x_2 + a_{12}x_3),$$

pris comme sommets du triangle des coordonnées homogènes, sont liées entre elles par les trois conditions $b_1c_1 = a_{11}$, $b_2c_2 = a_{22}$, $b_3c_3 = a_{33}$, l'identité

$$\Phi_2\Psi_2 - \Gamma_4 = x_1x_2x_3\Sigma(b_2c_3 + b_3c_2 - 2a_{23})x_1$$

montre que les deux couples de points d'intersection libres de Γ_4 avec les coniques *associées* Φ_2, Ψ_2 se trouvent sur la droite

$$\Sigma(b_2c_3 + b_3c_2 - 2a_{23})x_1 = 0.$$

Si les coefficients b et c satisfont aux deux conditions $b_2c_2 = a_{22}$, $b_3c_3 = a_{33}$ seulement, on prouve, à l'aide de l'identité

$$\Phi_2\Psi_2 - \Gamma_4 = x_2x_3\Omega_2,$$

qu'on peut faire passer une conique

$$\Omega_2 = (b_1c_1 - a_{11})x_2x_3 + x_1\Sigma(b_2c_3 + b_3c_2 - 2a_{23})x_1 = 0$$

par les nœuds D_2, D_3 et les couples de points d'intersection libres B_1, B_2 et C_1, C_2 de Γ_4 avec Φ_2 et Ψ_2; alors Φ_2 et Ψ_2 sont nommées *complémentaires* par rapport à D_2, D_3. Et la conique

$$\mathfrak{H}_2 = 4a_{11}(b_2x_3 + b_3x_2)(c_2x_3 + c_3x_2) - [(b_2c_3 + b_3c_2)x_1 - 2\Sigma a_{23}x_1]^2 = 0$$

est à la fois l'enveloppe des droites B_1B_2 et C_1C_2; à leur tour, toutes les coniques $\mathfrak{H}_2$ ont pour enveloppe la quartique donnée Γ_4. En continuant ces considérations, l'auteur parvient à trois coniques remarquables par rapport à Γ_4 : la conique τ par les trois couples de points tangentiaux des nœuds, la conique ρ des trois couples de points antitangentiaux des nœuds et la conique ω de M. A. Brill par les six points d'inflexion. Ces trois coniques passent par les deux points d'intersection libres de la conique

$$a_{11}a_{23}x_2x_3 + a_{22}a_{31}x_3x_1 + a_{33}a_{12}x_1x_2 = 0$$

avec Γ_4.

Van Laar (*J.-J.*). — Évaluation de la seconde correction de la quantité b en l'équation caractéristique de Van der Waals. (350-364).

A l'aide d'une série d'intégrations qui paraîtront *in extenso* dans les *Archives du Musée Teyler*, Harlem, l'auteur trouve la valeur 0,0958 précise dans la quatrième décimale.

Schoute (*P.-H.*) et *Korteweg* (*D.-J.*). — Rapport sur un Mémoire de M. S.-L. van Oss intitulé : *Das regelmässige*

Sechshundertzell und seine selbstdeckenden Bewegungen. (368-371).

Ce travail sur l'hexakosiédroïde régulier et ses déplacements anallagmatiques paraîtra dans les *Verhandelingen* de l'Académie.

De Vries (J.). — Sur les cercles orthoptiques d'un réseau de coniques. (371-376).

Les cercles de Monge d'un faisceau de coniques forment une série aux caractéristiques 2, 4, deux de ces cercles passant par un point donné et quatre de ces cercles touchant une droite donnée; leur représentation cyclographique, d'après Fiedler, est une biquadratique gauche qui se projette sur le plan du faisceau suivant la conique qui forme le lieu des centres des coniques du faisceau.

La représentation cyclographique des cercles de Monge d'un réseau de coniques est une surface du cinquième ordre contenant quatre droites perpendiculaires au plan du réseau.

Les cercles de Monge d'un faisceau tangentiel de coniques forment un faisceau; leur représentation cyclographique est donc une hyperbole équilatère.

Les cercles de Monge d'un réseau tangentiel de coniques forment un réseau; leur représentation cyclographique est donc un hyperboloïde de révolution.

Schoute (P.-H.). — Une interprétation géométrique de l'invariant $\prod_{n+1}(ab)^2$ d'une forme binaire a_x^{2n} d'ordre pair. (379-387).

Une courbe admet un nombre doublement infini de bisécantes contenant ensemble un nombre triplement infini de points. Si cette courbe se trouve dans l'espace E_3 à trois dimensions, ces points remplissent tout l'espace un nombre fini de fois. Si la courbe se trouve en un espace E_4 à quatre dimensions et non pas en un E_3, le lieu du point par où l'on peut mener une bisécante à la courbe, et donc en même temps le lieu de ces bisécantes elles-mêmes, est un espace courbe à trois dimensions. La déduction de l'équation de ce lieu, dans le cas le plus simple, celui de la courbe normale C_4 de l'espace E_4, forme le point de départ des considérations de l'auteur.

La courbe C_4 est représentée par les équations

$$(1) \qquad \frac{x_0}{1} = \frac{x_1}{\lambda} = \frac{x_2}{\lambda^2} = \frac{x_3}{\lambda^3} = \frac{x_4}{\lambda^4},$$

où x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 sont les coordonnées homogènes du point L correspondant à la valeur λ.

Si λ_1 et λ_2 sont les paramètres des points L_1 et L_2 de C_4, les équations

$$x_i = p_1\lambda_1^i + p_2\lambda_2^i \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4)$$

représentent un point quelconque A de la bisécante L_1L_2. L'élimination des quatre quantités $\lambda_1, \lambda_2, p_1, p_2$ entre ces cinq équations donne l'équation du lieu

du point A dans la forme

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

L'espace d'osculation du point L de C_4 est représenté par

$$x_0\lambda^4 - 4x_1\lambda^3 + 6x_2\lambda^2 - 4x_3\lambda + x_4 = 0;$$

ainsi les coordonnées x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 sont les coefficients de la forme binaire

$$x_0(-\lambda)^4 + 4x_1(-\lambda)^3 + 6x_2(-\lambda)^2 + 4x_3(-\lambda) + x_4$$

du quatrième ordre en $(-\lambda)$, dépourvus des facteurs du binome. Donc le résultat (2) peut s'écrire dans la forme symbolique $j \equiv (bc)^2(ca)^2(ab)^2 = 0$ (*voir* CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie*, t. I, p. 229).

De la même manière en E_6, le lieu des plans trisécants de la courbe normale

$$\frac{x_0}{1} = \frac{x_1}{\lambda} = \ldots = \frac{x_5}{\lambda^5} = \frac{x_6}{\lambda^6}$$

est représenté par

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{vmatrix} = 0$$

qui prend la forme symbolique $(ab)^2(ac)^2(ad)^2(bc)^2(bd)^2(cd)^2 = 0$. Et ce résultat s'étend sans peine à la courbe normale C_{2n} de l'espace E_{2n} à $2n$ dimensions.

Chemin faisant l'auteur démontre un théorème général se rapportant à une involution sur la courbe normale : En fixant sur la courbe normale C_{2n} les n points arbitraires L_1, L_2, ..., L_n on détermine sur cette courbe une involution I_{2n}^{n-1} de $n-1$ dimensions et de l'ordre $2n$ dont chacun de ces points pris $2n$ fois représente un groupe. Les espaces d'osculation E_{2n-1} correspondant aux $2n$ points d'un groupe quelconque de cette involution se coupent en un point A de l'espace E_{n-1} déterminé par les n points donnés; si ce groupe parcourt l'involution entière, le point A décrit en E_{n-1} un système linéaire en rapport projectif avec l'involution.

Ainsi l'on connaît maintenant trois invariants généraux admettant une interprétation polydimensionale pour toutes les valeurs de l'ordre $2n$ de la forme binaire correspondante, le discriminant, l'invariant $(ab)^{2n}$ de Clifford et l'invariant de Sylvester analysé ici.

Kluyver (J.-C.). — Intégrales hyperelliptiques réductibles. (425-441).

Étant donnée une intégrale abélienne de première espèce relative à une courbe f de genre p, il se peut que, les $2p$ périodes se ramenant à deux périodes distinctes, l'intégrale se change en une intégrale elliptique par une substitution algébrique déterminée. Weierstrass a fait connaître les conditions qui doivent être remplies pour que cette réduction soit possible. Dans la pré-

sente note il s'agit de trouver l'équivalent algébrique des conditions de Weierstrass qui se rapportent exclusivement à l'ensemble des périodes que possèdent les intégrales de première espèce.

L'auteur fait voir que dans le cas d'une intégrale réductible il existe dans le plan de la courbe fondamentale f quatre courbes adjointes R de degré s appartenant à un faisceau et présentant les deux particularités suivantes :

1° Chacune de ces courbes R touche f en r points distincts; en outre il se peut que quelques-uns de leurs points communs P se trouvent sur f.

2° Par les $4r$ points de contact on peut faire passer une courbe adjointe de degré $2s$ qui, en dehors des points multiples de f, ne rencontre cette courbe fondamentale qu'aux points P, où elle la touche.

Le système des quatre courbes R, s'il existe, n'est pas unique; un point pris au hasard sur f peut être regardé comme un des $4r$ points de contact, de sorte que l'existence des courbes R comporte sur f une correspondance symétrique $(r-1, r-1)$. Inversement, si l'on peut trouver quatre courbes R satisfaisant aux conditions mentionnées, au moins une des intégrales de première espèce se ramène à une intégrale elliptique. L'auteur indique comment il faut alors construire cette intégrale réductible et obtenir la substitution qui effectue la réduction.

Enfin l'auteur considère avec quelque développement plusieurs cas particuliers, d'abord quant aux intégrales réductibles non hyperelliptiques le cas $p=3$, $r=2$ traité par Sophie Kowalewski, où f est la courbe générale du quatrième ordre, ensuite le cas le plus simple $p=2$, $r=2$ des intégrales hyperelliptiques réductibles déjà connu de Legendre, où f est une quartique admettant un point double, et enfin le cas $p=2$, $r=3$ qui s'accorde avec le cas précédent quant à la courbe f. Il fait connaître les recherches de MM. Burkhardt, Goursat et Burnside se rapportant à ce dernier cas et termine son travail par la déduction de quelques résultats nouveaux.

Van der Waals (J.-D.). — Une anomalie dans la forme de la courbe de plissement dans le cas d'un mélange de substances anomales. (464-469).

Boltzmann (L.). — Ueber die Zustandsgleichung Van der Waals'. (477-484).

Communication, en allemand, extraite d'une lettre à M. Van der Waals, sur l'équation caractéristique. En se servant du résultat d'intégration dû à M. J.-J van Laar, le savant de Vienne parvient à la formule

$$p-\frac{a}{v^2}=r\mathrm{T}\left[\frac{1}{v}+\frac{b}{v^2}+\frac{5}{8}\frac{b^2}{v^3}+\left(\frac{1283}{8960}+\frac{3\beta}{2}\right)\frac{b^3}{v^4}\right]$$

$$=\frac{r\mathrm{T}}{v-b+\frac{3}{8}\frac{b^2}{v}+\left(\frac{957}{8960}-\frac{3\beta}{2}\right)\frac{b^3}{v^2}}$$

où, d'après M. van Laar, $\beta=0{,}0958$. Cette formule ne s'accordant pas avec celle de M. Van der Waals lui-même, M. Boltzmann y fixe l'attention dans l'espoir de provoquer une discussion que du reste M. Boltzmann considère comme plus intéressante pour les mathématiciens que pour les physiciens.

Lorentz (*H.-A.*). — Théorie simplifiée des phénomènes électriques et optiques dans les corps en mouvement. (507-522).

Dans ses recherches antérieures l'auteur s'est servi de l'hypothèse que les phénomènes électriques et optiques qui se présentent chez les corps pondérables doivent être attribués à des particules chargées ou ions, liés à des positions d'équilibre dans les corps diélectriques, tout à fait mobiles, à une résistance comparable à un frottement près, dans les corps conducteurs. D'après cette hypothèse, un courant électrique n'est autre chose qu'un mouvement des ions dans un sens déterminé, et la polarisation diélectrique dans un corps non conducteur consiste dans un écartement des ions de leurs positions d'équilibre. Dans cette théorie l'on supposait que les ions se meuvent à travers l'éther, qui reste en repos et pour lequel ils sont tout à fait perméables. Et tandis que l'éther fut supposé soumis aux équations électromagnétiques ordinaires, pour les ions certaines relations se présentaient presque d'elles-mêmes, de manière qu'on obtint un système d'équations assez simple, suffisant pour l'explication d'un nombre de phénomènes. A l'aide de certains artifices mathématiques l'auteur est parvenu par des raisonnements assez courts à des conclusions qui auraient exigé autrement des déductions assez compliquées; ici, il veut montrer comment on peut simplifier encore davantage la théorie, en se servant d'un système d'équations transformé d'avance.

A l'aide de ce système transformé M. Lorentz réduit chaque problème électrostatique d'un système en mouvement au problème analogue d'un système en repos et fait voir que, dans les phénomènes électrostatiques, l'influence du mouvement de la terre est proportionnelle au carré de la quantité très petite $\frac{p_x}{V}$, où p_x et V représentent respectivement les vitesses des ions et de la terre. Ensuite l'auteur applique ces équations à des phénomènes optiques, ce qui, si l'on néglige les termes de l'ordre $\left(\frac{p_x}{V}\right)^2$, mène au théorème suivant :

Si un corps ou un système de corps sans translation admet un état de mouvement dans lequel les déplacements des ions et les composantes de certains vecteurs F′ et H′, dépendant du déplacement diélectrique δ, de la force magnétique $\mathfrak{h}$ et des quantités p_x et V à l'aide des relations

$$F'_x = 4\pi V^2 \delta_x, \qquad F'_y = 4\pi k V^2 \delta_y - k p_x \mathfrak{h}_z, \qquad F'_z = 4\pi k V^2 \delta_z + k p_x \mathfrak{h}_y,$$

$$H'_x = k^2 \mathfrak{h}_x, \qquad H'_y = k^2 \mathfrak{h}_y + 4\pi k^2 p_x \delta_z, \qquad H'_z = k^2 \mathfrak{h}_z - 4\pi k^2 p_x \delta_y,$$

où $k^2(V^2 - p_x^2) = V^2$, sont des fonctions déterminées des coordonnées et du temps t, alors ce corps ou ce système animé d'une translation admettra un état de mouvement où les déplacements et les composantes de ces vecteurs sont les mêmes fonctions des coordonnées et du *temps local t′* déterminé par la relation

$$t' = t - \frac{x p_x}{V^2 - p_x^2}.$$

Ce théorème explique la plupart des phénomènes de l'aberration.

Enfin l'auteur s'occupe de l'expérience, due à M. Michelson, sur l'interférence de deux rayons de lumière qui ont parcouru de grandes distances, l'un

parallèle à V et l'autre dans une direction perpendiculaire. Pour expliquer le résultat négatif de l'expérience, MM. Fitz Gerald et Lorentz ont supposé que les dimensions des corps fixes portant les appareils optiques sont influencées d'une manière déterminée par la translation. D'après M. Liénard, la théorie de M. Lorentz exigerait que l'expérience eût un résultat positif, si sur le chemin des deux rayons de lumière se trouvent, au lieu de l'air, des diélectriques solides ou liquides. Au contraire, l'auteur démontre qu'il se pourrait que même dans ces nouvelles circonstances l'expérience donnât toujours le même résultat négatif qu'auparavant, et il fait voir la signification théorique de ce résultat hypothétique.

Lorentz (*H.-A.*). — La théorie de l'aberration de Stokes dans la supposition d'un éther ne possédant pas partout la même densité. (523-529).

La théorie de l'aberration donnée par M. Stokes exige que l'éther soit animé d'un mouvement irrotationnel et qu'en tout point de la surface de la terre la vitesse de ce mouvement soit égale à celle du mouvement annuel de notre planète. D'après l'auteur, ces deux conditions sont incompatibles, si l'on suppose que l'éther ait partout la même densité; ici il publie un calcul, dû à M. Planck, de Berlin, qui fait voir que ces deux conditions peuvent exister l'une à côté de l'autre, si l'on suppose que l'éther puisse être comprimé et condensé, comme une masse gazeuse, autour de la terre par la gravitation. Il y aura toujours quelque glissement de l'éther par rapport à la terre, mais la vitesse de ce mouvement relatif peut être diminuée autant qu'on le désire, en augmentant suffisamment la condensation de l'éther à la proximité de la terre. Le résultat de ce calcul est compris dans les équations

$$a+b=c, \qquad 2a=b(f^2+2f-2)e^{-f}, \qquad 4v=bf^2\sin\theta\, e^{-f}.$$

Là a et b sont deux constantes, c est la vitesse du mouvement annuel de la terre, f remplace $\frac{kgr}{p}$ (où k, r, p représentent la densité de l'éther, le rayon de la terre et la pression), θ est l'angle du rayon terrestre du lieu considéré avec la direction du mouvement annuel de la terre, et v est la vitesse de glissement de l'éther le long de la surface de la terre. Ainsi des trois équations, la première et la seconde donnent a et b, tandis que la dernière fait connaître v. En supposant que la constante de l'aberration soit connue à $\frac{1}{200}$ près, la théorie de Stokes exige que la vitesse v soit inférieure à $\frac{1}{200}$ de celle de la terre. Pour $f=11$ on trouve $v=0{,}055c$; donc on a $f>11$, ce qui implique une condensation $n>e^{11}$ ou $n>60000$. De plus, la théorie de Stokes exige que la vitesse de propagation de la lumière dans l'éther comprimé d'une manière si considérable soit la même que dans l'éther ordinaire. Donc, MM. Planck et Lorentz croient qu'il faut préférer la théorie d'un éther complètement en repos, qui n'a besoin que du coefficient d'entraînement de Fresnel, vérifié par des observations directes et calculé à l'aide de considérations théoriques assez plausibles. En effet, il serait bien singulier, si par hasard on trouvait pour ce coefficient précisément la valeur nécessaire pour une fausse théorie; de plus, si l'on espère un jour expliquer la gravitation au moyen d'actions qui se propagent dans l'éther, il est naturel d'admettre que l'éther ne soit pas soumis à cette force.

Cependant l'auteur, au lieu de rejeter entièrement la théorie de Stokes, y consacre quatre remarques :

1° L'acceptation de la condensation énorme trouvée plus haut explique tous les phénomènes.

2° En supposant que les équations, données par Hertz pour les corps diélectriques mobiles, s'appliquent tout de même au mouvement de l'éther, la propagation de la lumière va dépendre d'équations simples.

3° La supposition que seulement la gravitation, et non pas une force moléculaire, peut condenser l'éther, pourrait servir à expliquer les expériences de Fizeau avec les tubes parcourus par un courant d'eau; on aurait alors à introduire le coefficient de Fresnel.

4° On obtiendrait aisément une décision entre les deux théories, si l'on connaissait suffisamment les phénomènes de l'aberration diurne.

Van der Waals (*J.-D.*). — Sur la déduction de l'équation caractéristique (discussion avec M. L. Boltzmann). (537-542).

L'auteur reconnaît que les valeurs des coefficients des termes $\frac{b}{v}$, $\frac{b^2}{v^2}$, ..., qui entrent dans l'équation caractéristique, trouvées par M. Boltzmann, diffèrent de celles qu'il a trouvées lui-même, néanmoins que chacune des deux solutions du problème posé offre tous les caractères de la vérité. Il en conclut que la divergence des résultats doit être causée par une différence dans l'énoncé du problème que se sont proposé les deux investigateurs. D'après lui, M. Boltzmann s'est occupé du problème suivant : Comment se distribuent un grand nombre de points matériels mobiles soumis à une cohésion qui mène à une pression superficielle égale à $\frac{a}{v^2}$, s'il leur est impossible de diminuer leurs distances mutuelles au delà d'une limite donnée (diamètre de la molécule)? Si les points sont effectivement des *points matériels*, le travail de la pression thermique disparaît; alors l'équation de M. Boltzmann s'appliquerait à des phases coexistantes. Seulement, cette équation n'implique donc pas une solution du problème de la distribution des molécules tridimensionales. Ainsi, il n'y a plus lieu de s'étonner sur la divergence des résultats; au contraire, il est bien remarquable que l'accord est encore si grand.

Tome VIII : mai 1898-avril 1899.

Zwiers (*H.-J.*). — Le système Sirius d'après les observations les plus récentes. (11-24).

Kluyver (*J.-C.*). — La continuation d'une fonction univalente, représentée par une série doublement infinie. (40-45).

Dans un Mémoire paru dans les *Math. Annalen* (t. 41, p. 181, 1893), M. A. Hurwitz a fixé l'attention des géomètres sur l'analogie parfaite entre les nombres B_n de Bernoulli et une autre classe de nombres rationnels E_n figurant

comme coefficients dans le développement d'une fonction particulière pu dont le parallélogramme des périodes est un carré. Ici, M. Kluyver fait voir qu'il est possible de pousser encore un peu plus loin cette analogie. En effet, tandis que les nombres B_n sont en rapport intime avec les valeurs de la fonction transcendante entière $(1+e^{-\pi i z})\zeta(z)$, qui correspondent aux valeurs entières et positives de z, les nombres E_n de Hurwitz admettent une interprétation tout à fait semblable. En posant

$$Z(z;\omega,\omega') = \Sigma\Sigma(m\omega + m'\omega')^{-z},$$

où $\pm m = 0, 1, 2, \ldots$ et $\pm m' = 0, 1, 2, \ldots$ tandis que le quotient $\frac{\omega'}{\omega}$ est une quantité complexe dont la partie imaginaire est supposée positive, on trouve

$$E_n = \frac{(4n)!}{(2\alpha)^{4n}} Z(4n; 1, i),$$

où

$$\alpha = 2\int_1^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s(s^2-1)}} = 2,622057\ldots,$$

relation entièrement analogue à la formule connue

$$B_n = \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}(1+e^{-2\pi i})\zeta(2n)$$

pour les nombres de Bernoulli.

Lorentz (*H.-A.*). — La théorie élémentaire du phénomène de Zeeman. Réfutation d'une objection de M. Poincaré. (69-86).

Dans un article récent, paru en l'*Éclairage électrique*, t. XIX, p. 5, 1899, M. Poincaré parvient à la conclusion que la théorie généralement connue du phénomène de Zeeman, d'après laquelle chaque particule lumineuse contient un seul ion mobile ou un certain nombre de ces ions dont les vibrations sont indépendantes les unes des autres, est bien à même de rendre compte de la ligne double se présentant dans la direction des lignes de force, mais incapable d'expliquer les lignes triples dans la direction perpendiculaire aux lignes de force. Ce résultat est obtenu en substituant l'absorption dans les champs magnétiques à la place du traitement direct de l'émission, et il est bien remarquable que cette même manière de raisonner a conduit M. W. Voigt (*Göttinger Nachrichten*, 1898) à des équations qui impliquent l'existence du triplet. D'après l'auteur, la cause de cette divergence des résultats est l'omission injustifiable du terme $\varepsilon_k \alpha \frac{dZ_k}{dt}$ de l'équation (6) de p. 8. Avant de le démontrer l'auteur compare entre elles les diverses formules qui peuvent être appliquées à la propagation de la lumière dans un gaz absorbant soumis à l'action de forces magnétiques.

Bes (*K.*). — Sur la formation de l'équation résultante. (173-177).

Dans cette étude qui fait suite à un travail étendu paru dans les *Mémoires de l'Académie*, il s'agit de l'élimination de $n-2$ de n variables entre $n-1$

équations homogènes d'ordres quelconques, spécialement de l'élimination d'une de trois variables entre deux équations homogènes des ordres l et m.

Bakker (*G.*). — Remarque sur la fonction potentielle moléculaire de Van der Waals. (223-238).

Dans sa *Théorie dynamique de la capillarité dans l'hypothèse d'une variation continue de la densité*, M. Van der Waals trouve, pour le potentiel de deux points matériels placés à une distance r l'un de l'autre, l'expression $C - \frac{f}{r}e^{-\frac{r}{\lambda}}$, où C, f et λ désignent des constantes. Plus tard M. Van der Waals a remarqué (voir *Zeitschrift f. phys. Chemie*, t. XVIII, p. 720, 1894) que cette expression donne pour le potentiel d'une sphère homogène par rapport à un point extérieur, à un facteur près qui dépend du rayon de la sphère, le même résultat que si la masse tout entière était concentrée au centre de la sphère. M. Bakker s'est posé la question s'il y a d'autres fonctions potentielles jouissant de cette propriété. Il trouve la fonction plus générale

$$\varphi(r) = \frac{1}{r}(Ae^{-qr} + Be^{qr}) - C,$$

où A, B, C sont des constantes arbitraires, le facteur dépendant du rayon de la calotte sphérique étant $\frac{e^{qr} - e^{-qr}}{2qr}$. En se bornant à des forces attractives qui diminuent quand la distance augmente, la fonction de Van der Waals est donc la fonction la plus générale admettant dans le cas du potentiel d'une sphère homogène la simplification en question.

Gegenbauer (*L.*). — Nouveaux théorèmes sur les racines des équations $C_n^\nu(x) = 0$. (250-255).

Jusqu'ici l'on savait des racines de l'équation $C_n^\nu(x) = 0$, où $C_n^\nu(x)$ représente le coefficient de α^n dans le développement de l'expression $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\nu}$ suivant les puissances ascendantes de α, qu'elles sont réelles et inégales, situées entre les limites $+1$ et -1, admettant par couples la même valeur absolue; de plus, on avait démontré que les racines de $C_n(x) = 0$ et $C_{n-1}^\nu(x) = 0$, de même que celles de $C_n^\nu(x) = 0$ et de $C_{n-1}^{\nu+1}(x) = 0$ se séparent les unes les autres.

Ici le savant professeur de Vienne déduit plusieurs résultats nouveaux, dont un contient comme cas particulier un théorème connu de la théorie des fonctions sphériques. Entre autres, il trouve que la racine positive la plus petite de $C_n^\nu(x) = 2$ est inférieure à $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Cardinaal (*J.*). — Sur une application des involutions d'ordre supérieur. (271-278).

Le problème de la détermination du nombre des hyperboloïdes orthogonaux

compris dans un faisceau général de quadriques se ramène à un problème de Géométrie plane, si l'on considère l'intersection du faisceau donné avec le plan à l'infini. En remplaçant l'intersection du faisceau avec ce plan et le cercle commun à toutes les sphères par une conique C et un faisceau de coniques aux points de base A_1, A_2, A_3, A_4, situés dans un même plan, le problème se transforme dans la recherche du nombre des coniques C′ du faisceau admettant avec C une sécante commune dont le pôle par rapport à C se trouve sur C′. Le nombre six de ces coniques C′ est déterminé à l'aide d'une involution de quadruples de points dont c est le support.

Kapteyn (*W.*). — Sur quelques cas particuliers de l'équation différentielle de Monge. (278-281, 356-357).

La méthode de solution de l'équation

$$Hr - 2Ks + Lt + M = 0,$$

où H, K, L, M sont des fonctions données de x, y, z, p, q, repose sur la détermination de deux intégrales intermédiaires de la forme $u = f(v)$, où u et v dépendent également de x, y, z, p, q, tandis que f représente une fonction arbitraire. Cependant cette méthode de Monge est défectueuse, l'existence d'intégrales intermédiaires dépendant de certaines relations jusqu'ici inconnues entre les fonctions H, K, L, M. Donc M. Kapteyn a essayé de découvrir ces relations inconnues. Seulement, à cause de la complexité de ces relations, il s'est borné d'abord aux cas simples où l'équation de Monge ne contient que deux termes. Dans tous ces cas l'auteur a pu déduire la condition à laquelle doit satisfaire le coefficient unique, afin que l'équation admette deux intégrales intermédiaires, la forme la plus générale de ce coefficient et les deux intégrales intermédiaires correspondantes. Dans le cas $H = 0$, $L = 0$ il retrouve un résultat indiqué par M. Ed. Goursat.

Veenstra (*S.-L.*). — Corrections systématiques des mouvements propres des étoiles du Catalogue de Bradley publié par Auwers, avec une évaluation des coordonnées de l'apex du mouvement du Soleil. (300-305).

Bakker (*G.*). — Les fonctions potentielles $\varphi(r) = \dfrac{Ae^{-qr} + Be^{qr}}{r}$ et $\varphi(r) = \dfrac{A\sin(qr + \alpha)}{r}$ et la fonction potentielle de Van der Waals. (308-324).

Démonstration du théorème suivant : Le potentiel d'un point (x, y, z) par rapport à des masses continues, comprises en des parties différentes de l'espace et répandues sur des surfaces diverses, satisfait partout, quelques points singuliers et surfaces singulières exceptés, à l'équation différentielle

$$\nabla^2\varphi = q^2\varphi - 4\pi(A - B)\rho$$

ou

$$\nabla^2\varphi = -q^2\varphi - 4\pi\rho A\sin\alpha.$$

où ρ indique la densité en ce point, à mesure que la fonction potentielle prend la première ou la seconde forme du titre. Discussion du théorème réciproque. Énergie potentielle dans l'unité de volume. Tensions dans le milieu. La tension superficielle et la pression moléculaire.

Stokvis (*B.-J.*). — Cornelis Hubertus Carolus Grinwis. (326).

Zeeman (*P.*). — Expériences sur une variation asymétrique des raies du fer dans un champ magnétique. (328-356, 502).

Korteweg (*D.-J.*), *Oudemans* (*J.-A.-C.*) et *Zeeman* (*P.*). — Les manuscrits de feu J.-H. van Swinden. (389-402, 523-529).

Plusieurs de ces manuscrits, en possession de l'Académie, se rapportent à l'introduction du système métrique de poids et de mesures. Ainsi le manuscrit intitulé *Base du système métrique décimal* contient des annotations régulières et étendues de la *Commission des Poids et Mesures*, auxquelles van Swinden a assisté. La publication de ces annotations pouvant jeter une nouvelle lumière sur l'histoire intime de cette commission dont Laplace, Legendre, Delambre et Méchain faisaient partie, l'Académie a adopté à l'unanimité la proposition de son Président de faire paraître dans les publications de l'Académie la partie des manuscrits de van Swinden ayant trait à l'introduction du mètre. Dans un supplément à cette communication, les auteurs font mention de quinze manuscrits se trouvant à la bibliothèque de l'Université de Leyde et de registres alphabétiques de lettres adressées à van Swinden et des copies des lettres de réponse, y faisant partie de la collection B. P. L., n° 755.

Kapteyn (*J.-C.*). — Détermination des coordonnées de l'apex du mouvement du Soleil. (402-423).

L'hypothèse qui doit former la base de la détermination de la direction du mouvement de notre système solaire est sans doute celle-ci : Les mouvements propres particuliers des étoiles fixes n'ont pas de prédilection pour une direction déterminée. Cependant, ni la méthode d'Airy, ni celle d'Argelander ne s'appuient entièrement sur cette hypothèse, et ces deux méthodes prévalent presque sans exception dans les déterminations récentes de l'apex. Même la distribution inégale des mouvements propres par rapport aux grands cercles qui passent par l'apex a conduit M. Kobold à se défaire de l'hypothèse fondamentale indiquée comme n'étant pas suffisamment d'accord avec les observations. D'après M. Kapteyn, cette conclusion est prématurée à ce moment où l'on ne possède pas encore un seul calcul se basant exclusivement sur cette hypothèse; dans ce travail-ci, il se propose de développer une méthode nouvelle qui comble cette lacune.

Hulshof (*H.*). — La déduction directe de la valeur de la constante moléculaire σ, considérée comme tension de la surface. (432-441).

Van der Waals (*J.-D.*). — Refroidissement d'un courant de gaz sous un changement soudain de la pression. (441-451).

D'après Lord Kelvin et Joule, le refroidissement est représenté par l'équation

$$\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2 = k \frac{p_1 - p_2}{\mathrm{T}_1^2};$$

d'après l'équation caractéristique on trouve, si p_1 et p_2 ne sont pas grandes,

$$\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2 = \frac{2}{m} \cdot \frac{273}{c_p} \left(\frac{2a}{1 + \alpha t_1} - b \right) (p_1 - p_2).$$

ou, si a est une fonction de température,

$$\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2 = \frac{2}{m} \cdot \frac{273}{c_p} \left[3a \left(\frac{273}{\mathrm{T}_1} \right)^2 - b \right] (p_1 - p_2).$$

Dans les derniers temps, M. Linde s'est servi de ce refroidissement pour obtenir des températures très basses; donc à présent il est plus important qu'auparavant d'en connaître exactement la valeur. C'est ce qui a conduit l'auteur à refaire ses calculs et à étudier spécialement les circonstances sous lesquelles ce refroidissement devient maximum.

De Vries (*J.*). — Les courbes gauches de l'ordre cinq et du genre premier. (451-457).

1. Par un point quelconque de l'espace on peut mener cinq bisécantes b de la courbe gauche G_1^5 de l'ordre cinq et du genre premier; par un point quelconque de cette courbe il passe un couple de trisécantes t.

2. Les bisécantes b qui s'appuient sur une droite quelconque donnée d forment une surface δ^{15} de l'ordre quinze, dont d est droite quintuple et G_1^5 courbe quadruple; elle admet de plus une courbe double G^{30}.

3. Si d est unisécante u de G_1^5, on trouve une surface δ^{11} à droite quintuple u, courbe triple G_1^5 et courbe double G^8.

4. Si d est bisécante b, on trouve une δ^7 à droite quadruple b et courbe double G_1^5. Une bisécante donnée b ne rencontre, hors de G_1^5, qu'une trisécante unique t.

5. Le lieu des trisécantes t est une surface τ^5 à courbe double G_1^5 du genre premier. Par un point quelconque d'une trisécante donnée t il passe un couple de bisécantes b; le lieu de ces bisécantes est une surface β^3 à droite double t, dont la directrice simple est une unisécante u et l'intersection de deux plans tangents doubles.

6. Une conique Q^2 qui rencontre G_1^5 en cinq points ne rencontre, hors de G_1^5, aucune trisécante t. Le lieu des coniques Q^2 situées en des plans passant par une droite donnée d est donc une φ^3. Si d est unisécante u, son point d'appui S sur G_1^5 est point double de φ^3; si d est bisécante b, φ^3 admet deux points doubles; si d est trisécante t, φ^3 coïncide avec β^3. Donc le lieu des coniques Q^2

s'appuyant en deux points sur une droite *quelconque* donnée est une surface cubique.

7. Le lieu des coniques Q^2, qui passent par un point donné P de l'espace, est une surface cubique π^3 à point double P; ces coniques se trouvent dans les plans d'un faisceau dont une droite p par P est l'axe.

8. L'axe p déterminé par le point P n'appartient pas à une seconde surface cubique π^3; il est indéterminé si P fait partie de G_1^5 et coïncide avec une trisécante t si P se trouve sur τ^5.

9. Si P parcourt une droite donnée a_1, l'axe p décrit une surface réglée α^3 dont a_1 est la directrice simple; cette surface α^3 contient les cinq trisécantes t qui s'appuient sur a_1, et ces cinq trisécantes rencontrent la directrice double a_2 de α^3. Les droites a_1 et a_2 se correspondent l'une l'autre d'une manière réciproque. Si a_1 elle-même est un axe, α^3 est une surface de Cayley et a_1 et a_2 coïncident; donc chaque axe p et chaque trisécante t sont conjugués à eux-mêmes dans la correspondance (a_1, a_2).

10. Relation réciproque des surfaces α^3 correspondant à deux droites conjugués a_1, a_2.

11. Les droites (a_1, a_2) sont les droites conjuguées d'un complexe linéaire dont les axes p et les trisécantes sont les rayons.

12. Trois droites ayant en commun avec G_1^5 respectivement α, β, γ points déterminent $(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)$ coniques Q^2 qui les rencontrent; trois trisécantes quelconques déterminent donc une Q^2 unique.

13. Le lieu des coniques Q^2 qui s'appuient sur une conique C^2 donnée est une surface γ^{30} dont C^2 est une courbe quadruple et la conique Q^2 située dans le plan de C^2 une courbe sextuple. Dégénérations de γ^{30} correspondant à des cas particuliers.

14. Trois coniques ayant en commun avec G_1^5 respectivement α_1, β, γ points déterminent $(6-\alpha)(6-\beta)(6-\gamma)$ coniques Q^2 qui les rencontrent; trois coniques Q^2 quelconques déterminent donc une conique Q^2 unique qui les rencontre.

Schoute (*P.-H.*). — Les courbes gauches rationnelles. (548-555).

L'auteur s'occupe de la série des nombres caractéristiques, commençant par la classe et se terminant par l'ordre, de la courbe tordue qui forme dans l'espace E_s à s dimensions le lieu du centre de courbure hypersphérique de l'ordre le plus élevé de la courbe tordue rationnelle la plus générale R_s^n de l'ordre n, bien contenue dans l'espace E_s à s dimensions, mais pas contenue dans un espace E_{s-1} à $s-1$ dimensions.

Après avoir réduit les s équations $\nu x_i = \alpha_i$, $(i = 1, 2, \ldots, s)$ de R_s^n par rapport à un système d'axes rectangulaires, où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ et ν représentent des polynomes de degré n dans le paramètre t, à l'aide d'un déplacement parallèle du système des axes, à la forme $\nu\xi_i = \beta_i$, $(i = 1, 2, \ldots, s)$, où $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ ne contiennent t qu'au degré $n-1$, l'espace normal de l'ordre $s-1$ de R_s^n au

point t est représenté par

$$\nu \sum_{i=1}^{s} (\beta'_i \nu - \beta_i \nu') \xi = \sum_{i=1}^{s} (\beta'_i \nu - \beta_i \nu') \beta_i,$$

où β'_i et ν' désignent les dérivées de β_i et ν par rapport à t. Cette équation contenant t au degré $3n - 2$, les nombres caractéristiques en question sont

$$3n - 2, \quad 2(3n - 3), \quad 3(3n - 4), \quad \ldots, \quad s(3n - s - 1).$$

Ensuite l'auteur s'occupe des cas particuliers où l'équation de l'espace normal de l'ordre $s - 1$ de R_1^n au point t abaisse son degré en t. Ces cas particuliers, en apparence de cinq espèces différentes, se réduisent aux deux cas suivants :

a. L'équation $\nu = 0$ admet des racines égales.

b. Les équations $\beta_i = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, s)$, admettent des racines communes égales.

La communication se termine par la détermination de l'abaissement du nombre caractéristique $3n - 2$ dans ces deux cas.

De Vries (*J.*). — Comitants orthogonaux (562-571).

1. Représentation de l'équation binaire $a_x^n = 0$ par n droites passant par l'origine. Transformations linéaires.

2. Construction de comitants orthogonaux ou fonctions de a_1, a_2, x_1, x_2 qui ne varient pas quand on fait tourner le système d'axes rectangulaires. Les comitants absolus $x_1^2 + x_2^2$ et $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$. Le caractère invariant des symboles a_a, a_b, (ab), a_x, (ax), x_x, x_y, (xy). Seulement les formes d'ordre pair admettent des invariants linéaires.

3. Les invariants $a_a \equiv a_{20} + a_{02}$, $a_b^2 \equiv a_{20}^2 + 2a_{11}^2 + a_{02}^2$, $(ab)^2 = 2(a_{20}a_{02} - a_{11}^2)$ de la forme quadratique $a_x^2 = a_{20}x_1^2 + 2a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2$.

4. Le covariant $(ax)^2$ représenté par les droites perpendiculaires aux droites a_x^2. Le covariant $(ax)a_x$ des deux rayons perpendiculaires entre eux, séparant a_x^2 harmoniquement.

5. Le covariant $a_b a_x b_x \equiv g_x^2$ aux mêmes axes de symétrie que a_x^2.

6. Les invariants simultanés $(af)^2$, $a_f^2 - f_a^2$, $(af)a_f$ des deux formes a_x^2, f_x^2.

7. Le résultant $a_f^2 b_g^2 - 2(ab)(fg)a_f b_g = 0$ de $a_x^2 = 0$ et $(fx)^2 = 0$. Le couple orthogonal $f_f a_x^2 - a_a f_x^2 = 0$ de l'involution $a_x^2 + \lambda f_x^2 = 0$.

8. Les invariants $(ab)a_b^2$ et $(ab)^3$ de a_x^3 s'annulant identiquement. Les invariants d'ordre pair $(ab)^2 a_b$ et a_b^3. L'identité $(ab)^2 + a_b^2 = a_a b_b$ donnant $a_a a_b b_b \equiv (ab)^2 a_b + a_b^3$. La condition $2a_b^3 + 3(ab)^2 a_b = 0$ que deux des rayons de $a_x^3 = 0$ sont orthogonaux l'un à l'autre.

9. La forme polaire $a_y a_x^2 = 0$. Le covariant $(ab)^2 a_x b_x$ de Hesse; sous la condition $(ab)^2 a_b = 0$ ses rayons sont orthogonaux l'un à l'autre. Rapport de $(ab)^2 (ax) b_x = 0$ et $(ab) a_x^2 b_b = 0$.

10. Les invariants

$$h = a_a^2, \quad i = (ab)^4, \quad j = (bc)^2 (ca)^2 (ab)^2, \quad m = a_b^4, \quad l = (ab)^2 a_b^2 \text{ de } a_x^4.$$

La condition

$$8(bc)^2 (ca)^2 (ab)^2 + 6(bc)^4 a_a^2 - 3 a_a^2 b_b^2 c_c^2 = 0,$$

sous laquelle $a_x^4 = 0$, se compose de deux couples de droites rectangulaires.

11. Extension aux formes ternaires.

Lorentz (*H.-A.*). — Considérations sur la gravitation. (603-620).

D'abord l'auteur fait voir qu'une théorie purement électromagnétique de l'attraction universelle semble impossible. Ensuite il établit une théorie qui, par les hypothèses fondamentales et par la forme, se rattache autant que possible à celle de l'électricité.

Kapteyn (*W.*). — Un cas particulier de l'équation différentielle de Monge. (620-622).

Conditions sous lesquelles l'équation $s + \lambda t + \mu = 0$ admet deux intégrales intermédiaires. Application aux deux cas $s + \lambda t = 0$ et $s + \mu = 0$.

Schoute (*P.-H.*). — Sur le lieu du centre de courbure hypersphérique chez la courbe normale de l'espace à n dimensions. (622-629).

Dans la Communication précédente l'auteur a fait connaître l'abaissement que peut subir la classe du lieu du centre de courbure hypersphérique. Ici il étudie l'abaissement de tous les nombres caractéristiques de ce lieu dans le cas particulier où la courbe rationnelle originale est une forme particulière de la courbe normale la plus simple de l'espace à n dimensions. D'abord le cas de la courbe normale $x_i = t^i$, $(i = 1, 2, 3)$, de l'espace tridimensional sert d'introduction. Ensuite, après avoir rappelé la démonstration du théorème général d'où découlent les nombres caractéristiques généraux

$$3n - 2, \quad 2(3n - 3), \quad 3(3n - 4), \quad \ldots, \quad s(3n - s - 1),$$

l'auteur déduit les nombres caractéristiques

$$2n - 1, \quad 3n - 3, \quad 4n - 7, \quad \ldots, \quad 2n - 1,$$

du cas particulier de la courbe normale $x_i = t^i$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

Van der Waals Jr (*J.-D.*). — Équations où interviennent des

fonctions pour des valeurs différentes de la variable indépendante. (638-651).

Considérations générales sur certains problèmes de physique en rapport avec un problème traité par M. Galitzin (*Annales de Wiedemann*, t. 56, 1895).

Kluyver (*J.-C.*). — Formules d'approximation en relation avec les nombres premiers au-dessous d'une limite donnée. (672-682).

La méthode de Riemann pour la déduction des nombres premiers p inférieurs à un nombre donné c s'applique également à l'évaluation d'autres expressions arithmétiques des nombres premiers comme la somme $\sum\limits_{p<c} p^{-s}$ des valeurs inverses de leurs puissances $s^{\text{ièmes}}$. Toujours les résultats qu'on obtient dans ces cas contiennent un système de termes dépendant des zéros complexes μ de la fonction ζ de Riemann; toujours le plus important de ces termes est la même fonction discontinue de la limite c, tandis que les autres termes sont continus et d'une influence beaucoup plus petite. En face de l'impossibilité d'une évaluation directe du terme discontinu, l'auteur a déduit des approximations plus ou moins serrées de quelques fonctions symétriques des nombres premiers à l'aide de l'élimination de ce terme discontinu, toutefois en supposant connu le nombre des nombres premiers inférieurs à c. Ainsi, il trouve par exemple

$$G_s(c) - \log|\xi(s)| - Li(c^{-s+1}) = c^{-s}[G_0(c) + \log 2 - Li(c)],$$

où $G_s(c)$ représente la somme des valeurs inverses des puissances $s^{\text{ièmes}}$ des nombres premiers inférieurs à c. De plus, en prenant la dérivée de cette équation par rapport à s il trouve

$$\log M(c) + \log 2\pi - c = \log c[G_0(c) + \log 2 - Li(c)],$$

où $M(c)$ représente le multiple commun le plus petit de tous les nombres entiers au-dessous de c. Vérifications et applications.

Schoute (*P.-H.*). — Le théorème de Joachimsthal chez les courbes normales. (744-751).

On a les théorèmes suivants :

« Les circonférences de Joachimsthal, qui se présentent chez une parabole, forment un réseau à un point de base, le sommet de la parabole.

» Si le point d'intersection P des trois normales parcourt le système plan dont le plan de la parabole est le support, le centre M du cercle par les pieds des trois normales décrit dans le même plan un système plan en affinité. »

D'abord l'auteur étend ces théorèmes à la courbe normale de l'espace ordinaire, la parabole gauche représentée par les équations $x_i = t^i$, $(i = 1, 1, 3)$. En désignant respectivement comme points conormaux et points consphériques les cinquples de points de la courbe dont les plans normaux passent par un

même point et les sextuples de points d'intersection de la courbe avec une sphère quelconque, il trouve :

» Les sphères déterminées par les quadruples de points de la parabole gauche conormaux avec un point donné t_1 de cette courbe en contiennent encore deux points fixes, les points t déterminés par la relation $3t^2 - 3t_1 t + 1 = 0$; elles forment donc un réseau dont ces points sont les deux points de base. Et si le point donné t_1 parcourt la parabole gauche, ces deux points engendrent sur elle une involution quadratique à deux points doubles réels, les points $\pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

» Dans l'espace la relation entre le point d'intersection P des plans normaux et le centre M de la sphère de Joachimsthal est une correspondance (5,5).

» Dans un espace quadridimensional, dont l'espace ordinaire fait partie, le lieu des deux points, représentant d'après la cyclographie de Fiedler les sphères de Joachimsthal, est un espace courbe du dixième ordre.

Ensuite l'auteur trouve pour la courbe normale $x_i = t^i$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, en E_n :

» Les hypersphères H_{n-1} à $n-1$ dimensions, déterminées par les groupes de $n+1$ points de la courbe normale N_n^n conormaux avec $n-2$ points donnés t_1, $t_2, \ldots, t_{n-2}$ de cette courbe, la rencontrent encore en $n-1$ points fixes s_1, $s_2, \ldots, s_{n-1}$ et forment donc un réseau dont l'hypersphère H_{n-3} à $n-3$ dimensions déterminée par ces points est la base. Et si le système des $n-2$ points donnés t parcourt N_n^n, les groupes de points s engendrent sur N_n^n une involution de l'ordre $n-1$ à $n-2$ dimensions.

» Si P parcourt le plan π commun aux espaces normaux des $n-2$ points donnés $t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}$, le centre M de l'hypersphère correspondante H_{n-1} décrit le plan μ des points à égale distance des $n-1$ points $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ du groupe correspondant; les systèmes plans de P et M en π et μ sont en affinité.

» Dans l'espace E_n la relation entre les points P et M est une correspondance $(2n-1, 2n-1)$.

» Dans un espace E_{n+1} contenant l'espace E_n qui porte la courbe normale N_n donnée, la représentation cyclographique des hypersphères de Joachimsthal de cette courbe mène à un espace courbe de l'ordre $2(2n-1)$ à n dimensions, etc. »

NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE, seconde série (¹).

Tome III; 1898.

Wythoff (M[lle] *A.-G.*). — Sur la stabilité des trajectoires elliptiques décrites sous l'action de trois forces centrales (en hollandais). (1-29).

Solution couronnée du problème de concours suivant proposé par la Société mathématique d'Amsterdam en 1894 (n° 10) :

(¹) Voir *Bulletin*, XXII₂, p. 111.

« On démontre sans peine qu'on peut obtenir une trajectoire libre elliptique ou hyperbolique sous l'action de trois forces centrales, deux forces attractives ou répulsives émanant des deux foyers et agissant en rayon inverse du carré de la distance, et une force attractive ou répulsive émanant du centre et proportionnelle à la distance. On demande à examiner la stabilité de ces trajectoires et la forme des trajectoires infiniment peu disturbées ».

L'auteur donne deux solutions, la première en coordonnées bipolaires, la seconde en coordonnées elliptiques. Chemin faisant elle résout le problème 78, chapitre V, de *Dynamics of a particle* de MM. Tait et Steele; enfin elle étudie plusieurs cas particuliers.

Schoute (*P.-H.*). — Sur une certaine enveloppe (en allemand). (30-32).

« Sur une cubique plane donnée C^3 on fixe $3\lambda - 1$ points A_i. D'un point quelconque X de C^3 comme centre on projette ces points fixes A_i en A'_i sur C^3. Toutes les courbes C^λ d'ordre λ passant par les $3\lambda - 1$ points A'_i coupent C^3 encore en un point déterminé Y. Chercher l'enveloppe de XY quand X parcourt C^3 ».

A l'aide d'un paramètre elliptique l'auteur donne la solution de ce problème légèrement généralisé et fait connaître les nombres de Plücker de l'enveloppe, Si n, m, g, d, t, r, w représentent respectivement l'ordre, la classe, le genre de l'enveloppe et son nombre de points doubles, de tangentes doubles, de points de rebroussement et de points d'inflexion, on a, indépendamment de λ, les cinq relations

$$n = 2m, \qquad d = 4t, \qquad r = 3m, \qquad w = 0, \qquad g = 1,$$

trois desquelles impliquent les deux autres.

Rahusen (*A.-E.*). — Sur une construction du centre des moindres carrés d'un système de droites (en français). (33-35).

Démonstration nouvelle extrêmement simple de la construction de Ch.-M. Schols, démontrée auparavant par M. M. d'Ocagne, se basant sur le théorème suivant : Un point mobile dans son plan et le barycentre de ses points symétriques par rapport à un système de droites décrivent deux figures inversement semblables.

Kluyver (*J.-C.*). — Solution d'un problème (en anglais). (36-39).

L'auteur expose une méthode élémentaire pour obtenir les valeurs des deux invariants g_2 et g_3 de la fonction elliptique pu, sachant que le rapport ω d'un couple de périodes primitives $2\omega_3$ et $2\omega_1$ a la valeur $\sqrt{-7}$. Cette méthode peut être appliquée dans le cas plus général $\omega_3 = i\omega_1\sqrt{2^n - 1}$.

De Vries (*J.*). — Sur certaines chaînes de Sturm (en allemand). (40-52).

Comme on sait, une chaîne de Sturm est une série de fonctions entières et

rationnelles

$$f(x),\quad f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_m(x)$$

jouissant des propriétés suivantes :

1° La dernière fonction $f_m(x)$ ne disparaît pas pour une valeur réelle de x.

2° Deux fonctions consécutives $f_p(x)$, $f_{p+1}(x)$ n'admettent pas de racine commune réelle.

3° Si une des fonctions $f_p(x)$, où $p = 1, 2, \ldots, m-1$, disparaît pour la valeur réelle a de x, la substitution $x = a$ en $f_{p-1}(x)$ et $f_{p+1}(x)$ mène à des valeurs qui diffèrent de signe.

4° Si $f(x)$ disparaît pour la valeur réelle $x = a$, la substitution $x = a$ en $f_1(x)$ et la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ mène à des valeurs de même signe.

L'auteur considère plusieurs cas particuliers. Après avoir indiqué l'exemple très simple

$$G_n,\quad G_{n-1},\quad G_{n-2},\quad \ldots,\quad G_2,\quad G_1,\quad G_0,$$

où

$$G_n = (ax+bi)^n + (ax-bi)^n,\quad a > 0,$$

il s'occupe de la fonction $V_n(y)$ qu'on obtient en remplaçant $x + \frac{1}{x}$ par y en $x^n + \frac{1}{x^n}$, soumise à la relation récurrente

$$V_n(y) = y V_{n-1}(y) - V_{n-2}(y),$$

tandis que $V_0(y) = 2$. Eu égard à la quatrième condition, la série

$$V_n,\quad V_{n-1},\quad V_{n-2},\quad \ldots,\quad V_2,\quad V_1,\quad V_0,$$

forme une chaîne de Sturm pour $y^2 < 4$. La fonction $z = V_n(y)$ forme une intégrale de l'équation différentielle linéaire

$$(y^2-4)\frac{d^2z}{dy^2} + y\frac{dz}{dy} - n^2 z = 0,$$

et l'on trouve que la série

$$V_n,\quad V'_n,\quad V'_{n-1},\quad \ldots,\quad V'_1,$$

où V'_p représente la dérivée de V_p, forme encore une chaîne de Sturm. Ensuite l'auteur considère la fonction $Y_n(y)$ qu'on obtient par la substitution $x + \frac{1}{x} = y$ en

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + \ldots + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1,$$

qui mène d'une manière analogue à deux chaînes de Sturm dans le même intervalle $y^2 < 4$. Et en posant

$$Q_n = y^n - (n-1)y^{n-2} + \ldots + (-1)^p \binom{n-p}{p} y^{n-2p} \quad \ldots,$$

on a

$$Y_n = Q_n + Q_{n-1},$$

d'où découle que dans le même intervalle la fonction Q_n mène aussi à deux

chaînes de Sturm. Enfin l'auteur étudie la fonction de $y = x + \frac{1}{x}$ définie par l'équation

$$U_n(y) = \frac{x^{2n+1} + 1}{x^n(x+1)},$$

qui se comporte tout à fait de la même manière que les fonctions précédentes.

Cardinaal (*J.*). — Construction de l'accélération du point de rencontre de deux tiges mobiles (en français). (53-56).

En donnant une construction différente de celle de M. Burmester, l'auteur se propose de restreindre le nombre des constructions élémentaires et de faire une application des principes des accélérations perpendiculaires. On sait que beaucoup de constructions de la cinématique se simplifient quand on opère avec des grandeurs géométriques égales aux vitesses des points mobiles, mais menées perpendiculairement à leurs directions dans un sens donné; ici l'auteur applique cette même idée aux accélérations. Après avoir résolu le problème général, il l'applique au cas du quadrilatère articulé.

Korteweg (*D.-J.*). — Descartes et les manuscrits de Snellius d'après quelques documents nouveaux (en français). (57-71).

Le but de cet article, qui a paru d'abord dans le fascicule de la *Revue de Métaphysique et de Morale* de juillet 1896, consacré à la mémoire de Descartes, est de donner une étude détaillée des documents qui se rapportent à la découverte de la loi de la réfraction et des questions qu'ils soulèvent. Les résultats sont formulés dans les trois thèses suivantes :

1° Avant la découverte par Golius en 1632 du manuscrit de Snellius les travaux de Snellius sur la loi de la réfraction, ou du moins le résultat qu'il en avait tiré, étaient inconnus à quelques personnes des mieux placées pour les connaître.

2° La loi de la réfraction était connue par ces mêmes personnes bien avant la trouvaille du manuscrit de Snellius; ils l'attribuèrent à Descartes.

3° Descartes a eu connaissance de la découverte des manuscrits de Snellius avant la publication de sa *Dioptrique*.

Enfin l'auteur voue quelques mots aux difficultés qui restent.

De Vries (*J.*). — La Géométrie du tore (en allemand). (72-76).

L'auteur fait voir que le tore ne porte d'autres circonférences que les parallèles, les méridiennes et les couples de circonférences situés dans les plans tangents doubles.

Janssen van Raay (*W.-H.-L.*). — Sur une formule de la Géométrie non-euclidienne (en français). (77-79).

Démonstration, plus simple que celle de Bolyai, de la formule

$$\cot \tfrac{1}{2}\varpi(x) = e^{\frac{x}{k}}.$$

où $\pi(x)$ représente l'angle de parallélisme correspondant à la distance x et k la constante caractéristique de la Géométrie de Lobatschefsky.

Kluyver (*J.-C.*). — Formules d'addition des fonctions sigma elliptiques (en hollandais). (80-93).

Dans la plupart des traités sur la théorie des fonctions elliptiques on s'occupe avec grande prolixité des relations abondantes entre les fonctions θ à arguments composés, et l'on néglige ordinairement les formules analogues pour la fonction σ. Sans doute on peut passer sans beaucoup de peine des fonctions θ aux fonctions σ. Ici l'auteur déduit d'une manière directe les formules qui se rapportent aux fonctions σ, après avoir démontré d'avance que la fonction $\sigma(u)$ jouit de la propriété remarquable d'être la fonction unique, holomorphe dans tout le plan, qui possède les caractères de périodicité indiqués par l'équation

$$\sigma(u+2\omega_\alpha) = -\sigma u e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}, \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

où l'on a $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$ et

$$\omega_2\eta_3 - \omega_3\eta_2 = \omega_3\eta_1 - \omega_1\eta_3 = \omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1 = \frac{i\pi}{2}.$$

Après avoir déduit les relations entre les quatre fonctions conjuguées σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, l'auteur en donne trois applications. D'abord il déduit les valeurs de x_1 et x_2 des deux équations connues de Rosenhain (Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, *Mémoires des savants étrangers*, Paris, 1851); ensuite il calcule les fonctions elliptiques de l'argument v, celles de $2v$ étant données; enfin il s'occupe des coordonnées elliptiques dans l'espace.

Tesch (*J.-W.*). — Où est décédé Simon Stevin (en hollandais)? (94).

D'après l'auteur, Stevin est décédé à la Haye (Raamstraat, 47) et non pas à Leyde.

Wythoff (Mlle *A.-G.*). — Sur la stabilité dynamique d'un système de particules (en anglais). (95-110).

Solution couronnée du problème de concours suivant proposé par la Société mathématique d'Amsterdam en 1895 (n° 2) :

« Un nombre de particules s'attirant les unes les autres en raison de leurs masses et de la puissance $n^{\text{ième}}$ de leurs distances se meuvent d'une telle manière que ces distances ne varient pas. On demande à examiner la stabilité du système. »

Sous les conditions indiquées le mouvement du système consiste en une translation et une rotation autour d'un axe par le centre de gravité; ces deux mouvements ont des vitesses constantes et l'axe de rotation conserve sa direction.

L'auteur trouve que le système en question est stable ou instable, suivant qu'une certaine équation $D = 0$, où D est un déterminant dont les éléments de la diagonale principale ont la forme $am + b$, tandis que les autres éléments ne contiennent pas m, a ou n'a pas toutes ses racines m réelles et négatives;

elle en déduit qu'il n'y a pas de stabilité dans le cas particulier de q particules en ligne droite, les forces agissant en raison inverse d'une puissance quelconque de la distance.

Schoute (*P.-H.*). — Les angles quadridimensionaux de deux plans (en français). (111-116).

D'abord l'auteur indique, à l'aide d'un système rectangulaire OX_1, OX_2, OX_3, OX_4 en E_4, les particularités suivantes qui peuvent se présenter par rapport à la position mutuelle de deux plans α, β :

	Les plans ont en commun	Leur position relative est	Exemple : OX_1X_2 et
1...	Un point à distance finie	arbitraire	$ax_2+bx_3=0,\ cx_4+dx_1=0$
2...	Un point à distance finie	incomplètement perp.	$ax_1+bx_2=0,\ cx_4+dx_1=0$
3...	Un point à distance finie	complètement perp.	$x_1=0,\quad x_2=0$
4...	Un point à l'infini	incomplètement par.	$ax_3+bx_4=c,\ dx_4+ex_1=0$
5...	Un point à l'infini	incompl. par. et perp.	$ax_3+bx_4=c,\ dx_1+ex_2=0$
6...	Une droite à distance finie	incomplètement par.	$ax_3+bx_4=0,\ dx_4+ex_1=0$
7...	Une droite à distance finie	incompl. par. et perp.	$ax_3+bx_4=0,\ dx_1+ex_2=0$
8...	Une droite à l'infini	complètement par.	$x_3=a,\quad x_4=b$

Ensuite en revenant au cas premier il cherche le minimum de l'angle aigu AOB, où OA est une droite quelconque de α et OB une droite quelconque de β menées par le point commun O de α et β. Par la Géométrie et par l'Analyse il démontre qu'il y a deux minimums situés en des plans complètement perpendiculaires l'un à l'autre.

Vaes (*F.-J.*). — Les racines imaginaires des équations d'ordre supérieur (en allemand). (117-125).

L'auteur s'occupe de l'équation trinome $x^n \pm px \pm q = 0$. D'abord il fait voir que sous la condition $q^{n-1}n^n > p^n(n-1)^{n-1}$ toutes les racines sont imaginaires si n est pair, tandis qu'il y a une racine réelle unique pour n impair. Ensuite il démontre plusieurs théorèmes en rapport avec une solution graphique et introduit une nouvelle notion en distinguant les racines imaginaires accidentelles et les racines imaginaires absolues. Deux racines imaginaires sont imaginaires accidentelles ou absolues suivant qu'il est possible ou impossible de les faire coïncider par une variation du terme connu q.

Mannoury (*G.*). — Lois cyclomatiques (en français). (126-152).

Le but principal de cette étude est de faire connaître un rapport remarquable entre les nombres de Betti d'une figure géométrique et ceux du milieu dans lequel se trouve cette figure. Pourtant l'auteur n'a pas introduit ces nombres eux-mêmes; il les a remplacés par d'autres, une unité plus petits, qu'il nomme *nombres cyclomatiques*. Cela lui a permis d'éloigner des formules toute constante sans interprétation géométrique et spécialement de donner sous une forme assez simple un théorème qui peut être regardé comme la généralisation de la loi d'Euler sur les polyèdres. Tandis que cette loi égale la somme alternée des nombres des sommets, des arêtes et des faces d'un polyèdre ordinaire à

deux, le théorème général exprime que la somme alternée des *taxes* des sommets, des arètes, etc., est égale à la *taxe* du polyèdre lui-même, où la *taxe* d'une variété est la somme alternée de ses nombres cyclomatiques. Ce théorème s'applique non seulement aux polyèdres n-dimensionaux proprement dits, mais à chaque figure géométrique dont les *taxes* sont finies ; il a été donné sous une autre forme par M. W. Dyck (*Math. Ann.*, t. 37, p. 282, formule 4, 1890). Pourtant l'auteur a cru que son étude ne fait pas double emploi avec celle de M. Dyck, parce que ce dernier introduit les *taxes* des variétés n-dimensionales, sous le nom de *nombres caractéristiques*, sans établir leur rapport avec les nombres cyclomatiques ou les nombres de Betti.

1. *Les nombres cyclomatiques dans les espaces à trois dimensions au plus.* Cyclose, sphérose, punctose.

2. *Extension à n dimensions.* — Variétés fermées à n dimensions, cyclose, variétés doubles, surface-tore.

3. *Lois cyclomatiques.* — Contraction et trémature, taxe.

4. *La loi d'Euler.* — Exemples.

Aperçu historique de la littérature.

Quint (*N.*). — La droite générale de Wallace d'un polygone inscrit (en anglais). (153-157).

Extension d'un problème publié par M. Langley, en 1889 (*Reprints Educ. Times,* question 12212) par la substitution de projections sous un angle α au lieu de projections orthogonales.

De Vries (*J.*). — Quelques problèmes des courbes planes du quatrième ordre à un point double (en hollandais). (158-159).

Déduction simple de plusieurs théorèmes sur les quartiques planes de genre deux, démontrés à l'aide d'intégrales elliptiques par M. W.-R. Westropp Roberts (*Proc. London Math. Soc.*, 1894) et par la Géométrie par l'auteur (*Wiener Sitzungsberichte,* t. 104, p. 58).

De Vries (*J.*). — Sur les points d'intersection d'une ellipse avec des circonférences et des hyperboles équilatères (en hollandais). (160-164).

L'auteur applique d'abord la relation $\Sigma\varphi \equiv 0 \pmod{2\pi}$ entre les anomalies excentriques des points d'intersection d'une ellipse donnée avec un cercle quelconque au cas du cercle osculateur. Ensuite il démontre le théorème de Joachimsthal généralisé par Tesch à l'aide de la relation analogue $\Sigma\varphi \equiv \pi \pmod{2\pi}$ entre les anomalies des points d'intersection d'une ellipse donnée avec une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes de l'ellipse.

Van Oss (*S.-L.*). — Application d'un couple de théorèmes de la

Géométrie et du mouvement dans l'espace quadridimensional à la Géométrie de l'espace ordinaire (en hollandais). (165-174).

Les deux angles plans de deux plans en E_4. Considérations analogues par rapport à deux grands cercles d'une même hypersphère qui se croisent. Transformation stéréographique de cette hypersphère en un E_3, de manière qu'une grande sphère déterminée ne change pas; les grands cercles de l'hypersphère se transforment en des *cercles principaux* de E_3. Rotation de l'espace E_3 autour d'un cercle comme la projection de la rotation d'une hypersphère autour d'un grand cercle. Déduction des propriétés de la rotation de l'espace E_3 autour d'un cercle des propriétés du mouvement d'une hypersphère autour de son centre, se composant de deux rotations α, β autour d'un couple de plans déterminés A, B complètement perpendiculaires l'un à l'autre. La transformation de l'espace E_3 représentée par deux arcs de cercles α, β. Dans le cas particulier où les deux composantes de la rotation de l'hypersphère sont égales, chaque point de E_3 décrit un cercle principal et le système de ces cercles jouit de la propriété que deux cercles quelconques qui en font partie admettent deux angles plans égaux. Application au tore.

Ekama (*H.*). — Quadrature, complanation et cubature de quelques figures planes et solides (en hollandais). (175-179).

Complément d'un mémoire antérieur (*Nieuw Archief*, 1re série, t. XVI).

Quint (*N.*). — Sur une extension du théorème de Wallace (en anglais). (180-183).

Aire du polygone podaire général. Les polygones podaires à aire donnée de Steiner. Le théorème de Wallace (Simson) et son extension par Poncelet. Une relation probablement due à Gergonne. Généralisations : entre autres, la généralisation à l'espace due à M. Combette.

Dans un post-scriptum l'auteur relève que le théorème de Langley (*voir* sa Communication précédente) a été découvert déjà en 1877 par M. G. de Longchamps.

Krüger (*S.*). — Sur l'ellipsoïde de Jacobi (en français). (184-221).

Mémoire en rapport avec la thèse hollandaise de l'auteur (Leyde, 1896) intitulée : *Formes d'équilibre ellipsoïdales d'une masse fluide homogène en rotation.*

1. Résultat de Meyer (1842) et de Liouville par rapport à l'ellipsoïde à trois axes inégaux a, b, c, dit *de Jacobi*. 2. Discussion beaucoup plus complète de Roche (1849); ses Tables des fonctions $A_1 = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{\Delta^3}$ et $A_2 = \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\Delta^3}$, où

$$\Delta^2 = (1 + x)\left(1 + \frac{c^2}{a^2}x\right)\left(1 + \frac{c^2}{b^2}x\right),$$

dont dépend le problème, Tables qui d'après Tisserand ne laissent rien à désirer. 3. Calculs de Plana (1852). 4. Calculs de M. Matthiessen (1859, 1871, 1880).

5. Méthode de M. Kostka (1870), élève de Richelot; méthode à l'aide de la fonction $\wp$ de Weierstrass adoptée par l'auteur en suivant partiellement les traces de M. Kostka. 6. Calculs de M. G. Darwin (1886). A la fin de cet aperçu historique des calculs ayant trait aux formes d'équilibre ellipsoïdales d'une masse fluide en rotation, l'auteur rend hommage à Roche. 7. Élargissement du problème par M. Poincaré (1885) qui montra que tant parmi les ellipsoïdes de Jacobi que parmi les ellipsoïdes de révolution (Maclaurin, d'Alembert) il y a une *infinité* de figures, appartenant à d'autres séries de figures d'équilibre. Extension des résultats de M. Poincaré.

De Vries (*J.*). — Sur une certaine congruence (3, 3) corrélative à elle-même (en allemand). (222-224).

L'auteur s'imagine dans l'espace trois faisceaux de rayons en rapport projectif dont $\tau_i (i = 1, 2, 3)$ sont les plans-supports et $T_i (i = 1, 2, 3)$ les sommets; puis il étudie la congruence (3, 3) des droites qui rencontrent trois rayons homologues $s_i (i = 1, 2, 3)$ de ces faisceaux. Cette congruence se décompose en un système d'indice 3 de systèmes réglés (s_1, s_2, s_3). Elle possède douze points et douze plans singuliers de première espèce et trois points et trois plans singuliers de seconde espèce. Les points et les plans singuliers de première espèce sont les sommets et les plans-supports de six couples de faisceaux de rayons formant six systèmes réglés (s_1, s_2, s_3) dégénérés; donc chacune des arêtes et chacune des faces de l'angle trièdre (τ_1, τ_2, τ_3) contiennent respectivement deux et quatre de ces douze points. Les points et les plans singuliers de seconde espèce sont les points T_i et les plans τ_i.

En étudiant la correspondance (6, 6) des points d'intersection d'une droite quelconque avec le systeme des systèmes réglés (s_1, s_2, s_3) l'auteur démontre que la congruence (3, 3) est aussi du rang 3.

Kapteyn (*W.*). — Sur deux séries qui représentent la même fonction dans une partie du plan (en français). (225-229).

Au moyen de la série de Bürmann l'auteur transforme la série

$$2\left[\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{3^2}\operatorname{tang}^3\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{5^2}\operatorname{tang}^5\frac{\lambda}{2} + \ldots\right],$$

dans la série

$$\operatorname{tang}\lambda - \frac{2}{3^2}\operatorname{tang}^3\lambda + \frac{2.4}{3.5^2}\operatorname{tang}^5\lambda - \ldots.$$

En remplaçant $\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}$ par la variable complexe $z = x + iy$ ces deux séries admettent une même valeur dans tout point z satisfaisant aux conditions simultanées

$$\operatorname{mod}\frac{2z}{1 - z^2} < 1, \quad \operatorname{mod} z < 1.$$

Kluyver (*J.-C.*). — Le problème des valeurs de contour données pour une figure limitée par deux circonférences (en hollandais). (230-235).

Dans le cas de figures de connexité simple le problème de Dirichlet se réduit à celui de la représentation conforme sur la circonférence; dans le cas de figures de connexité multiple seulement les figures limitées par des cercles admettent une solution proprement dite. Pour ces dernières figures un mémoire de Riemann sur l'équilibre de l'électricité sur des cylindres droits à axes parallèles fait connaître une méthode déterminée de solution dont les principes forment de même la base d'un Mémoire de Schottky, tandis que Neumann a donné une solution complète du cas particulier de deux cercles. L'auteur se propose de retrouver les résultats de Neumann à l'aide de la méthode de Riemann. Cette méthode se résume dans les lignes suivantes : Dans le cas d'une figure limitée par n cercles on s'imagine une surface de Riemann à n feuillets, l'axe des quantités réelles faisant emploi de coupure dans chacun des feuillets, des couples de points symétriques par rapport à cet axe formant un système de points de ramification choisi de manière que la partie supérieure de la surface de Riemann à n bords droits possède la même connexité que la figure donnée. Cela posé, une intégrale déterminée de troisième espèce mène à la solution du problème, aussitôt qu'on sait trouver une représentation conforme de la figure limitée par des arcs de cercle sur la partie supérieure de la surface de Riemann. Dans le cas en question $n = 2$ la figure donnée peut être représentée sur un rectangle aux côtés 2ω et ω', où comme d'ordinaire 2ω et $2\omega'$ représentent les périodes réelle et imaginaire de la fonction elliptique qu'il faut introduire.

Schoute (*P.-H.*). — Sur les relations entre les nombres de Plücker d'une courbe plane et ceux de sa développée (en français). (236-238).

Si n, m, g, d, k, t, b désignent respectivement l'ordre, la classe, le genre, les nombres des points doubles, des points de rebroussement, des tangentes doubles et des tangentes d'inflexion d'une courbe plane C et que n', m', ..., b' désignent les mêmes quantités de la développée C' de C, on a les trois relations générales

$$(1) \qquad m' = n + m, \qquad n' = b + 3n, \qquad g' = g.$$

En exprimant b, g en n, d, k et g' en n', d', k' on en déduit $b' = 0$, l'élimination de d, k entre les trois équations faisant disparaître n en même temps. Donc, en partant d'une C' algébrique générale, les relations (1) sont incompatibles ou dépendantes, selon que C' est un lieu géométrique général ou une enveloppe générale.

Schoute (*P.-H.*). — Extension de la notion *surface de l'onde* à la Géométrie à n dimensions (en hollandais). (239-242).

Dans l'espace E_n à n dimensions les équations

$$\sum_1^n \frac{a_i^2 u_i^2}{a_i^2 - k^2 \Sigma u_i^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_1^n \frac{x_i^2}{k^2 - a_i^2 \Sigma x_i^2} = 0$$

représentent, en coordonnées tangentielles u_i et coordonnées ordinaires x_i se

rapportant au même système d'axes rectangulaires et liées par la relation

$$\sum_{1}^{n} u_i x_i + 1 = 0,$$

le même *espace de l'onde* de l'ordre et de la classe $2(n-1)$. Déduction de l'identité des deux lieux, obtenus par des constructions différentes, par l'extension de la méthode de M. Mannheim (*Association française,* Congrès de Lille, 1874).

Scott (Ch.-A.). — Note sur des systèmes linéaires de courbes (en anglais). (243-252).

La transformation rationnelle d'un plan s'effectue à l'aide d'un réseau de courbes φ d'ordre σ soumises aux conditions de passer respectivement ρ_1, ρ_2, ... fois par les points fondamentaux donnés A_1, A_2, ... Deux courbes quelconques φ de ce réseau se rencontrent en $\lambda = \sigma^2 - \Sigma\rho^2$ autres points, de manière que les conditions imposées aux courbes φ laissent

$$k = \frac{1}{2}\sigma(\sigma+3) - \frac{1}{2}\Sigma\rho(\rho+1)$$

degrés de liberté.

Les deux lois fondamentales de la transformation

$$y_1 : y_2 : y_3 = \varphi_1(x) : \varphi_2(x) : \varphi_3(x)$$

sont les suivantes :

1° En général à un point P_x donné correspond un seul point P_y, tandis qu'au point P_y correspond le point donné P_x et $\lambda - 1$ autres points P'_x. Seulement à un point fondamental A_i d'ordre ρ_i du plan de P_x correspond une courbe rationnelle d'ordre ρ_i, tandis qu'à cette courbe correspond dans le plan de P_x une courbe d'ordre $\sigma\rho_i$ passant $\rho_i^2 + 1$ fois par A_i et $\rho_i\rho_j$ fois par un autre point fondamental A_j.

2° En général à une courbe quelconque du plan de P_x correspond une courbe et à cette dernière courbe correspond la courbe donnée et une courbe complémentaire. Seulement, si le plan de P_x contient une courbe fondamentale β faisant partie de deux courbes φ indépendantes, cette courbe β se comporte comme un point.

L'auteur indique deux causes de déviation de ces lois générales; ce sont :

a. La courbe fondamentale d'un point fondamental A_i donné peut être remplacée totalement ou en partie par d'autres points fondamentaux. Cette particularité se présente aussitôt qu'une des courbes φ passe r fois par A_i, r surpassant l'ordre ρ_i de A_i. Alors la courbe fondamentale de A_i se réduit à une droite comptée ρ_i fois.

b. La courbe fondamentale β se compose de plusieurs parties, une desquelles compte au moins deux fois; cette particularité fait varier le nombre et l'arrangement des points associés.

La présente Note est consacrée à la question suivante : A quel degré l'existence des deux causes de déviation indiquées affecte-t-elle le caractère du ré-



seau de transformation (φ) ? Le résultat principal est que la position des points fondamentaux n'en éprouve aucune influence, pourvu qu'on ait choisi les courbes qui déterminent le réseau entre certaines limites qui dépendent de λ.

Gravelaar (*N.-L.-W.-A.*). — La *Trigonometria* de Pitiscus (en hollandais). (253-278).

Étude bibliographique, débutant par une confrontation des différentes éditions de la *Trigonométrie* de Pitiscus, contenant un exposé sommaire du Manuel proprement dit, et suivie par plusieurs annotations.

Mantel (*W.*). — La périodicité des fonctions goniométriques (en hollandais). (279-282).

Le but de cette Note est de déduire la périodicité des fonctions goniométriques de leurs développements en série à l'aide de séries à double entrée. D'après l'auteur la démonstration la plus simple de la transcendance de π doit se baser sur le développement de $\sin x$ en série.

Kapteyn (*W.*). — Sur les valeurs numériques d'une intégrale définie (en français). (283-284).

L'intégrale de arc tang($\cos p$ tang λ) dp entre les limites o et $\frac{1}{2}\pi$ se développe en série convergente pour toutes les valeurs de λ et se détermine exactement pour les valeurs

$$\lambda = 90^\circ, \qquad \lambda = 63^\circ 26' 6'', \qquad \lambda = 45^\circ, \qquad \lambda = 26^\circ 33' 54''.$$

Moors (*B.-P.*). — Évaluation approchée d'une intégrale définie (en hollandais). (285-291).

Suite d'un Mémoire portant le même titre (*Nieuw Archief*, 1re série, t. XX, p. 129).

Mantel (*W.*). — Dilogarithmes (en hollandais). (292-320).

Solution couronnée du problème de concours suivant proposé par la Société mathématique d'Amsterdam en 1897 (n° 11) :

« Étude de la fonction $\psi(x) = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \ldots$ dont Landen, Legendre Abel ont fait connaître quelques propriétés. »

L'auteur considère la fonction donnée $\psi(x)$ comme le cas spécial

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^1 \frac{dx}{1-x}$$

de l'intégration itérée $\int R_2(x)\,dx \int R_1(x)\,dx$ de fonctions rationnelles. Comme $\int_0^x \frac{dx}{x}$ livre le logarithme de x il désigne $\psi(x)$ comme le dilogarithme de x. Diverses formes de l'intégrale $\psi(x)$. Développements en série.

Dilogarithmes de nombres complexes. L'intégrale dilogarithmique la plus générale $\int R_2(x)\,dx \int R_1(x)\,dx$ se composant d'un certain nombre d'intégrales

$$\int \frac{dx}{x-b} \int \frac{dx}{x-a}$$

aux points critiques a, b, ∞. Relations d'échange entre deux des trois points critiques de $\psi(x)$. Dilogarithmes de quelques nombres 1, $\frac{1}{2}$ — i, ... Dilogarithmes généraux. Correction de l'équation principale. Exemples. Autre forme du dilogarithme général.

Tome IV : 1900.

Schoute (*P.-H.*). — Un problème de Géométrie descriptive (en hollandais). (1-6).

« Déterminer l'intersection d'un cône de révolution et d'une sphère. La sphère repose sur le plan horizontal. Le cône a son axe dans le plan du méridien principal de la sphère; les génératrices situées dans ce plan sont : 1° la tangente au méridien principal au point A le plus haut, 2° une droite passant par l'extrémité B du diamètre horizontal. »

L'auteur étudie la transformation que subit la projection horizontale de l'intersection, si la seconde des deux génératrices indiquées fait un tour d'horizon autour de B dans le plan du méridien principal de la sphère.

Wythoff (*A.-G.*). — Sur la stabilité dynamique d'un système de quatre particules (en anglais). (7-21).

Solution couronnée d'un problème de concours proposé par la Société mathématique d'Amsterdam en 1897 (n° 6).

M. C. Krediet a démontré (*Nieuw Archief*, 1re série, t. XIX, p. 66) que quatre particules s'attirant les unes les autres par des forces proportionnelles à leurs masses et à la $n^{\text{ième}}$ puissance de leurs distances, de manière que ces distances restent invariables pendant le mouvement, ne se trouvent en équilibre dynamique que dans un des trois cas suivants :

1° Les quatre particules se trouvent sur une même droite.

2° Elles forment les sommets d'un deltoïde, les masses des deux points symétriques par rapport à l'axe de cette figure étant égales.

3° Trois des quatre particules à masses égales forment les sommets d'un triangle équilatéral et la quatrième est placée dans le centre.

Mlle Wythoff applique les résultats de son Mémoire précédent à ce cas particulier.

Dans le premier cas le mouvement est toujours instable; dans les autres cas le mouvement peut être stable ou instable.

Van der Griend Jr (*J.*). — Solution graphique d'un système d'équations linéaires (en hollandais). (22-41).

La solution de l'auteur n'est en réalité que la construction du point d'inter-

section d'espaces linéaires. A cet effet il donne une théorie élémentaire de l'espace polydimensional, du système de coordonnées polydimensional et de la représentation de ce système dans le plan.

Vaes (*F.-J.*). — Solution graphique d'un système de n équations linéaires à n inconnues (en hollandais). (42-45).

Exposé de la solution, suivie d'une liste bibliographique se rapportant à ce sujet.

Korteweg (*D.-J.*). — Sur un théorème remarquable, qui se rapporte à la théorie des équations algébriques à paramètres réels, dont toutes les racines restent constamment réelles (en français). (46-53).

« Soit $\varphi(a, b, c, \ldots, x) = 0$ une équation algébrique qui, pour des valeurs réelles quelconques des paramètres a, b, c, ..., possède des racines exclusivement réelles. Soient $a = a_1$, $b = b_1$, ..., des valeurs de ces paramètres pour lesquelles m racines de l'équation deviennent égales à x_1. Alors il faut que toutes les dérivées de φ, telles que $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{da}, \frac{d\varphi}{db}, \ldots, \frac{d^2\varphi}{dx\,da}, \frac{d^2\varphi}{dx\,db}, \ldots, \frac{d^2\varphi}{da\,db}, \ldots$, jusqu'à celles de l'ordre $m-1$ incluses, s'annulent pour les valeurs $x = x_1$, $a = a_1$, $b = b_1$, ... ».

L'auteur démontre ce théorème probablement nouveau (comparer les questions 1165 et 1166 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* t. IV, p. 242) et l'applique à un exemple simple, celui de l'équation séculaire. Ensuite il discute les circonstances sous lesquelles le théorème réciproque soit vrai tout de même.

Gravelaar (*N.-L.-W.-A.*). — La notation des fractions décimales (en hollandais). (54-73).

L'auteur se propose de démontrer que nous devons la notation moderne des fractions décimales à John Napier et pas à Burgi (et Pitiscus) ou à Képler, comme le prétendent Wolf et M. Cantor d'un côté et M. Unger de l'autre.

Kluyver (*J.-C.*). — Sur le développement d'une fonction dans une série factorielle (en hollandais). (74-82).

Il s'agit du développement d'une fonction en une série

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \lambda_k \frac{k!}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+k)}$$

qui s'accorde en convergence et divergence avec la série beaucoup plus simple

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\lambda_k}{k^z}.$$

L'auteur examine, à l'aide de deux théorèmes de R. Murphy (*Cambridge*

Transactions, t. IV, p. 353), les conditions sous lesquelles une fonction donnée $\varphi(z)$ puisse être représentée par une série factorielle de la forme indiquée. Ensuite il applique ses résultats aux cas particuliers $\Gamma(z)$ et $\frac{1}{z}e^{-z}$.

Mannoury (*G.*). — Sphères de seconde espèce (en français). (83-89, 129).

La représentation des points d'un plan sur la surface d'une sphère au moyen de la projection centrale, le centre de projection coïncidant avec le centre de la sphère, offre l'avantage que les représentations des points et des droites du plan sont géométriquement équivalentes; seulement cette représentation n'est pas uniforme. Pour écarter ce défaut sans perdre l'avantage qui l'accompagne, l'auteur fait subir à la sphère, dans un espace à cinq dimensions qui la contient, une déformation sans extension qui fait coïncider chacun des points de la sphère avec le point diamétralement opposé. Ainsi il obtient une surface qui peut être regardée comme la réalisation du plan de la Géométrie riemannienne; il l'indique par le nom *sphère de seconde espèce*. Cette sphère de seconde espèce est représentée par les équations

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad x_4^2 = 2x_2x_3, \qquad x_5^2 = 2x_3x_1, \qquad x_6^2 = 2x_1x_2.$$

La projection de cette surface sur l'espace coordonné $O(X_4, X_5, X_6)$ est la surface romaine

$$x_5^2x_6^2 + x_6^2x_4^2 + x_4^2x_5^2 = x_4x_5x_6$$

de Steiner, etc.

Ensuite l'auteur s'occupe de la représentation analogue de l'hypersphère à $n-1$ dimensions en E_n.

Schoute (*P.-H.*). — Sur une transformation cubique dans l'espace (en anglais). (90-100).

Par un point quelconque P qui ne se trouve pas sur une cubique gauche donnée G^3 il ne passe qu'une corde unique p de cette courbe; cette corde p ne contient qu'un point unique P′ séparé harmoniquement de P par ses deux points d'intersection avec la courbe. De la correspondance birationnelle involutive (P, P′) du troisième ordre les points Q de G^3 sont des points singuliers, chaque point Q de G^3 admettant au lieu d'un seul point correspondant un lieu de points correspondants, la tangente q en Q à G^3.

D'après l'auteur le lieu complet des points singuliers de la correspondance se compose de deux cubiques gauches coïncidées en G^3, de manière qu'en chaque point Q de G^3 le plan osculateur φ représente le plan de coïncidence des tangentes aux points coïncidés. En effet, seulement cette supposition implique : 1° que les surfaces α^3, β^3 qui correspondent à deux plans quelconques α, β *se touchent* le long de G^3, de manière qu'elles se coupent encore suivant une cubique gauche, la courbe correspondant à la droite d'intersection des deux plans; 2° que la surface développable δ^4 dont G^3 est l'arête de rebroussement se détache *deux fois* de la surface α^9 correspondant à la surface α^3 correspondant au plan donné α; 3° que la tangente q en Q à G^3 se détache *deux fois* du lieu cubique correspondant à une droite quelconque par Q située dans le plan

osculateur φ de Q et 4° que cette tangente se détache donc au moins *trois fois* du lieu correspondant à la tangente q elle-même. Cette supposition est confirmée par l'analyse. En représentant G^3 point pour point par les équations $x_i = \lambda^i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ les formules de transformation sont $x' = X_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, où l'on a, en introduisant les symboles

$$A = x_0 x_2 - x_1^2, \qquad B = x_0 x_3 - x_1 x_2, \qquad C = x_1 x_3 - x_2^2,$$

simplement

$$\begin{aligned} X_0 &= 2Ax_1 - Bx_0, \\ X_1 &= 2Ax_2 - Bx_1 = Bx_1 - 2Cx_0, \\ X_2 &= 2Ax_3 - Bx_2 = Bx_2 - 2Cx_1, \\ X_3 &= \phantom{2Ax_3 - Bx_2 = {}} Bx_3 - 2Cx_2. \end{aligned}$$

Donc on vérifie sans peine que la surface $f \equiv \Sigma p_i X_i = 0$, correspondant au plan $\Sigma p_i x_i = 0$, touche au point λ de G^3 le plan osculateur

$$\lambda^3 x_0 - 3\lambda^2 x_1 + 3\lambda x_2 - x_3 = 0,$$

les conditions

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_0}}{\lambda^3} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{-3\lambda^2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{3\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_3}}{-1}$$

étant des identités en λ.

Cela posé, l'auteur étudie les surfaces anallagmatiques par rapport à la correspondance en question. Pour y arriver il considère d'abord les surfaces cubiques et quartiques qui touchent δ^4 le long de G^3. Le système de ces surfaces cubiques correspond au système des plans, de manière que chacune de ces surfaces admet trois points doubles, les points d'intersection de G^3 avec le plan correspondant α; de plus, cette surface admet trois droites complanaires concourantes au point O′ qui correspond au point d'intersection O des trois plans osculateurs de ces trois points d'intersection. Les surfaces quartiques qui sont circonscrites à δ^4 suivant G^3 forment un système douze fois infini dont l'équation est déduite. Enfin l'étude des surfaces anallagmatiques mène au théorème suivant : Chaque surface quartique touchant δ^4 suivant G^3, anallagmatique par rapport à la transformation, contient 25 droites; 15 de ces droites sont des bisécantes de G^3 joignant l'un à l'autre six points de G^3 et les 10 autres sont les droites d'intersection des couples de plans qui passent par ces six points.

De Vries (*J.*). — Involutions cubiques du premier et du second rang sur une cubique gauche (en allemand). (101-106).

Les involutions cubiques du premier et du second rang se déterminent à l'aide d'un faisceau et d'un réseau de plans. Au moyen de la dernière l'auteur démontre plusieurs problèmes pour la plupart connus en rapport avec la cubique gauche et la surface développable dont elle forme l'arête de rebroussement.

Vaes (*F.-J.*). — La division régulière de l'espace à l'aide de polyèdres limités par quatorze faces (en hollandais). (107-108).

En 1894, Lord Kelvin indiquait la possibilité de la division de l'espace dans un nombre infini de polyèdres égaux limités par six carrés et huit hexagones réguliers; en 1895, P.-H. Schoute en donnait une démonstration directe. Ici l'auteur en donne une autre à l'aide de la Géométrie descriptive.

Kluyver (*J.-C.*). — L'inversion des intégrales de première espèce (en hollandais). (109-111).

Déduction directe des formules connues qui dominent cette inversion.

Mannoury (*G.*). — Surfaces-images (en français). (112-129).

L'auteur se propose de représenter univoquement les systèmes des rapports mutuels de trois variables complexes x, y, z, ne s'annulant pas toutes à la fois, par les points réels P d'une surface fermée à quatre dimensions, de manière que tous les points P et toutes les surfaces $S \equiv \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ à deux dimensions soient géométriquement équivalents. Ces conditions reviennent à la suivante : Si x, y, z satisfait à $S = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ et x', y', z' à $S' \equiv \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0$, la surface-image I à quatre dimensions doit pouvoir glisser sur elle-même, de sorte que (x, y, z) vienne en (x', y', z') et $S = 0$ en $S' = 0$. Pour y réussir il faut d'abord établir une substitution linéaire entre les variables x, y, z représentant un glissement de la surface I sur elle-même. A cette fin l'auteur considère une représentation géométrique du système des points (x, y, z) par des plans situés dans un espace E_6 à 6 dimensions; alors une certaine substitution entre les x, y, z, qui fait passer ces plans les uns dans les autres sans en changer la position relative, appelée *substitution c-orthogonale,* mène à une expression pour la distance de deux points quelconques de la surface I et cette expression fournit le moyen d'établir les équations d'une surface I satisfaisant aux conditions posées.

Korteweg (*D.-J.*). — Sur une méthode de solution vicieuse très répandue d'un problème de roulement, sur la théorie de ce mouvement et spécialement sur de petites oscillations autour d'une position d'équilibre (en allemand). (130-155).

En s'occupant de nouveau de la théorie du roulement, à l'occasion de la rédaction d'une critique favorable sur la solution d'un problème de concours de la main de Mme Kerkhoven-Wythoff (*voir* plus loin), l'auteur était bien étonné d'apercevoir que plusieurs mathématiciens renommés appliquent à des questions se rapportant à cette théorie une méthode vicieuse. Plus tard, après avoir consulté la littérature du sujet, il résulta que, déjà en 1892, M. A. Vierkandt a élevé sa voix contre cette méthode. Cependant M. Korteweg y tient à faire connaître ici les *causes* de l'erreur, d'autant plus qu'elle s'est glissée dans le livre excellent de M. Appell, paru en 1896 (*voir* plus loin).

L'auteur s'occupe successivement des points suivants : 1° Propriété particulière du mouvement de roulement; 2° Méthode exacte de solution; 3° Méthode inexacte dans la forme que lui donne M. Appell; 4° Les vraies causes de l'erreur; 5° La solution exacte du problème du mouvement de roulement d'un corps pesant de révolution sur un plan horizontal; 6° Sur de petites oscillations de roulement autour d'une position d'équilibre.

Wythoff (*W.-A.*). — La classification des hyperquadriques de l'espace à n dimensions (en anglais). (162-191).

L'auteur s'occupe de l'espace courbe du second ordre à $n-1$ dimensions représenté par $\Sigma\Sigma a_{pq} x_p x_q = 0$ entre les $n-1$ coordonnées homogenes x, l'espace linéaire à l'infini à $n-1$ dimensions correspondant à l'équation $\Sigma\rho_p x_p = 0$. Après avoir défini le centre ou le lieu des centres, il base sa classification sur les trois distinctions suivantes :

1° Le centre est déterminé ou indéterminé; dans le dernier cas où il y a un lieu de centres il faut chercher le nombre des dimensions de ce lieu.

2° Le centre (ou le lieu des centres) se trouve à distance finie ou infinie.

3° Le centre (ou le lieu des centres) fait ou ne fait pas partie de l'espace courbe lui-même.

Le travail se termine par des tables faisant connaître tous les cas particuliers qui se présentent pour $n = 3$ et $n = 4$.

Neuberg (*J.*). — Barycentre podaire et barycentre symétrique (en français). (192-203).

Le centre K de la série $\Sigma\lambda_i(x\cos\alpha_i + y\sin\alpha_i - p_i)^2 = u$ de coniques est le centre de gravité des points d'intersection $D_{r,s}$ des couples de droites D_r, D_s des droites $D_i \equiv x\cos\alpha_i + y\sin\alpha_i - p_i = 0$ pour les masses $\lambda_r\lambda_s\sin^2(D_rD_s)$. Ce point K coïncide avec son barycentre podaire par rapport aux droites D_i et aux masses λ_i. Un point quelconque M et son barycentre podaire M′ se correspondent en deux figures affines ayant K pour point double. Un point quelconque M et son barycentre symétrique M″ par rapport aux droites D_i et aux masses λ_i se correspondent en deux figures inversement semblables dont le centre K et les axes KX, KY de la série de coniques sont les éléments doubles. Formules relatives aux correspondances (M, M′) et (M, M″). Application à la Géométrie du triangle.

Korteweg (*D.-J.*). — Note sur le mouvement de roulement d'un corps pesant de révolution sur le plan horizontal (en français). (204).

L'auteur constate que l'erreur indiquée dans son Mémoire précédent a été reconnue indépendamment par M. Appell lui-même.

Kerkhoven-Wythoff (Mme *A.-G.*). — Sur un cas de petites oscillations d'un système autour d'une position d'équilibre (en anglais). (205-225).

Solution couronnée du problème de concours suivant proposé par la Société mathématique d'Amsterdam en 1898 (n° 6) :

« Une demi-sphère homogène pesante repose par sa surface sphérique sur un plan horizontal parfaitement impoli. Une seconde demi-sphère homogène pesante repose de la même manière sur la face plane horizontale parfaitement impolie de la première, le point de contact se trouvant dans le centre du cercle

situé dans ce plan. On demande à étudier les petites oscillations de ce système après une perturbation légère de l'équilibre. »

L'auteur résout d'abord le problème proposé; ensuite elle s'occupe de plusieurs extensions à un nombre quelconque de demi-sphères, à des segments de sphères, à des demi-ellipsoïdes de révolution.

Van der Harst (A.-D.). — Formules pour la courbure d'un système de courbes planes en coordonnées curvilignes. Extension des résultats obtenus à l'espace (en allemand). (226-242).

En considérant une courbe donnée comme faisant partie d'un système simplement infini de courbes, ce qui permet de faire figurer *deux* coordonnées comme des variables indépendantes, l'auteur obtient, pour les quantités en rapport avec la courbure, des formules plus symétriques. Application aux coniques et aux épicycloïdes. Considérations analogues dans l'espace.

Kapteyn (W.). — Sur la transformation d'une intégrale définie (en français). (243-244).

Démonstration de l'identité des expressions

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n-1}\varphi \cos\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1-\mu^2\sin^2\varphi}}, \quad \frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n-1)} \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi \, d\varphi}{1-\mu^2\sin^2\varphi},$$

pour $\mu^2 < 1$, à l'aide de la théorie des fonctions hypergéométriques.

Kapteyn (W.). — Sur la différentiation sous le signe d'intégration (en français). (245-247).

Formules s'appliquant aux cas où les dérivées de l'intégrale sont parfaitement déterminées, quoique la fonction sous le signe d'intégration soit infinie aux limites.

Bouwman (W.). — Sur le lieu des points de contact de faisceaux de rayons et de courbes (en allemand). (258-268).

L'auteur considère d'abord le lieu Γ_A d'ordre $2n-1$ du point de contact des tangentes menées aux courbes d'ordre n d'un faisceau B^n donné par un point quelconque A du plan de ces courbes. En discutant les tangentes de Γ_A qui passent par A, il trouve que les tangentes d'inflexion de B^n enveloppent une courbe de la classe $3n(n-2)$. Ensuite il s'occupe du faisceau de courbes Γ_A correspondant aux points A d'une droite donnée, ce qui ramène au nombre $3(n-1)^2$ des points doubles de B^n. Enfin il étudie le réseau N des courbes Γ_A correspondant au système des points A du plan entier, avec ses courbes de Hesse, de Steiner, de Cayley et sa courbe pseudo-steinérienne (lieu des points A correspondant à des courbes Γ_A à nœud).

Dans une seconde partie l'auteur s'occupe du système de courbes Γ_A déterminé par un seul point fixe A et les courbes d'ordre n d'un réseau donné, son lieu de points doubles, etc.

Tous les résultats obtenus d'abord par la Géométrie sont démontrés ensuite par l'Analyse.

Tesch (*J.-W.*). — Sur la question 1044 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (en français). (269-277).

Tentative pour mener un peu plus loin la solution du problème :

« On mène par les sommets A, B, C d'un triangle ABC les transversales AD, BE, CF, où D, E, F sont les points d'intersection avec BC, CA, AB, et qui se coupent en P. Déterminer le point P, tel qu'on ait PD = PE = PF ».

Van Aller (*C.*). — La réduction d'une conique sur les axes, l'équation de cette courbe en coordonnées obliques étant donnée (en hollandais). (278-283).

Ordinairement on déduit deux équations quadratiques dont l'une fait connaître les directions et l'autre les grandeurs des axes, sans indiquer comment les deux directions et les deux grandeurs se correspondent l'une à l'autre. Pour éviter cet inconvénient, l'auteur développe une méthode basée sur la transformation des coordonnées.

Kluyver (*J.-C.*). — Généralisation d'une formule connue (en allemand). (284-291).

La formule très simple

$$\sum_{1}^{\infty} m^{a} e^{-my} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{y^{\alpha+1}} + \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k y^k}{k!} \zeta(-k-\alpha)$$

fait voir comment la fonction

$$\Phi(y;\alpha) = \sum_{0}^{\infty} m^{a} e^{-my},$$

définie d'abord pour la moitié droite du plan seulement, peut s'étendre dans le domaine $y=0$ au delà de la limitation de cette moitié, si α représente un nombre entier et positif. Comme cette fonction $\varphi(y;\alpha)$ conserve sa signification dans la moitié droite du plan, si α est un nombre entier quelconque positif ou négatif, la question se pose si dans ce cas plus général un développement analogue dans une circonférence autour du point $y=0$ soit encore permis. Ici l'auteur démontre d'abord que la réponse à cette question doit être affirmative; ensuite il étudie les points singuliers $y = \pm 2k\pi i$, pour en déduire enfin des formules récurrentes menant à l'évalution de $\zeta(2m+1)$.

Vaes (*F.-J.*). — Représentation d'une surface à n dimensions à l'aide d'un espace à $n-1$ dimensions (en hollandais). (292-297).

L'auteur représente les points à coordonnées positives situés sur les espaces

tridimensionaux linéaire ou quadratique

$$px + qy + rz + su = c, \qquad \text{ou} \qquad p^2x^2 + q^2y^2 + r^2z^2 + s^2u^2 = c^2$$

par les points situés à l'intérieur du tétraèdre ou de l'octant positif de l'ellipsoïde limités par les trois plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et le plan ou l'ellipsoïde

$$px + qy + rz = c \qquad \text{ou} \qquad p^2x^2 + q^2y^2 + r^2z^2 = c^2.$$

Notion de la densité de la représentation, etc.

Zeeman Gz (P.). — Propriétés de quelques congruences de rayons (en hollandais). (298-317).

L'auteur s'imagine deux systèmes de trajectoires orthogonales $v = c_1$, $u = c_2$ sur une surface donnée par les trois équations

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v), \qquad z = \varphi_3(u, v);$$

puis par chaque point M de cette surface il mène une droite d faisant respectivement avec les tangentes aux courbes $v = c_1$, $u = c_2$ qui y passent et avec la normale de la surface en ce point des angles donnés α, β, γ. Ainsi il obtient une congruence, la congruence (α, β, γ) des droites d. Cette congruence forme le sujet de la présente étude. Recherche des conditions sous lesquelles la congruence (α, β, γ) est la congruence des normales d'une série de surfaces parallèles. Suppositions particulières par rapport aux courbes $u = c_2$, $v = c_1$. Les quatre points remarquables de chaque rayon et quelques théorèmes qui s'y rapportent.

Zeeman Gz (P.). — La polaire réciproque d'une cubique gauche (en hollandais). (318-324).

La polaire réciproque d'une cubique gauche par rapport à une quadrique est encore une cubique gauche. Ici l'auteur considère le cas particulier où la quadrique polarisante est une sphère. Si le centre de la sphère se trouve sur la cubique gauche donnée, la polaire réciproque est une parabole gauche; cette parabole est une courbe orthogonale, si le centre de la sphère coïncide avec un des deux points d'où la cubique gauche donnée se projette par un cône équilatère, etc.

Mannoury (G.). — Notions analogues à celles de *positif* et *négatif* (en allemand). (325-338).

L'auteur fait connaître toute une série de couples d'opérations contenant comme premier couple l'addition et la soustraction, comme second couple la multiplication et la division, dont chaque couple se déduit exactement de la même manière du couple précédant. Introduction. L'hypermultiplication ou l'addition du troisième ordre. Extension algébrique des notions *positif* et *négatif*. Extension de la notion *complexe réel*. Extension arithmétique des

notions *positif* et *négatif*. L'addition d'ordre n. Le rapport entre les additions des ordres n et $n+1$. Tableau sommaire.

Schoute (*P.-H.*). — Abraham Nikolaas Godefroy, 1822-1899 (en hollandais). (353-358).

Esquisse biographique avec portrait.

ARCHIVES DU MUSÉE TEYLER, 2ᵉ série, in-8°. Haarlem, héritiers Loosjes (¹).

Tome IV; 1896.

Janssen van Raay (*W.-H.-L.*). — Sur les quantités imaginaires en Algèbre. (54-118).

Le but que se propose l'auteur, c'est de soumettre à un court examen les diverses méthodes d'interprétation des solutions imaginaires de problèmes posés, suivies jusqu'à présent, et de remplir autant que possible les lacunes qui y sont restées. D'après lui, c'est dans le « Mémoire sur les quantités imaginaires » de Buée (*Phil. Transactions*, 1806) qu'on trouve en germe les interprétations les plus logiques concernant la signification des diverses grandeurs imaginaires.

De Vries (*J.*). — Involutions harmoniques dans le plan et sur la sphère. (119-140).

Dans le plan, les couples de points admettant le même milieu forment une involution concentrique; à l'aide d'une inversion dans le plan, cette involution concentrique se transforme en une involution harmonique à deux points doubles A_1, A_2 dont les couples (B_1, B_2) forment avec A_1, A_2 des quadruples harmoniques (quadrilatères inscrits harmoniques). Le sextuple métaharmonique consistant en trois couples de points, deux quelconques desquels forment un quadruple harmonique; involution de quadruples de points qui s'y rapporte. L'involution isodynamique des sommets des triangles équilatéraux à centre commun et sa transformée par inversion. Extension de ces notions et de plusieurs autres qui s'en déduisent à la sphère à l'aide d'une inversion dans l'espace.

Tome V; 1898.

Cardinaal (*J.*). — Sur quelques cas de cônes circonscrits à une quadrique. (45-98).

1. Étant donnés une quadrique Q^2 et un plan α, l'auteur détermine d'abord

---

(¹) Depuis 1896 ce Recueil contient aussi des Mémoires mathématiques.

le lieu géométrique des sommets des cônes circonscrits sous la condition que leurs intersections avec le plan α sont tangentes à une droite ou à une conique données. Coniques bitangentes, osculatrices, surosculatrices. Parabole. 2. Lieu géométrique des sommets quand la conique d'intersection avec α doit rencontrer une droite donnée de ce plan en un couple de points appartenant à une involution donnée. Hyperbole équilatère et cercle. 3. Problèmes qui résultent de la combinaison des conditions données.

De Vries (*J.*). — Recherches sur les coordonnées multipolaires. (99-157).

Coordonnées bipolaires et biangulaires. Relation vérifiée par deux courbes orthogonales. Trois rayons vecteurs p, q, r issus de pôles collinéaires. Cercles. Ellipses et hyperboles. Transformation involutive $pq = r'^2$, $p'q' = r^2$. Cassiniennes. Équations quadripolaires et quadrangulaires de faisceaux cassiniens orthogonaux. Cartésiennes; faisceaux orthogonaux; confocales. Limaçons de Pascal. Les quatre foyers des cassiniennes à deux branches. Coordonnées tripolaires issues des sommets d'un triangle. Introduction d'un quatrième rayon vecteur. Cercles et droites remarquables du triangle. Cycliques.

Schoute (*P.-H.*). — Quelques figures à $n+2$ inversions dans l'espace à n dimensions. Première partie. (159-205, 2 pl.).

L'auteur réunit sous un même point de vue, et par les méthodes de la Géométrie synthétique, les propriétés connues des cubiques circulaires, des quartiques bicirculaires et des cycliques gauches, en y ajoutant des amplifications. D'abord il considère le faisceau de cubiques circulaires dont les quatre sommets d'un quadrangle orthocentrique, ses trois points diagonaux et les deux points cycliques du plan forment les points de base. Par inversion dans le plan, il en déduit le réseau des quartiques bicirculaires qui sont anallagmatiques par rapport aux quatre inversions dont quatre cercles coorthogonaux sont les lieux des points doubles. Par inversion dans l'espace il transforme le réseau des quartiques bicirculaires en un réseau de cycliques gauches sur une même sphère, anallagmatiques par rapport à quatre inversions dans l'espace. De ces trois systèmes il étudie successivement l'origine, les inversions, les modes de génération, les propriétés focales et les lieux géométriques auxquels ils mènent.

Nieuwenhuyzen Kruseman (*J.*). — La propagation du son d'après la théorie cinétique des fluides élastiques. (207-216).

Schoute (*P.-H.*). — Quelques figures à $n+2$ inversions dans l'espace à n dimensions. Seconde partie. (241-298, 1 pl.).

L'auteur, en continuant l'ordre des idées de la partie précédente, s'occupe ici des cyclides cubiques, des cyclides quartiques et des hypercycliques. Le quintangle orthocentrique, dont les sommets et l'orthocentre d'un tétraèdre isodynamique sont les sommets, forme le point de départ, les cinq sommets et les dix points diagonaux (points d'intersection d'arêtes et faces opposées) étant les points de base réels d'un réseau de surfaces cubiques passant par le cercle commun à toutes les sphères, c'est-à-dire d'un réseau de cyclides cubiques.

Par inversion l'auteur en déduit un système triplement infini de cyclides quartiques, anallagmatiques par rapport aux cinq inversions dont cinq sphères coorthogonales sont les lieux des points doubles. Et par une inversion dont le centre ne se trouve plus dans l'espace tridimensional de ce système linéaire de cyclides quartiques, ce système se transforme en un système linéaire d'hypercycliques, surfaces tordues à deux dimensions de l'ordre quatre, situées sur l'hypersphère à trois dimensions dans laquelle se transforme l'espace tridimensional qui porte la figure originale. Ces trois systèmes sont étudiées ici sous les rapports indiqués : origine, inversions, modes de génération, propriétés focales, lieux géométriques.

Zeeman Gz (*P.*). — Une surface minima algébrique du vingtième ordre. (299-345, 1 pl.).

La surface minima passant par une courbe $f(x_1, y_1) = 0$ du plan XOY et admettant cette courbe comme ligne géodésique, est définie par les formules

$$x = \mathrm{R}(x_1), \qquad y = \mathrm{R}(y_1), \qquad z = \mathrm{R}(is),$$

où R(U) désigne la partie réelle de U, et s l'arc de la courbe. En appliquant ces formules au cas spécial de la cardioïde

$$x_1 = 2a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi, \qquad y_1 = 2a(1 + \cos\varphi)\sin\varphi,$$

l'auteur trouve

$$x = 2a\mathrm{R}(1 + \cos\varphi)\cos\varphi, \qquad y = 2a\mathrm{R}(1 - \cos\varphi)\sin\varphi, \qquad z = 8a\mathrm{R}\left(i\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

ou

$$x = a - a(\rho^2 + 2)\cos 2\alpha - \frac{a}{2}(\rho^4 + 4\rho^2 + 2)\cos 4\alpha,$$

$$y = \quad a(\rho^2 + 2)\sin 2\alpha + \frac{a}{2}(\rho^4 + 4\rho^2 - 2)\sin 4\alpha,$$

$$z = \quad 4a\rho\cos\alpha,$$

où ρ et α représentent des paramètres arbitraires. La surface, lieu de ce point, est du vingtième ordre. Les courbes $\alpha = C$ sont des biquadratiques gauches; les courbes $\rho = C$ en forment les trajectoires orthogonales du huitième ordre. Intersection de la surface avec les plans coordonnés. Construction des courbes $\alpha = C$ et $\rho^2 = C$. Les courbes minima de la surface d'après Lie. Classe et rang de ces courbes du huitième ordre. Intersection de la surface avec le plan de l'infini. Les lignes multiples de la surface. Classe et ordre de la surface. Son équation en coordonnées rectangulaires.

Van Laar (*J.-J.*). — Théorie générale des dissolutions. (1-64).

Dans ce Mémoire l'auteur se propose d'étudier dans toute sa généralité la question des équilibres qui se présentent chez les dissolutions, si l'on admet comme la supposition la plus générale que les molécules des corps en dissolution sont partiellement dissociées en *jones* et que les molécules du dissolvant se sont partiellement associées en molécules simples.

Van Laar (*J.-J.*). — Sur le chauffage d'un cylindre, dont chaque partie subit une élévation de température continuelle par quelque procès intérieur, physique ou chimique (65-83).

La méthode de la solution ressemble en beaucoup de points à celle dont s'est servi Fourier dans le cas du problème de refroidissement, mais elle s'en écarte à beaucoup d'autres égards. Le résultat de l'analyse ne saurait se déduire de la solution du problème de Fourier, la manière de chauffage étant tout à fait différente de la manière de refroidissement.

Janssen van Raay (*W.-H.-L.*). — Le caractère géométrique des fonctions elliptiques sn, cn, dn. (151-162).

Tout comme les fonctions circulaires et hyperboliques les fonctions elliptiques sont liées à une courbe qui en représente géométriquement les propriétés et qui, pour n'avoir joué jusqu'à présent aucun rôle en Mécanique ou en Physique, n'en est pas moins comparable, au point de vue géométrique, au cercle et à l'hyperbole équilatère. De cette remarque l'auteur fait découler une méthode d'exposition assez élémentaire des propriétés fondamentales de ces fonctions; pour y partir de principes aussi simples que possible, il écarte provisoirement les considérations relatives au domaine de l'imaginaire, la seconde période incluse.

Schoute (*P.-H.*). — Quelques figures à $n+2$ inversions dans l'espace à n dimensions. Troisième et dernière partie. (163-236).

En continuant l'ordre d'idées des deux Communications précédentes, cette partie devrait contenir l'étude des hypercyclides cubiques et quartiques de l'espace à quatre dimensions et de l'hypercyclique d'un rang plus élevé de l'espace à cinq dimensions. Cependant l'auteur a préféré développer dès maintenant les extensions générales et renvoyer à des notes les extensions à l'espace à quatre ou à cinq dimensions qui méritent une mention spéciale. Ainsi il traite tout de suite des hypercyclides cubiques et quartiques à $n-1$ dimensions dans l'espace à n dimensions et de l'hypercyclique à $n-1$ dimensions dans l'espace à $n+1$ dimensions. Le $(n+2)$ — angle orthocentrique forme ici le point de départ, etc.

Van Laar (*J.-J.*). — Évaluation de la deuxième correction sur la grandeur b de l'équation de M. Van der Waals. (237-284).

Dans un Mémoire récent [voir *Bulletin*, t. XXIV, IIe Partie (1900), p. 162] M. Van der Waals a indiqué une méthode pour obtenir la valeur de la grandeur β de l'équation

$$RT = \left(p + \frac{a}{V^2}\right)\left\{V - b_\infty\left[1 - \alpha\frac{b_\infty}{V} + \beta\left(\frac{b_\infty}{V}\right)^2 - \gamma\left(\frac{b_\infty}{V}\right)^3 + \ldots\right]\right\},$$

après avoir déduit antérieurement la valeur $\frac{17}{32}$ de α. La méthode employée était celle de Clausius. En supposant une des molécules réduite à son centre,

l'espace disponible pour le mouvement de ce point s'obtient évidemment en doublant le rayon des autres molécules, de manière qu'il faudrait diminuer le volume V de huit fois le volume b de toutes les molécules; seulement, en se fondant sur la théorie du virial M. Van der Waals a montré qu'il faut substituer $4b$ à $8b$ dans cette soustraction.

Toutefois cette valeur de $4b$ n'est qu'une valeur limite, car en réalité il se présente continuellement des approchements de molécules de sorte que les sphères à rayon double (sphères de distance) empiètent les unes sur les autres. En faisant attention à l'action mutuelle de deux molécules, M. Van der Waals évaluait la constante α. Ici, à force d'intégrations assez nombreuses, M. van Laar, en considérant le cas de trois sphères, évalue la constante β.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, Journal des candidats aux Écoles spéciales, à la Licence et à l'Agrégation, dirigé par MM. C.-A. LAISANT et X. ANTOMARI (¹). — 3e série.

Tome XVIII; 1899.

Duport (*H.*). — Démonstration de quelques théorèmes de Cinématique. (5-31).

L'auteur s'est proposé de démontrer les théorèmes suivants :

I. Le mouvement d'une figure plane dans son plan peut être produit par le roulement d'une courbe liée à la figure sur une courbe fixe.

II. Le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe peut être produit par le roulement d'un cône lié au corps sur un cône fixe de même sommet.

III. Le mouvement général d'un corps solide peut être produit en faisant mouvoir une surface réglée liée au corps de façon qu'elle touche constamment une surface réglée fixe le long d'une génératrice.

Candido (*G.*). — Formules pour l'étude d'une figure remarquable. (31-38).

Ces formules expriment les distances des points du plan aux sommets d'un triangle et les distances mutuelles de ces points, connaissant les rapports que déterminent sur les côtés du triangle les droites joignant ces points aux sommets.

Bioche (*C.*). — Sur les quadriques circonscrites à un tétraèdre. (38-42).

L'auteur montre que le tétraèdre formé par quatre points d'une quadrique non développable et le tétraèdre formé par les plans tangents ne sont pas

(¹) Voir *Bulletin*, t. XXIII₂, p. 57 et 255.

toujours homologiques, mais que sur une quadrique donnée, non développable, on peut toujours trouver des systèmes de quatre points présentant cette particularité.

Staeckel (*P.*) (traduction *L. Laugel*). — Sur quelques propriétés arithmétiques des fonctions analytiques. (53-64).

L'auteur établit l'existence de fonctions transcendantes de la variable complexe x qui, pour toutes les valeurs rationnelles (et aussi pour toutes les valeurs algébriques) de leur argument, prennent elles-mêmes des valeurs toutes rationnelles.

Pleskot (*A.*). — Nouveau procédé pour résoudre les équations du troisième degré. (65-66).

L'équation du troisième degré étant

$$x^3 + px + q = 0,$$

on forme une équation ayant pour racines λ fois les racines de la proposée.

Fontené (*G.*). — Sur des polyèdres mobiles comparables aux polygones de Poncelet. (67-74).

Énoncé et démonstration des conditions que doivent remplir deux quadriques données admettant des tétraèdres (ou d'autres polyèdres particuliers) inscrits et circonscrits.

Vaes (*F.-J.*). — Solution graphique de n équations linéaires avec n variables. (74-79).

Vacquant (*A.*). — Agrégation des sciences mathématiques. Concours de 1898. Solution de la question de Mathématiques élémentaires. (79-86). Solution de la question d'Analyse. (134-141).

Ripert (*L.*). — Sur l'homographie et la dualité appliquées aux propriétés métriques du plan. (101-121).

Distance anharmonique de deux points. — Angle anharmonique de deux droites. — Distance anharmonique d'un point à une droite. — Angle anharmonique d'une droite et d'un point. — Division anharmonique des segments et des angles. — Conjuguées et conjuguées anharmoniques. — Éléments anharmoniques des angles et des segments. — Bissectrices et bissecteurs anharmoniques. — Note sur la division anharmonique des angles et des segments.

Böklen (*O.*). — Sur les normales de l'ellipsoïde. (121-125).

Mariantoni et *Palatini*. — Sur le problème de la polysection de l'angle. (126-131).

Propriétés des courbes sectrices par lesquelles on peut obtenir la solution de ce problème.

Piccioli (*H.*). — Un théorème de Géométrie à n dimensions. (132-133).

Les courbes à courbures constantes de l'espace à nombre impair de dimensions ont pour développantes celles des courbes hypersphériques à courbures constantes, bases des cylindres qui les contiennent.

Tarry (*G.*). — Les lignes arithmétiques. (149-155).

Tarry (*G.*). — Curiosité mathématique. (156).

Godefroy. — Démonstration nouvelle de la règle de convergence de Gauss. (157-160).

Lecornu (*L.*). — Sur le mouvement d'un point sollicité par une force centrale constante. (161-169).

La trajectoire, assez semblable à l'herpolhodie, se compose d'une suite d'arcs identiques sans inflexion, allant alternativement toucher deux circonférences concentriques.

Candido (*A.*). — Sur un théorème connu. (170-173).

Par le sommet A d'un triangle ABC on mène les perpendiculaires aux côtés AB, AC, qui coupent en D et en E le cercle circonscrit au triangle. Démontrer que le quadrilatère ADBE (ou ADCE) est équivalent au triangle ABC.

Tikhomandritzky. — Sur le second théorème de la moyenne. (173-175).

Bricard (*R.*). — Deuxième concours des *Nouvelles Annales* pour 1898. (197-217).

Mémoire ayant obtenu le prix. Propriétés de la tétraédroïde, transformée homographique générale de la surface de l'onde.

Nobile (*V.*). — Note de Géométrie cinématique. (218-234).

Exposé de quelques propriétés du mouvement d'un solide de révolution fixé par un point de son axe et assujetti à s'appuyer sur une droite fixe.

Laurent (*H.*). — Sur les nombres premiers. (234-241).

Démonstration d'une propriété nouvelle des nombres premiers, qui ne semble pas découler du théorème de Wilson.

Deuxième concours des *Nouvelles Annales* pour 1899. (245-247.).

Propriétés d'un certain réseau de cercles.

Caspary (*F.*). — Applications des méthodes de Grassmann; vecteurs dans le plan; définitions, propriétés. (248-273).

Continuation de l'étude commencée dans le volume de 1898 (p. 389).

Genese. — Sur quelques intégrales. (273-274).

Indication d'un moyen de parvenir à intégrer les expressions $\int \frac{x^2}{u^2}\,dx = \frac{v}{u}$, $\int \frac{x^2\,dx}{v^2} = -\frac{u}{v}$, ..., considérées dans le *Cours d'Analyse* de M. Hermite, et où l'on a posé $u = x\sin x + \cos x$, $v = \sin x - x\cos x$.

Stuyvaert. — Point remarquable dans le plan d'une cubique. (275-285).

Il s'agit du point dont la conique polaire est un cercle.

Il peut même arriver qu'il en existe une infinité.

Lorsque la cubique se réduit aux trois côtés d'un triangle ABC, il existe un seul point, le point de Lemoine, dont la conique polaire est un cercle; celui-ci est circonscrit au triangle ABC.

Duporcq (*E.*). — Agrégation des sciences mathématiques. Concours de 1898. Solution de la question de Mathématiques spéciales. (285-291).

Lacour (*E.*). — Sur l'équation d'Euler $\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{\psi(x_1)}}$. (293-300).

Pleskot (*A.*). — Limites des racines d'une équation n'ayant que des racines réelles. (301-305).

Ripert (*L.*). — Sur l'homographie et la dualité appliquées aux propriétés métriques de l'espace. (306-329).

Géométrie autour du point. — Dièdre anharmonique de deux plans. — Angle anharmonique de deux droites. — Produits et sommes anharmoniques. — Géométrie de l'espace. — Définitions et applications. — Systèmes de coordonnées. — Foyers dans les coniques. — Foyers dans les quadriques.

Concours général de 1899. (330).

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1899. (331-332).
(Pour la solution, *voir* p. 421-435, article de M. Philbert du Plessis.)

Concours d'admission à l'École normale supérieure en 1899. (332-334).

Autonne (L.). — Sur le rapport anharmonique. (341-346).

Le rapport anharmonique K de quatre quantités $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ est susceptible de six valeurs $K_j (j = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$, en général différentes, toutes fonctions d'une quelconque d'entre elles. On trouvera dans Clebsch (*Leçons sur la Géométrie,* traduction A. Benoît, t. I, p. 49 et suivantes) une discussion des relations qui existent entre les K_j. L'auteur se propose de reprendre la question en insistant sur les liens qui unissent la théorie à celle des groupes de substitutions entre quatre lettres.

Combebiac. — Notions élémentaires sur les groupes de transformations. (347-370).

Transformations. — Séries de transformations. Paramètres essentiels. — Groupes de transformations. — Sous-groupes. — Famille de variétés. — Transitivité. Invariants. — Primitivité. Covariants. — Invariants et covariants simultanés. — Isomorphisme. — Similitude. — Groupes paramétraux. — Groupes de structure donnée. — Groupe adjoint. Transformations distinguées. — Types de sous-groupes.

Böklen (O.). — Note sur une surface étudiée par Painvin. (370-372).

Il s'agit de la surface étudiée pour la première fois dans les *Nouvelles Annales,* par Painvin (1864, p. 481) et qui représente le lieu des foyers des sections centrales d'une quadrique.

Longchamps (G. de). — Les courbes-images et les courbes symétriques. (373-378).

Soient A un point fixe d'une courbe C, M un point mobile sur C; BMB′ la normale, $MB = MB' = n$, n ayant une relation déterminée avec l'arc $AM = \sigma$. Le lieu de B, B′ est une courbe C′ ou C″ que M. Petrovitch a proposé d'appeler l'*image* de C. Les deux courbes C′, C″ sont dites *courbes symétriques* relativement à C.

Le présent article a pour objet la détermination des tangentes à ces courbes.

Agrégation des Sciences mathématiques. — Concours de 1899. (378-381).

École centrale des Arts et Manufactures. — Concours de 1899. (Première session (381-383).

Zahradnik (C.). — Contribution à la théorie des cubiques cuspidales. (389-407).

Droites satellites. — Correspondance homographique entre les droites satel-

lites P et R_1 par rapport à la cubique C^3. — Droites satellites normales. — Correspondances homographiques successives. — Résultats obtenus à l'aide des coordonnées trilinéaires.

Fontené (*G.*). — Sur les angles résultants. (407-419). Note du Rédacteur (419-420).

Extension, à l'espace, du théorème de Bellavitis sur le quadrangle plan.

Fontené (*G.*) et *Bricard* (*R.*). — Sur les systèmes de trois relations doublement quadratiques entre trois variables. (437-454).

Le principal objet de ce Mémoire est la recherche des conditions dans lesquelles trois relations doublement quadratiques entre trois variables

$$F_1(y, z) = 0, \qquad F_2(z, x) = 0, \qquad F_3(x, y) = 0$$

admettent une infinité de solutions.

Piccioli (*H.*). — Une question de Géométrie différentielle. (454-459).

Démonstration de cette propriété de la surface minima de M. Enneper d'avoir pour asymptotiques des hélices cylindriques.

Fontené (*G.*). — Sur le hessien d'une forme cubique binaire. (459-461).

Formation simple du hessien basée sur l'identité de la hessienne et de la steinérienne pour les courbes et les surfaces du troisième ordre.

Premier concours des *Nouvelles Annales* pour 1900. (485-487).

Système de droites tangentes à une quadrique.

Collignon (*E.*). — Problèmes divers sur la méthode inverse des tangentes. (488-508).

Le problème de M. de Beaune.

Remarques sur les courbes représentées par l'équation

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y - f(x)}{a}.$$

Problèmes connexes.

Piccioli (*H.*). — Sur quelques questions de la théorie des courbes à double courbure. (508-511).

L'auteur se propose de montrer qu'il n'est pas exact, en général, que la courbe gauche nommée *hélice cylindro-conique* soit placée sur un cône de révolution.

Voir sa Note de 1898 sur les géodésiques du cône.

Lefebvre. — Étude d'un système de deux miroirs sphériques. (512-529).

Réflexion par un miroir sphérique. — Réflexion par deux miroirs. — Pôles et circonférences polaires. — Classification des systèmes de deux miroirs. — Systèmes périodiques. — Systèmes apériodiques. — Systèmes intermédiaires. — Systèmes homofocaux et singuliers. — Nombre des images. — Effet de n réflexions. — Conclusions. — Note.

École centrale des Arts et Manufactures. — Concours de 1899 (Deuxième session).

Saltykow (N.). — Sur la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction. (533-543).

Contribution à l'exposé des méthodes de Lagrange et de Jacobi.

Lacour (E.). — Sur le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe (application des fonctions elliptiques). (543-553).

Définition des paramètres α, β, γ, δ. — Mise en équation du problème de Mécanique. — Inversion. — Calcul des constantes elliptiques. — Remarque.

Jamet (V.). — Sur le problème d'Analyse donné à l'Agrégation en 1899. (553-573).

Étude des intégrales communes aux deux équations

$$(p - x)(z - c) - (x - a)(px + qy - 2z) = 0,$$
$$(q - y)(z - c) - (y - b)(px + qy - 2z) = 0.$$

Licence ès Sciences mathématiques.

Le Journal a continué l'insertion des sujets de composition d'Analyse, de Mécanique et d'Astronomie proposés aux examens de Licence ès Sciences mathématiques à Paris et dans la plupart des Universités françaises. *Voir* p. 42-48, 86-92, 141-145, 175-191, 461-469, 574-579. Plusieurs énoncés ont été accompagnés de brèves indications pour leur solution.

Note. — Plus exactement, la licence ès sciences est remplacée par des certificats d'études supérieures des Facultés des Sciences.

SOLUTIONS DE QUESTIONS.

Abonné. — Rectification à une propriété de la podaire de la cycloïde.

Audibert. — Propriétés des lunules d'Hippocrate. — Polynome algébrique. — Propriétés des coniques.

Barisien (*E.-N.*). — Triangles équilatéraux et hypocycloïde triangulaire.

Boulanger (*A.*). — Quadriques orthogonales. — Surfaces moulures.

Dulimbert. — Divisibilité de certains nombres. — Propriétés d'un cylindre et d'un cône. — Déterminant de quantités imaginaires.

Duporcq (*E.*). — Propriété de l'ellipse.

Genty (*E.*). — Propriété de l'hyperboloïde équilatère.

Gilbert (*R.*). — Construction d'une conique.

Hilaire. — Au sujet de la question 549 proposée en 1860 par M. Faure.

Issaly. — Au sujet de la solution de la question 1727 par M. Tzitzéica.

Leinekugel (*G.*). — Propriété des coniques.

Malo (*E.*). — Propriété des coniques.

Mannheim (*A.*). — Propriétés des coniques.

Ocagne (*M. d'*). — Généralisation d'une propriété du paraboloïde hyperbolique.

Retali (*V.*). — Au sujet d'une courbe rencontrée par M. Servais.

Saint-Germain (*A. de*). — Au sujet de la solution de la question 1727 par M. Tzitzéica. — Au sujet de la question 1740 par M. Boulanger.

Tzitzéica (*G.*). — Propriété d'une surface à indicatrice elliptique. — Propriété d'un système de cubiques.

Vingt-deux questions résolues, quatorze anciens énoncés réimprimés, vingt et une questions nouvelles, enfin les sujets proposés dans de nombreux concours universitaires attestent suffisamment l'importance que MM. les Rédacteurs du journal entendent maintenir avec raison à cet élément d'activité des études mathématiques dans les grands foyers de l'enseignement français. Le

choix, la variété et la difficulté des questions proposées justifient l'émulation dont collaborateurs et candidats font preuve dans l'élégance et l'ingéniosité de leurs solutions.

L'expérience faite ici comme dans d'autres recueils mathématiques a montré l'utilité de la réimpression de questions anciennes demeurées non résolues. Plusieurs d'entre elles ont enfin réussi à trouver leur solutionniste.

H. B.

REVUE D'ARTILLERIE (¹).

Tome XLVI: avril-septembre 1895.

Laurent (*P.*). — De l'influence de l'inclinaison des filets de la vis de culasse sur la résistance de l'écrou. (69-101, 9 fig.).

Suite et fin du Travail inséré aux Tomes XLIV et XLV.

Troisième Partie. — I. Valeurs des forces élastiques. — II. Applications. — III. Résistance à la force élastique principale X_3. — IV. Problème I. — V. Problème II. — VI. Conclusions.

Les exemples donnés et les théories exposées dans ce Mémoire montrent quelle est l'influence considérable de l'inclinaison du filet sur la résistance de l'écrou de culasse, et l'avantage qui résulte de l'emploi d'un filet à forte inclinaison. Les exemples pris ici n'ont pas été choisis au hasard; ils sont très voisins comme données numériques de canons existants, et ils font voir que pour ne pas dépasser un module de 30^{kg}, il faut se tenir pour l'inclinaison dans les environs de $50°$, lorsqu'on veut ne pas avoir une vis trop longue.

Hartmann (*L.*). — Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts. (166-188, 31 fig.).

Continuation du § III du Mémoire commencé au Tome XLVI (voir *Bulletin*, 2ᵉ Partie, p. 46; 1896).

Hartmann (*L.*). — Unification des mesures industrielles. (337-364, 479-515, 603-622, 27 fig., 1 pl.).

Exposé des procédés théoriques et description des instruments nécessaires à la comparaison des longueurs métriques des règles destinées à l'étalonnage des mesures des longueurs à bouts et à divisions.

Lardillon. — Étude théorique des effets du tir fusant. (365-390, 2 fig., 1 pl., 14 tabl.).

Cette Note a pour objet de déterminer le nombre moyen par coup des

(¹) Voir *Bulletin*, 1896, XX_2, 38.

atteintes produites par une salve fusante sur un rang de panneaux de front indéfini, disposés normalement à la trajectoire moyenne, ainsi que la valeur moyenne des fronts battus par les différents coups de la salve.

Tome XLVII: octobre 1895-mars 1896.

Daubresse (*A.*). — Étude théorique sur les jumelles. (5-35, 17 fig.).

L'auteur s'est proposé de donner, de la lunette de Galilée, une théorie destinée à faire ressortir les effets que produisent les aberrations dans cet instrument, sans d'ailleurs en calculer la valeur; d'indiquer la façon dont on peut compenser les unes par les autres les aberrations dues aux divers éléments du système, de manière que l'image résultante, celle que l'œil perçoit, offre une netteté convenable; enfin, d'énumérer les conditions pratiques auxquelles doit satisfaire un bon instrument.

L'étude se termine par un court exposé de la combinaison nouvelle qui a permis de réaliser récemment, sous le nom de *jumelles hyperdioptriques*, des jumelles douées d'une plus grande puissance et d'un champ plus étendu que les instruments basés sur la combinaison ordinaire de Galilée.

Lafay (*A.*). — Abaques relatifs au tir de siège. (65-79, 4 fig., 1 pl.).

Application de la théorie générale des abaques, ou de la Nomographie, publiée en 1891 par M. d'Ocagne, à la construction d'abaques destinés à la résolution des problèmes relatifs au tir de siège.

Hartmann (*L.*). — Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts. (278-311, 366-402, 65 fig., 3 pl.).

Suite et fin du Mémoire, purement descriptif, mais rempli d'intéressants résultats d'expériences.

III. Déformations produites par la flexion des métaux (*suite*). Flexion symétrique (*suite*). Flexion dissymétrique. Flexion des poutres encastrées. Flexion par compression. Flexion par traction. Flexion des poutres courbes. Pliage, cintrage et courbage des tôles minces. Compression des solides évidés. Pièces encastrées soumises au cisaillement. Flexion par choc. — IV. Déformations produites par l'emboutissage des métaux. — V. Déformations des solides creux soumis à des efforts intérieurs ou extérieurs. — VI. Déformations produites par la torsion des métaux. — VII. Distribution des forces élastiques dans l'acier trempé.

Déformations élastiques des corps solides.

Résumé et conclusions.

Hartmann (*L.*). — Unification des mesures industrielles. (80-108, 1 fig.).

Fin de l'étude commencée au précédent volume.

Projet d'organisation d'un service national des mesures industrielles.

Paloque (*J.*). — Étude sur la bicyclette (403-433, 499-519, 624-648, 33 fig., 2 pl.).

Après avoir exposé un très intéressant historique de la vélocipédie et des résultats surprenants qu'elle a obtenus chez certains professionnels, l'auteur fait connaître les principales données de la théorie mathématique de la bicyclette usuelle.

Tome XLVIII ; avril-septembre 1896.

Bochet (*A.*). — Emploi des projecteurs électriques à la guerre. (126-148, 5 fig., 2 pl.).

Simple résumé donnant seulement le canevas et les conclusions d'une étude qui a fait l'objet d'une communication plus développée.

Chapel (*F.*). — Sur une nouvelle étude de balistique extérieure de M. Siacci. (165-172, 302).

Depuis longtemps on a été frappé de ce fait qu'à partir de 400^{m} et même de 300^{m} jusqu'aux plus hautes vitesses mesurées (environ 1000^{m} actuellement) la courbe expérimentale se confond presque rigoureusement avec une ligne droite. En conformité de ce résultat, M. Siacci s'est proposé de rechercher si la fonction de résistance ne pourrait être représentée dans toute son étendue par une courbe dont la droite ci-dessus serait en quelque sorte l'asymptote et il s'est adressé à la plus simple de toutes les courbes asymptotiques, l'hyperbole; non l'hyperbole tangente à l'origine à l'axe des vitesses, ainsi qu'on l'avait essayé déjà, mais légèrement inclinée sur cet axe, ce qui l'a conduit à l'équation

$$R = \frac{\delta i}{C}\left[0,1925v - 48,11 + \sqrt{(0,1725v - 47,89)^2 + 21,12}\right];$$

δ est le poids du mètre cube d'air rapporté à celui de l'air normal 1206; i le coefficient de forme ou indice balistique du projectile; C son coefficient balistique : $C = \frac{P}{1000a^2}$, a et P diamètre et poids du projectile en mètres et kilogrammes.

Mis en possession des derniers résultats obtenus à Meppen dans les tirs à grandes vitesses, M. Siacci montre que l'asymptote de son hyperbole, asymptote qui se confond avec la courbe à partir de 300^{m}, représente très exactement les valeurs expérimentales. Cette ligne a pour équation

$$R = 42,47v - 11,170.$$

Toute satisfaisante que soit cette première solution, M. Siacci ne s'en est pas contenté, et, ayant reconnu que, pour les faibles vitesses, l'hyperbole ci-dessus conduit à des résistances un peu supérieures à celles que donnent les formules

usuelles, il propose l'introduction d'un terme correctif qui s'évanouit lorsque la vitesse atteint une certaine valeur; la résistance se trouve alors représentée par une courbe d'ordre supérieur qui, lorsque la vitesse croît, tend à se confondre avec l'hyperbole comme l'hyperbole elle-même tend à se confondre avec la droite pour les vitesses les plus élevées.

Cette courbe a pour équation

$$R = \frac{\delta i}{C}\left[0,2002\,v - 48,05 + \sqrt{(0,1648\,v - 47,95)^2 + 9,6} + \frac{0,0442\,v(v-300)}{371 + \left(\frac{v}{200}\right)^{10}}\right].$$

Cette fonction reproduit les résultats des expériences hollandaises avec un écart quadratique moyen inférieur à celui que donnent les cinq fonctions monomes adoptées par M. Hojel.

La nouvelle expression de M. Siacci est incontestablement la plus parfaite qui ait été proposée jusqu'à ce jour; malheureusement, elle exigera des calculs très laborieux.

L'auteur signale enfin un *desideratum* formulé par M. Siacci, relatif à la nécessité pour les artilleurs de se mettre enfin d'accord sur la définition du coefficient balistique.

Dévé (*C.*). — Vérificateurs du dressage des canons de fusil. (216-241, 11 fig., 1 pl.).

Exposé du principe et de la construction de nouveaux appareils d'optique, vérificateurs de dressage et vérificateur d'ensemble, également confiés à des ouvriers, et permettant aujourd'hui de contrôler avec rapidité et précision le dressage des armes, de pronostiquer leur tir et de déterminer les plus importantes causes d'écarts.

Laurent (*P.*). — Note sur les fonctions secondaires de dérivation. (465-475, 6 tabl.).

Partant d'une formule de la dérivation donnée par le général Mayevski, l'auteur y adapte les notations de Siacci et en détermine ensuite les éléments numériques groupés en tableaux pour les usages de la pratique.

Tsoucalas (*L.*). — Note sur de nouvelles tables pour le calcul de la résistance des canons frettés. (567-584, 2 fig., 8 tabl.).

Transformation proposée pour les formules de la théorie classique du général Virgile afin de rendre possible l'emploi de tables spéciales.

Tome XLIX; octobre 1896-mars 1897.

Journée. — Note sur la résistance de l'air aux petites vitesses. (293-305, 3 fig., 1 tabl., 1 pl.).

Résultats d'expériences faites en 1888 à l'école normale de tir de Châlons. Programme d'autres expériences à faire.

Ce sujet a été peu étudié, et la loi de la résistance reste encore indéterminée.

Tome L; avril-septembre 1897.

Journée. — Contribution à l'étude du recul des armes à feu. (230-249; 3 fig.).

Les vitesses de recul ont été mesurées au vélocimètre et au fusil suspendu

Gages (*L.*). — Les unités électriques. (600-621).

Les unités de la Mécanique.

I. De l'interdépendance des unités. — II. De l'établissement des unités fondamentales. — III. Dimensions des unités dérivées. Passage d'un système absolu à un autre. — IV. Du système absolu CGS (centimètre — gramme masse — seconde).

De la nature des grandeurs électriques primordiales.

Ire Partie. — *Phénomènes électro-statiques.*

I. Notion de la quantité résultant de la loi de Coulomb.

Tome LI; octobre 1897-mars 1898.

Laurent (*P.*). — Table balistique pour la détermination de l'angle de chute. (77-85; 6 tabl.).

La *Revue* a publié en 1893 (voir *Bulletin,* 2e partie, p. 45; 1896) une table balistique de la fonction secondaire des portées. L'objet de la présente note est de donner, pour faire suite à la précédente, une table de la fonction tertiaire des angles de chute.

Gages (*L.*). — Les unités électriques. (62-76, 149-172, 365-380, 11 fig.).

Suite et fin du Mémoire commencé au t. L.

II. Notion du potentiel. — A. Considérations élémentaires conduisant à la notion du potentiel. — B. Étude analytique du potentiel. — III. Notion de la capacité.

IIe Partie. — *Phénomènes électro-dynamiques.*

Notions préliminaires.

I. Loi d'Ohm. — II. Formule de Biot et Savart ou de Laplace. — III. Formule d'Ampère.

Classification générale des divers systèmes d'unités électriques. — Unités pratiques.

I. Relations générales entre les coefficients spécifiques. — II. Classification des systèmes d'unités électriques. — III. Relations entre les unités électromagnétiques et les unités électro-statiques. — IV. Unités électriques pratiques.

Genay (*L.*). — Note sur un appareil télémétrique à petite base pour le tir de côte. (274-283; 10 fig.).

Un fil d'acier vertical O étant au repos (comme le serait un fil à plomb), ce fil représente l'axe de cercles concentriques horizontaux dont les rayons sont les distances au but C (un navire évoluant au large).

Deux observateurs A, M, munis, A, d'une lunette à prisme donnant l'angle droit, M, d'un viseur formé d'une tige suspendue à la Cardan et rendue verticale par un poids, se tiennent, A à 200^{m} du point O, M derrière le fil à plomb, mais se déplaçant dans la direction CO, sur les indications de A, de manière que l'angle CAM soit droit. A ce moment, M lit la distance OM sur le sol, préalablement quadrillé de piquets repérés servant à maintenir des fils de fer posés à fleur du sol et représentant le tracé de l'arc utile des courbes lieux des points M ainsi définis.

Note. — La courbe ici rencontrée a été proposée en 1885 par M. Jérabek, dont elle porte aujourd'hui le nom (voir *Mathesis*, p. 110-116). Elle a été étudiée à diverses reprises par plusieurs géomètres. Il est assez curieux qu'à sa bibliographie déjà étendue vienne s'ajouter une application technique.

Mesnager (*A.*). — Essai sur la théorie de la déformation permanente des solides. (509-545, 17 fig.).

M. le Commandant Hartmann a, dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 5 mars 1894 et dans un Mémoire publié dans la *Revue d'Artillerie* (t. XLV, voir *Bulletin*, 2e partie, 1896, p. 46) exposé les résultats de très intéressantes expériences qu'il a entreprises sur les déformations dans les métaux soumis à des efforts. Ces résultats ont forcé les théoriciens de l'élasticité a introduire de nouvelles hypothèses mettant les formules mieux d'accord avec les faits. L'auteur a résumé sa théorie dans une note présentée à l'Académie des Sciences le 14 février 1898; il a ainsi retrouvé les phénomènes observés par M. Hartmann, notamment dans les prismes tendus.

I. Rappel de quelques notions de Mécanique sur lesquelles est basée la théorie de l'élasticité.

II. Hypothèses sur la constitution de la matière et conséquences. — Les formules de la déformation interne ne sont pas applicables à la surface. — Frottement intérieur.

III. Condition générale de l'équilibre. — Rupture de l'équilibre. — Relation entre la plus grande et la plus petite force principale à l'intérieur du solide au moment du glissement

IV. Étude du solide prismatique mince. — Directions des lignes de glissement à la surface des solides de forme quelconque.

Note. — Au cours de son étude, l'auteur a été amené à considérer les courbes ayant pour équations polaires

$$\rho = a \sin 2\omega, \qquad \rho = \cos\omega\,(a\cos\omega + b\sin\omega).$$

Journée. — Note concernant la résistance de l'air sur le plomb de chasse. (546-550, 1 pl.).

Suite à la note du t. XLIX sur la résistance de l'air aux petites vitesses.

La conclusion d'une série d'expériences faites à ce sujet est que la résistance de l'air sur des grains de plomb à très peu près sphériques est proportionnelle au carré de la vitesse dans les limites de 0 à 180. Pour des vitesses plus fortes, cette loi n'est plus applicable.

Tome LII : avril-septembre 1898.

Pralon (*A.*). — Sur les essais à la traction des cuivres et laitons. (5-25, 144-155, 248-268, 7 fig., 6 graphiques).

Cette étude, expérimentale plutôt que théorique, renferme diverses indications pratiques dont pourra profiter la théorie de l'élasticité.

Gautier (*C.*). — Note sur le calcul des dimensions transversales des bouches à feu en acier. (344-350, 1 fig.).

Indication de nouveaux perfectionnements dont la méthode classique paraît susceptible, grâce aux travaux de Lamé, du général Virgile, de Gadolin et du commandant Henry.

Il serait sans doute très avantageux de construire, au moins pour les petits calibres, les canons par la superposition avec serrage d'un grand nombre de tubes minces emboutis.

Tome LIII : octobre 1898-mars 1899.

Gages (*L.*). — Essai sur la théorie générale des aciers. (23-57, 132-151, 248-262, 441-460 ; 10 fig., 1 graphique).

Mémoire purement descriptif, mais signalé ici à cause de son importance pour les perfectionnements à venir de la théorie et de la mesure de l'élasticité.

Girardville (*P.*). — Étude sur la navigation aérienne. (531-558, 10 fig.).

Les chercheurs qui se sont occupés des questions de navigation aérienne se partagent en deux grandes écoles : les partisans du plus léger que l'air, et ceux du plus lourd que l'air.

La première a fait ses débuts peu après la célèbre découverte de Montgolfier.

La seconde remonte, à travers l'histoire, jusqu'à la légende d'Icare.

La solution du problème du plus léger que l'air a, en réalité, fait de notables progrès. Elle est subordonnée à la création d'un moteur ne pesant pas plus de 20^{kg} par cheval, mais il sera malaisé d'obtenir une vitesse de plus de 12^{m}.

Les théoriciens du plus lourd que l'air, ou les aviateurs, ont échoué à peu

près complètement, au point de faire croire à l'utopie de leurs tentatives. Ce qui maintient la confiance des aviateurs, c'est le fait que les oiseaux volent. Un illustre mathématicien s'est fait en quelque sorte l'interprète des espérances des aviateurs, en insinuant que, si les mathématiques démontraient que les hirondelles ne peuvent pas voler, ce serait bien fâcheux pour les mathématiques.

Cet exposé historique et critique est terminé par une notice sur le vol des oiseaux. L'insuffisance de la théorie des aéroplanes appliquée au vol des oiseaux s'est manifestée par la proportion démesurée qu'elle assignait à l'effort musculaire. L'accord n'a commencé à se rétablir que lorsqu'on a eu la clef du mécanisme du vol particulier des oiseaux de proie, désigné en fauconnerie sous les noms de *passade* et de *ressource*. Grâce à la photographie habilement mise en œuvre, M. Marey a recueilli les éléments d'une étude plus approfondie. On a ainsi reconnu que le vol ramé présente une série de mouvements analogues à la ressource.

Tome LIV; avril-septembre 1899.

Curey (*C.*). — Planchettes de tir de siège. (539-553; 8 fig.).

La mise en place des graduations circulaires sur une planchette exige deux opérations, généralement distinctes :

1° La détermination sur la carte de l'emplacement de la pièce;

2° L'orientation des graduations.

L'auteur indique une solution simple de quelques-uns des problèmes qui se posent sur le terrain et de l'établissement des cartons de correction.

Tome LV; octobre 1899-mars 1900.

Ce volume ne renferme pas de Mémoires sur des applications des Sciences mathématiques.

Tome LVI; avril-septembre 1900.

Il n'y a pas non plus dans ce volume d'application des Sciences mathématiques, mais il convient d'y signaler une monographie extrêmement intéressante, de M. Forestier, inspecteur général des ponts et chaussées, intitulée : *Essai d'une étude paléo-technologique de la roue*. Ce Mémoire est savamment documenté et orné de 161 figures donnant le fac-similé des représentations de la roue, d'après les monuments et ouvrages anciens.

H. B.

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

Tome X; 1896 (¹).

Maillet (E.). — Sur quelques propriétés des groupes de substitutions d'ordre donné (*Suite et fin*). (A. 5-20).

Continuation d'un travail publié par les *Annales*, t. IX, p. D. 1; l'auteur développe quelques applications de théorèmes obtenus dans la première partie.

Signalons, en particulier, les résultats suivants :

Soit p^2 la plus haute puissance du nombre premier p, qui divise l'ordre g d'un groupe G; on a, d'après Sylow,

$$g = p^2\nu(1 + n_1 p + n_2 p^2);$$

Si $n_2 = 0$, G possède un sous-groupe invariant d'ordre p ou p^2; G ne peut être primitif que s'il est linéaire et de degré p^2;

Si $n_1 \neq 0$ et $p > 2$, N étant le degré de G et $N - u_0$ sa classe, on aura, soit $u_0 \geq p$ ou $N \geq p^2$ quand $p - 1 \neq 2\lambda$, soit $u_0 \geq p$ ou $N \geq p^2(p+1)$ quand $p - 1 = 2\lambda$.

Pour un groupe transitif de degré p^3 et de classe $p^3 - u_0 (u_0 < p)$, l'ordre g est donné par

$$g = p^3\nu(1 + n_3 p^3).$$

D'autres théorèmes concernent les groupes primitifs de degré N et de classe $N - u_0$ quand u_0 a une valeur donnée. En voici un exemple : ρ étant donné, un groupe primitif de classe $N - 2$ et de degré $N = \rho p^2$ (p premier) ne peut exister en général que s'il est transitif et si $\rho p^2 = q^m + 1$ (q premier). Les exceptions n'ont lieu que pour des valeurs de p limitées en fonction de ρ.

Duhem (P.). — Sur la propagation des actions électrodynamiques (B. 1-87).

Ce travail fait suite au troisième volume des *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme* et aux divers Mémoires, relatifs à l'Électrodynamique, publiés par l'auteur dans ces *Annales*.

Il a pour but de relier logiquement entre elles les découvertes récentes faites dans le domaine de l'Électrodynamique, en particulier par Maxwell et Helmholtz. Ce sont les idées de ce dernier physicien que suit M. Duhem à l'exclusion des doctrines nouvelles.

L'auteur appelle l'attention sur le problème de la réflexion et de la réfraction d'une onde électromagnétique plane propageant une perturbation transversale, dans la théorie électromagnétique de la lumière. Après avoir montré que les conditions aux limites, adoptées par M. Potier pour traiter ce problème, devaient être modifiées, il arrive avec les conditions nouvelles aux résultats suivants :

Lorsqu'une onde électromagnétique plane, propageant une force électromotrice transversale et perpendiculaire au plan d'incidence, tombe sur la surface

(¹) Voir le *Bulletin*, XXIV_2, p. 32.

plane qui sépare deux diélectriques, il y a une seule onde plane réfléchie et une seule onde plane réfractée; chacune d'elles propage une force électromotrice transversale perpendiculaire au plan d'incidence; les formules qui lient la force réfléchie et la force réfractée à la force incidente sont identiques aux formules qui, selon Fresnel, lient la vibration réfléchie et la vibration réfractée à la vibration incidente, quand la lumière incidente est polarisée dans le plan d'incidence.

Mais, lorsque l'onde incidente propage une force électromotrice transversale située dans le plan d'incidence, il n'est plus possible d'accorder les conditions limites obtenues avec l'existence d'une seule onde réfléchie et d'une seule onde réfractée propageant toutes deux une force électromotrice transversale.

La théorie électromagnétique de la lumière se heurte donc à des contradictions analogues à celles que rencontre la théorie élastique.

Vessiot (*E.*). — Sur la recherche des équations finies d'un groupe continu fini de transformations et sur les équations de Lie. (C. 1-26).

Ce travail est destiné à compléter un Mémoire antérieur, paru au tome VIII des *Annales* et consacré aux *Équations de Lie*. L'auteur s'occupe ici du problème, réservé alors, de la *détermination des équations finies d'un groupe continu fini de transformations dont on connaît les transformations infinitésimales;* il indique pour le résoudre diverses méthodes toutes fondées sur la théorie de l'intégration des systèmes complets exposée par S. Lie au tome XXV des *Mathematische Annalen*, et retrouve ainsi les résultats donnés par Lie sur les groupes transitifs de structure donnée.

Problème : On suppose connues les transformations infinitésimales d'un groupe

$$(1)\qquad X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

et l'on se propose, de trouver sous une forme quelconque, les équations finies de ce groupe.

Les transformations infinitésimales des *groupes paramétriques canoniques* sont connues dès qu'on a les constantes c_{iks} qui définissent la structure du groupe. Par un changement quelconque de variables on a donc deux groupes simplement transitifs réciproques, isomorphes à (1)

$$(2)\qquad A_k(f) = \sum_{h=1}^{r} \alpha_{kh}(a_1 \ldots a_r)\frac{\partial f}{\partial a_h} \qquad (k = 1, \ldots, r),$$

$$(3)\qquad B_k(f) = \sum_{h=1}^{r} \beta_{kh}(a_1 \ldots a_r)\frac{\partial f}{\partial a_h} \qquad (k = 1, \ldots, r),$$

et l'on peut supposer

$$(A_j A_k) = \Sigma c_{jks} A_s, \qquad (B_j B_k) = \Sigma c_{jks} B_s,$$

$$(A_j B_k) = 0.$$

On est donc ramené à intégrer le système complet

$$(4) \qquad X_k(f) = A_k(f) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

connaissant les transformations infinitésimales $B_k f$ qui le laissent invariant, c'est-à-dire à appliquer la théorie de Lie. (Se reporter au travail antérieur de l'auteur (*Annales de la Faculté de Toulouse*, t. VIII).

Si le groupe (1) est simplement transitif ($n = r$) et si le déterminant des ξ_{ki} n'est pas nul, on a le *problème normal* de la théorie de Lie, qui se ramène à l'intégration d'équations linéaires auxiliaires et à des quadratures s'il y a dans (1) des transformations distinguées.

Si le groupe (1) est un groupe transitif quelconque, le système (4) peut prendre la forme

$$(5) \qquad M_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij}(x) A_j(f) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$(6) \qquad \mathcal{A}_h(f) = A_{n+h}(f) + \sum_{j=1}^{n} \nu_{hj}(x) A_j(f) = 0 \qquad \begin{pmatrix} h = 1, \ldots, s \\ r = n + s \end{pmatrix},$$

en résolvant n des équations (4) par rapport aux $\frac{\partial f}{\partial x}$ et portant les expressions obtenues dans les équations qui restent; on aura alors

$$(M_i B_k) = 0, \qquad (\mathcal{A}_h B_k) = 0.$$

$$(7) \qquad (\mathcal{A}_h \mathcal{A}_l) = \sum_{m=1}^{s} \chi_{hlm}(x) \mathcal{A}_m \qquad (h, l = 1, \ldots, s).$$

Des équations (6) on tire les valeurs de s dérivées, $\frac{\partial f}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial a_s}$, et on les porte dans les $B_k(f)$; si l'on écrit pour plus de netteté $b_1, \ldots, b_n$ au lieu de $a_{s+1}, \ldots, a_r$, on aura

$$(8) \qquad \mathfrak{B}_k(f) = B_k(f) + \sum_{h=1}^{s} \theta_{kh}(x|a|b) \mathcal{A}_h(f),$$

avec

$$(\mathfrak{B}_h \mathfrak{B}_k) = \sum_{l=1}^{r} c_{hkl} \mathfrak{B}_l,$$

c'est-à-dire que le groupe (8) est *isomorphe* à (1). [M. Vessiot fait observer qu'il est même *semblable* à (1).]

Parmi les $\mathfrak{B}_h$ on en peut trouver n dont le déterminant ne soit pas nul et l'on a, en supposant que ce sont les n premières

$$(9) \qquad \mathfrak{B}_{n+h} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{hj}(x|a|b) \mathfrak{B}_j$$

où les φ_{hj} sont des intégrales du système (5) (6); il y a donc autant de φ indépendants comme fonctions des x, a, b que comme fonctions des b seuls.

S'il y en a n d'indépendants, le problème est résolu sans intégration; le groupe (1) est *asystatique*.

S'il n'y a que $n-p=q$ fonctions φ_{hi} indépendantes, on les prend comme nouvelles variables $u_1, \ldots, u_q$ à la place de q des b, par exemple $b_{p+1}, \ldots, b_n$; les équations transformées de (5) et (6) ne renferment plus les dérivées $\frac{\partial f}{\partial u_i}$ et les transformations (8) prennent la forme

$$(10) \qquad \mathfrak{B}_k(f) = U_k(f) + \mathfrak{B}'_k(f)$$

où les U ne dépendent que des variables u et définissent un groupe isomorphe à (1). Des n premières transformées (10) nous pouvons déduire p combinaisons de la forme

$$\sum_{\mu=1}^{n} \nu_k(u)\,\mathfrak{B}_k(f)$$

qui ne contiennent aucune des dérivées $\frac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_q}$ et qui ne sont liées par aucune relation linéaire et homogène dont les coefficients soient fonctions des u seuls. Si $C_1(f), \ldots, C_p(f)$ sont ces transformations on aura

$$(11) \qquad (C_i C_h) = \sum_{l=1}^{p} K_{ihl}(u)\,C_l \qquad (i, h = 1, \ldots, p),$$

et l'on est ramené à l'intégration d'un système complet [le transformé du système (5), (6)] connaissant le groupe *simplement transitif* (11) qu'il admet, c'est-à-dire au *problème normal* de la théorie de Lie.

Autre méthode. — On résout les équations (4) par rapport aux $\frac{\partial f}{\partial a_k}$, ce qui est toujours possible sans faire d'hypothèse sur (1); on porte les valeurs ainsi trouvées

$$(12) \qquad P_k(f) = \frac{\partial f}{\partial a_k} + \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a)\,X_j(f) = 0$$

dans les transformations $B_k(f)$, ce qui revient à former les combinaisons

$$(13) \qquad Y_h(f) = B_h(f) - \sum_{k=1}^{r} \beta_{hk}(a)\,P_k(f) = \sum_{j=1}^{r} \rho_{hj}(a_1, \ldots, a_r)\,X_j(f).$$

Le problème est ramené à intégrer le système (12) connaissant les transformations (13) qui le laissent invariant, et qui définissent, quand les a sont constants, le groupe (1).

M. Vessiot fait observer que *si le groupe* (1) *est intransitif, il est nécessaire de déterminer d'abord ses invariants, problème qui équivaut à l'intégration d'un système complet quelconque.*

Troisième méthode. — On cherche les transformations de la forme

$$Y(f) = \sum_{k=1}^{r} \rho_k(t)\,X_k(f)$$

qui laissent invariante l'équation de Lie

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k X_k(f) = 0;$$

la détermination des ρ dépend seulement de la résolution d'une équation algébrique.

On est alors ramené à l'un des problèmes considérés plus haut. Cette méthode s'étend à une équation de Lie *quelconque*,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{r} \theta_k(t) X_k(f) = 0$$

où les fonctions θ sont arbitrairement choisies.

Vessiot (E.). — Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions algébriques. (D. 1-14).

I. *Sur la réduction des singularités d'une courbe algébrique plane.* — L'auteur établit à nouveau le théorème de Nœther : Toute courbe algébrique plane peut être transformée birationnellement en une autre courbe algébrique plane n'admettant pas d'autres points multiples que des points doubles à tangentes distinctes.

La réduction des singularités est obtenue par l'application successive de transformations Θ qui sont le produit d'une transformation projective générale P par la transformation T, définie par les formules

$$\xi = x, \qquad \eta = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y},$$

où $f(x, y) = 0$ est l'équation de la courbe après la transformation projective P.

II. *Sur l'application du théorème d'Abel à la Géométrie.* — M. Vessiot démontre, simplement et sans faire appel aux résultats du problème de l'inversion de Jacobi, les propositions suivantes :

Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique irréductible n'ayant que des points doubles à tangentes distinctes ou des rebroussements de première espèce; désignons par d le nombre total des points doubles et par

$$u_1(x, y), \quad \ldots, \quad u_p(x, y)$$

un système d'intégrales normales de première espèce attachées à la courbe.

Si deux systèmes de $nq - 2d = s$ points de la courbe (a_i, b_i), (a'_i, b'_i) sont liés par les relations

$$\sum_{k=1}^{s} u_h(a_k, b_k) = \sum_{k=1}^{s} u_h(a'_k, b'_k) \qquad (h = 1, \ldots, p),$$

où les périodes sous-entendues par les signes $=$ sont des périodes correspon-

dantes et si l'un des systèmes forme le système des points d'intersection (mobiles) d'une adjointe de degré q avec la courbe proposée, il en est de même de l'autre.

Parmi les points multiples, choisissons p' points doubles à tangentes distinctes et p'' points de rebroussement; soient

$$\varpi_i(x, y)\,(i = 1, \ldots, p'),\quad \zeta_j(x, y)\,(j = 1, \ldots, p'')$$

les intégrales normales de troisième ou de seconde espèce correspondantes; si deux systèmes de $nq - 2(d - p' - p'') = s$ points de la courbe (a_i, b_i), (a'_i, b'_i) sont liées par les $p + p' + p''$ relations

$$\sum_{k=1}^{s} u_h(a_k, b_k) \equiv \sum_{k=1}^{s} u_h(a'_k, b'_k) \qquad (h = 1, \ldots, p),$$

$$\sum_{k=1}^{s} \varpi_i(a_k, b_k) \equiv \sum_{k=1}^{s} \varpi_i(a'_k, b'_k) \qquad (i = 1, \ldots, p'),$$

$$\sum_{k=1}^{s} \zeta_j(a_k, b_k) \equiv \sum_{k=1}^{s} \zeta_j(a'_k, b'_k) \qquad (j = 1, \ldots, p'),$$

où les périodes sous-entendues par les signes $\equiv$ sont des périodes correspondantes (en tant que périodes cycliques) et si l'un des systèmes forme le système des points d'intersection (mobiles) de la courbe avec une courbe de degré q, passant par les points multiples qui n'ont pas été choisis, il en est de même de l'autre système.

III. *Remarque sur les transformations rationnelles des courbes algébriques.* — A la courbe algébrique de genre p

$$(C) \qquad f(x, y) = 0,$$

faisons correspondre par une transformation *simplement* rationnelle

$$\xi = M(x, y), \qquad \eta = N(x, y),$$

une courbe de genre inférieur ϖ,

$$(\gamma) \qquad \varphi(\xi, \eta) = 0;$$

soit q le nombre des points de la première qui correspondent à un point de la seconde. Il existe un système de $p - \varpi$ intégrales de première espèce de (C), $U_h(x, y)$, linéairement indépendantes, telles que les divers points de (C) qui correspondent à un même point de (γ) sont liés, quel que soit ce point, par les $p - \varpi$ relations

$$\sum_{k=1}^{q} U_h(x_k, y_k) = K_h \qquad (h = 1, \ldots, p - \varpi),$$

où les seconds membres sont des constantes.

Ces intégrales $U_h(x, y)$ se réduisent au genre $p - \varpi$; on peut leur associer, pour former un système complet d'intégrales de première espèce, ϖ intégrales se réduisant au genre ϖ.

Mathias (*E.*). — Sur l'étude calorimétrique complète des liquides saturés. (E. 1-52).

Rouquet (*V.*). — Sur un cas particulier du mouvement à cinq conditions. (F. 1-23).

Sous quelles conditions une ligne Σ, invariablement liée au trièdre fondamental d'une courbe (O) et entraînée dans le déplacement de ce trièdre quand le sommet décrit la courbe, est-elle constamment normale aux trajectoires de ses différents points?

M. Pirondini a montré (*Nouvelles Annales de Math.*, 3e série, t. IX) que les courbures de la courbe (O) sont liées par une relation linéaire (courbes de Bertrand) et que la ligne Σ est une droite qui dépend de deux paramètres. M. Rouquet reprend la question et, après avoir écarté les normales à (O) et les parallèles à la binormale situées dans le plan normal qui sont, pour toute courbe (O), des solutions du problème, il montre que les droites Σ forment une congruence linéaire.

Les surfaces réglées engendrées par ces droites sont applicables sur des surfaces réglées de Bertrand, c'est-à-dire peuvent être déformées avec conservation des génératrices de façon que ces génératrices soient les normales principales de deux de leurs trajectoires orthogonales.

Painlevé (*P.*). — Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre dont l'intégrale est de la forme

$$h(x)[y - g_1(x)]^{\lambda_1} \ldots [y - g_n(x)]^{\lambda_n} = C.$$

(G. 1-37).

M. Painlevé traite, dans ce travail, différents problèmes relatifs aux équations

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{P(y, x)}{R(y, x)} = \frac{a_p y^p + \ldots + a_0}{y^q + b_{q-1} y^{q-1} + \ldots + b_0},$$

où les a, b sont des fonctions analytiques quelconques de x, dont l'intégrale se laisse mettre sous la forme

$$(2) \qquad C = h(x)[y - g_1(x)]^{\lambda_1} \ldots [y - g_n(x)]^{\lambda_n} = F(y, x),$$

où les g et h sont certaines fonctions de x, les λ des constantes numériques et C la constante d'intégration; nous ne pouvons guère indiquer ici que les résultats essentiels obtenus, la méthode suivie ne pouvant se résumer en quelques lignes.

Premier problème. — Étant donnée une équation (1) : 1° reconnaître si son intégrale peut se mettre sous la forme (2) où l'entier n est donné et où les λ sont des constantes numériques inconnues, les (g_i, h) des fonctions inconnues

de x; 2° quand il en est ainsi, calculer les (g_i, h) en fonction des coefficients de (1).

Soit r le plus grand des nombres q et $p-2$; pour que l'intégrale de (1) puisse se mettre sous la forme (2), il faut et il suffit que l'équation au multiplicateur de Jacobi admette une solution de la forme

$$\frac{K(y, x)}{(y-g_1)\ldots(y-g_n)},$$

où K est un polynome en y de degré $n-r-1$ au plus et où les g_i sont des fonctions *distinctes*.

S'il existe une seule solution de cette forme, les g_i sont donnés algébriquement en fonction des coefficients de (1) et de leurs dérivées, ainsi que les rapports des constantes λ_i; h est donné ensuite par une quadrature logarithmique.

S'il existe plusieurs multiplicateurs de la forme précédente, l'intégrale $y(x)$ de (1) ne prend qu'un nombre fini ν de valeurs autour des points critiques mobiles; ce nombre est inférieur à $2n-r-1$. On sait alors ramener l'équation (1) à une équation de Riccati,

$$\frac{du}{dx} = \alpha u^2 + \beta u + \gamma$$

par une transformation

$$u = \frac{y^\nu + A_{\nu-1} y^{\nu-1} + \ldots + A_1 y}{B_{\nu-1} y^{\nu-1} + \ldots + B_1 y + 1},$$

les A, B s'exprimant rationnellement à l'aide des coefficients de (1) et de leurs dérivées. Les g_i sont donnés algébriquement et h par une quadrature, à moins que l'intégrale ne puisse se mettre sous une forme (2) où tous les exposants λ sont des entiers, positifs ou négatifs.

M. Painlevé complète ce théorème par quelques remarques relatives au cas où tous les λ sont distincts et au cas où n est égal à sa limite inférieure $r+1$ ou $r+2$.

Appelons fonction *quasi algébrique* des variables $x, y, \ldots, v$ toute fonction qui s'exprime algébriquement en $\rho_1^{\lambda_1}, \ldots, \rho_n^{\lambda_n}$, les ρ désignant des fonctions algébriques de $x, y, \ldots, v$ et les λ des constantes; l'auteur montre que *si les coefficients de l'équation* (1) *sont algébriques en x, on sait reconnaître, à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques, si son intégrale $y(x, C)$ est une fonction transcendante (non quasi algébrique) qui ne prend autour des points critiques mobiles qu'un nombre fini,* NON DONNÉ, *de valeurs.*

Considérons une équation (1) où P et Q sont des polynomes en x, y, tels que toutes les intersections des courbes

$$P = 0, \qquad Q = 0,$$

à distance finie ou infinie, soient *distinctes;* à chaque point d'intersection, M. Poincaré a fait correspondre un exposant facile à calculer, et par un tel point il ne passe que deux courbes intégrales, à moins que l'exposant ne soit une fraction positive, auquel cas le point est un *nœud algébrique. S'il n'existe pas de nœud algébrique, on sait reconnaître algébriquement si l'équation* (1) *se laisse mettre sous une forme* (2) *irréductible à la forme rationnelle* SANS QUE L'ENTIER n SOIT DONNÉ. Le même résultat s'étend au cas où P

et Q sont des fonctions algébriques quelconques, sous les mêmes hypothèses.
L'auteur étudie ensuite en détail l'application de ces résultats au cas $h = 1$.

Deuxième problème. — M. Painlevé traite ici diverses questions qui se ramènent à la suivante : *Déterminer toutes les équations*

(1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{r-1}(x)y^{r-1} + \ldots + a_0}{y^r + b_{r-1}(x)y^{r-1} + \ldots + b_0},$$

de degré r donné, dont l'intégrale générale est de la forme

(2) $$C = (y - g_1)^{\lambda_1} \ldots (y - g_n)^{\lambda_n},$$

avec les conditions

$$\Sigma\lambda_i = 1, \quad \Sigma\lambda_i g_i(x) = 0,$$

où l'entier n et les exposants λ sont donnés.

On montre qu'il existe pour $n \geqq r + 1$ une infinité d'équations irréductibles de degré r, dépendant de r fonctions et $(n - r - 1)$ constantes arbitraires, quels que soient les λ.

La forme (2) est irréductible, sauf pour des valeurs *exceptionnelles* des λ; elle l'est toujours si les λ sont distincts et si $r > 1$.

A tout système d'entiers positifs dont la somme est $n - r - 1$, tel que $l_1 - 1, \ldots, l_k - 1$ ($l_1 > 2$), correspondent une infinité d'équations (1) irréductibles et de degré r, dépendant de r fonctions et k constantes arbitraires, quels que soient les λ, pourvu que ces derniers ne satisfassent pas à certaines conditions algébriques (dépendant du système des l_i). Pour ces valeurs exceptionnelles des λ, il n'y a pas d'équation (1) correspondant au système des l_i. Pour les autres valeurs des λ la forme (2) est en général irréductible; elle l'est toujours si les λ sont distincts ($r > 1$).

En épuisant tous les systèmes d'entiers l_i, on obtient toutes les équations (1) *dont l'intégrale générale se met sous la forme* (2).

Troisième problème. — M. Painlevé se propose de résoudre une question analogue à la précédente en supposant que les coefficients de (1) appartiennent à une classe donnée de fonctions, par exemple à la classe des fonctions algébriques de x. Il s'agit de *former toutes les équations* (1)

(1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{r+2}y^{r+2} + \ldots + a_0}{y^r + b_{r-1}y^{r-1} + \ldots + b_0},$$

de degré donné et *à coefficients algébriques en x,* qui admettent l'intégrale première irréductible

(2) $$h(x)[y - g_1(x)]^{\lambda_1} \ldots [y - g_n(x)]^{\lambda_n} = \text{const.},$$

où l'entier n et les exposants λ sont donnés.

Si l'un au moins des rapports $\frac{\lambda_k}{\lambda_l}$ n'est pas réel et commensurable, la forme (2) irréductible ne peut être réduite à une forme rationnelle; les g s'expriment algébriquement avec les coefficients de (1), c'est-à-dire sont algébriques; h est de la forme $e^{\int H(x)dx}$, où H est algébrique en x. Ces remarques permettent à M. Painlevé de traiter la question de façon complète.

Si tous les rapports $\frac{\lambda_k}{\lambda_l}$ sont réels et commensurables, on peut supposer les λ entiers et premiers entre eux ; si N est le plus grand des entiers qui expriment les degrés du numérateur et du dénominateur du premier membre de (2) par rapport à y, la fonction $y(x, C)$ prendra exactement N valeurs autour des points critiques mobiles. M. Painlevé examine en détail les diverses circonstances que l'on rencontre suivant le nombre des *valeurs remarquables* de la constante C, et fixe dans chaque cas les arbitraires qui figurent dans (1).

Signalons encore les conséquences suivantes : *Il existe une infinité d'équations* (1) *de degré r en y, algébriques en x, dont l'intégrale $y(x, C)$ prend exactement ν valeurs autour des points critiques mobiles, mais dès que ν dépasse $r+1$, l'intégrale est une fonction algébrique de x et $e^{\int H(x)dx}$, où* $H(x)$ *est algébrique en x.*

Il existe une infinité d'équations (1) *de degré r en y, algébriques en x, dont l'intégrale se met sous la forme irréductible* (2), *où les λ sont des entiers positifs ou négatifs, mais dès que n dépasse $r+2$ l'intégrale $y(x, C)$ est nécessairement algébrique.*

Bouty (*E.*). — Les flammes sensibles et les lentilles acoustiques. (H. 1-18).

Cosserat (*E.* et *F.*). — Sur la théorie de l'élasticité. Premier Mémoire. (I. 1-116).

Extraits de l'Introduction : On sait quel puissant instrument de découverte a été le *trièdre de référence mobile* dans la théorie des surfaces, entre les mains de Ribaucour et de M. Darboux, et l'on peut voir par les *Leçons de Cinématique* de M. Kœnigs que son introduction dans la Mécanique des solides invariables n'est pas moins heureuse. Nous nous sommes proposé d'étendre l'emploi de ce trièdre à l'étude des *corps déformables*, et nous avons été ainsi conduits, dans plusieurs questions importantes, à des résultats qui nous paraissent nouveaux.

Nous avons dû reprendre l'examen des équations ordinaires de la théorie de l'Élasticité, et nous avons été amenés à remonter aux équations plus générales qui sont dues principalement à Lord Kelvin. Nous avons pu rattacher cette généralisation à la notion du ds^2 de l'espace, et l'on verra par là combien devient utile le trièdre de référence mobile.

On ne trouvera pas dans ce premier Mémoire les résultats nouveaux que nous annonçons plus haut, et l'on nous pardonnera d'avoir fait d'abord une exposition dont certaines parties sont bien connues; mais nous avons cru qu'il n'était pas sans intérêt de présenter, sous l'aspect que leur donne la notion précédente, les principes de la théorie de l'Élasticité.

Notre travail est divisé en quatre Chapitres :

I. Déformation d'un milieu continu. — De la déformation en général. — De la déformation infiniment petite.

II. De l'effort à l'intérieur d'un milieu continu.

III. L'énergie de déformation et les équations d'équilibre des corps élastiques.

IV. Les équations de la théorie de l'élasticité en coordonnées curvilignes.

Tome XI; 1897.

Stieltjes (*T. J.*). — Sur le caractère quadratique du nombre 2. (A. 5-8).

Traduction d'un travail antérieur (*Nieuw Archief voor Wiskunde*, t. IX, p. 193-195; 1882) consacré à établir, par une méthode nouvelle, le caractère quadratique de 2.

Gilbault (*H.*). — Recherches sur la compressibilité des dissolutions. (B. 1-63).

Stieltjes (*T. J.*). — Contribution à la théorie des résidus cubiques et biquadratiques. (C. 1-65).

Extrait des *Archives néerlandaises*, t. XVIII, 1883.

La loi de réciprocité, dans la théorie des résidus quadratiques, est relative au rapport réciproque de deux nombres premiers *impairs*, et dans une théorie complète le caractère quadratique du nombre 2 doit être traité séparément. Un fait analogue se présente dans la théorie des résidus biquadratiques, où la loi de réciprocité est relative à deux nombres premiers non divisibles par $1+i$; le caractère de ce nombre premier $1+i$ doit être déterminé séparément. Enfin dans la théorie des résidus cubiques le nombre $1-\rho$, où ρ est une racine cubique complexe de l'unité, joue également un rôle spécial.

Les caractères de $1+i$ et de $1-\rho$ ont été déterminés par Eisenstein en faisant usage de la loi générale de réciprocité et, d'après Stieltjes, la marche suivie par Gauss (*Theoria residuorum biquadraticum*) pour déterminer le caractère biquadratique du nombre $1+i$ est la seule qui puisse être dite *purement arithmétique* et complètement indépendante de la loi générale de réciprocité.

Stieltjes se propose de déterminer directement, par une méthode *uniforme*, les caractères relatifs aux nombres premiers 2, $1+i$, $1-\rho$.

Le principe de cette méthode consiste à remplacer le nombre premier dont il s'agit de déterminer le caractère par un produit congruent de facteurs. On détermine le caractère de ces facteurs par des considérations tout à fait analogues à celles dont Gauss s'est servi dans les art. 15-20 de son premier Mémoire sur la théorie des résidus biquadratiques (*Werke*, t. II, p. 78-87). Stieltjes a reconnu que les raisonnements de Gauss, faits sur des nombres réels, se laissent reproduire presque sans changement dans la théorie des nombres complexes.

Le caractère de $1+i$, par rapport à un nombre premier de la forme $a+bi$ ($b \neq 0$) étant déterminé, une méthode analogue peut être employée quand le module est un nombre premier de la forme $4n+3$.

Stieltjes démontre ensuite, à l'aide des résultats obtenus, les théorèmes, trouvés par induction, que Gauss a énoncés dans l'art. 28 de la *Theoria residuorum biquadraticum, commentatio secunda*. Une partie seulement de ces théorèmes a été démontrée par Lebesgue (*Journal de Liouville*, t. VI, p. 51). La démonstration de Stieltjes est entièrement fondée sur la théorie des nombres

complexes, qui joue ici un rôle purement auxiliaire, les théorèmes ayant seulement rapport aux nombres réels.

Stieltjes (*T. J.*). — Sur la décomposition en carrés des nombres premiers de la forme $3n+1$. (D. 1-6).

Traduction d'un travail antérieur (*Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam,* 2ᵉ série, t. XIX, p. 105-111; 1884).

Tout nombre premier p de la forme $3n+1$ peut s'écrire sous la forme

$$p = c^2 + 3d^2.$$

Le quadruple d'un tel nombre peut, de plus, être représenté sous la forme

$$4p = A^2 + 27B^2.$$

Dans le Mémoire : *De residuis cubicis commentatio numerosa* (Crelle, t. 2) Jacobi a indiqué sans démonstration que la valeur de A est égale au reste qu'on obtient en divisant le nombre entier

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2\ldots n}$$

par p et choisissant le reste compris entre $-\frac{p}{2}$ et $+\frac{p}{2}$. En outre, $A+1$ est toujours divisible par 3.

La démonstration de cette proposition peut être trouvée dans le *Mémoire sur la théorie des nombres* de Cauchy (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* t. XVII, 1840) et chez Lebesgue (*Journal de Liouville,* t. II, p. 279), ou encore chez Stieltjes dans le Mémoire analysé précédemment. Stieltjes se propose de déterminer directement c, qui est le reste, compris entre $-\frac{p}{2}$ et $+\frac{p}{2}$, de la division du nombre entier

$$2^{n-1}\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2\ldots n}$$

par p; en outre $c-1$ est divisible par 3.

Leau (*L.*). — Étude sur les équations fonctionnelles à une et à plusieurs variables. (E. 1-110).

Les équations fonctionnelles considérées dans ce travail sont des relations d'égalité entre les variables indépendantes, certaines fonctions inconnues de ces variables et les valeurs qu'elles acquièrent lorsqu'on effectue sur les variables qu'elles contiennent certaines transformations ponctuelles. M. Leau s'est proposé d'établir l'existence des solutions dans des conditions aussi générales que possible et de faire ensuite quelques applications simples des théorèmes généraux obtenus.

La méthode employée est celle des fonctions majorantes, qui sert dans les

questions analogues relatives aux équations aux dérivées partielles. Voici le théorème fondamental obtenu :

Soient les transformations en nombre p

$$x_i^{(j)} = \varphi_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n;\; j = 1, \ldots, p),$$

où les φ_{ij} sont des fonctions données, holomorphes, des variables $x_1, \ldots, x_n$ au point $(a_1, \ldots, a_n)$, qui se réduisent respectivement à $a_1, \ldots, a_n$ en ce point : désignons, d'une manière générale, par $z^{(j)}$ le résultat de la substitution, dans une fonction z, des fonctions $x_i^{(j)}$ aux variables x_i correspondantes.

Considérons alors un système de m équations

$$u_i = \mathrm{F}_i(x_1, \ldots, x_n, u_1^{(1)}, \ldots, u_m^{(1)}; \ldots; u_1^{(p)}, \ldots, u_m^{(p)}) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

où les u sont des fonctions inconnues de $x_1, \ldots, x_n$; les F des fonctions données, holomorphes, au voisinage du point

$$x_i = a_i, \qquad u_l^{(j)} = b_l \qquad (l = 1, \ldots, m)$$

pour lequel on a les identités

$$b_i = \mathrm{F}_i(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m; \ldots; b_1, \ldots, b_m);$$

on peut chercher à calculer par différentiation les dérivées des fonctions inconnues $u_1, \ldots, u_m$ au point $a_1, \ldots, a_n$. Soit D_α le déterminant formé par les coefficients des dérivées d'ordre α; si l'on a pris pour les dérivées des u, jusqu'à un certain ordre n, un système de valeurs vérifiant les équations dérivées, et si D_α est différent de zéro pour toutes les valeurs de α supérieures à n, il existe au point $a_1, \ldots, a_n$ une solution holomorphe, et une seule, formée de fonctions u_i qui se réduisent, en ce point, aux quantités b_i et dont les dérivées prennent, en ce point, les valeurs assignées, pourvu que l'on ait

$$\left|\frac{\partial \varphi_{sj}}{\partial x_k}\right|_{x_i = a_i} < \frac{1}{n}$$

pour toutes les valeurs de s, j, k, ou bien

$$\left|\frac{\partial \varphi_{sj}}{\partial x_s}\right|_{x_i = a_i} < 1$$

avec

$$\left|\frac{\partial \varphi_{sj}}{\partial x_k}\right|_{x_i = a_i} = 0 \qquad (k \neq s).$$

M. Leau démontre ensuite ce théorème par la méthode des approximations successives de M. Picard.

Les conditions imposées aux fonctions de substitution ne permettent pas de supposer que l'une quelconque de leurs dérivées devienne égale à 1 au point $a_1, \ldots, a_n$; l'auteur traite par la méthode des approximations successives quelques équations simples à une variable en faisant cette hypothèse particulière.

Les Applications débutent par une étude de l'équation d'Abel

$$f[\varphi(z)] = f(z) + 1,$$

dans le cas où le module de $\varphi'(z)$, au point racine de l'équation

$$\varphi(z) = z,$$

dans le voisinage duquel on étudie les solutions, est égal à l'unité. Les résultats obtenus sont utilisés pour résoudre le problème de l'itération dans les mêmes cas exceptionnels.

M. Leau aborde ensuite l'examen de l'équation de Schröder généralisée

$$B(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = k B(x_1, \ldots, x_n),$$

où les φ sont des fonctions holomorphes données des x, qui s'annulent à l'origine, où k désigne une constante et B la fonction inconnue. Soit Δ_α le déterminant des coefficients des dérivées d'ordre α de B dans les équations dérivées d'ordre α; si l'on cherche une fonction B holomorphe à l'origine et dont toutes les dérivées ne s'annulent pas en ce point, il faut que l'on ait $\Delta_1 = 0$. Le premier membre de cette équation renferme k, et si l'on y remplace k par s, on obtient une équation

$$\Delta_1(s) = 0,$$

dite équation *caractéristique* pour le système de fonctions φ.

Si les racines de cette équation sont différentes de zéro et ne vérifient aucune relation

$$s_i = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \ldots s_n^{\alpha_n}$$

où les α sont des entiers positifs ou nuls, et si, de plus, les modules de $s_1, \ldots, s_n$ sont inférieurs à 1, l'équation de M. Schröder admet n solutions holomorphes distinctes $B_1, \ldots, B_n$ dont les dérivées ne sont pas toutes nulles à l'origine.

S'il existe des relations de la forme signalée plus haut entre les racines de l'équation caractéristique, on peut classer ces racines en *espèces* telles qu'une racine ne puisse s'exprimer qu'au moyen des espèces précédentes. A une racine k de première espèce et d'ordre de multiplicité r correspondent r fonctions holomorphes f_h, desquelles on peut déduire r fonctions B satisfaisant à l'équation de M. Schröder; on a en particulier

$$B_m = f_m + f_{m-1} g_{m,1} + \ldots + f_1 g_{m,m-1}$$

où $g_{m,i}$ est un polynome de degré i au plus, formé avec une solution b de l'équation

$$b(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 1 + b(x_1, \ldots, x_n),$$

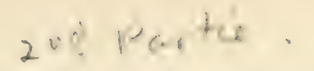
par exemple

$$b = \frac{\log f_1}{\log k}.$$

M. Leau montre sur des exemples comment ces résultats doivent être modifiés pour les racines d'espèce supérieure.

Les cas où les modules de certaines racines sont égaux ou inférieurs à l'unité échappent à l'analyse employée.

L'auteur termine son intéressant travail en étudiant les rapports qui existent



entre l'équation de M. Schröder généralisée et certaines équations aux dérivées partielles du premier ordre : les équations linéaires qui admettent la substitution

$$x_i^{(1)} = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n),$$

rapports déjà signalés par M. Appell pour le cas d'une seule variable (*Acta mathematica*, t. XV).

Bouasse (*H.*). — Sur les oscillations à peu près sinusoïdales à longue période. Application à l'étude de la résistance de l'air et des propriétés élastiques des fils fins. (F. 1-76).

Klein (*F.*). — Sur la Géométrie dite *non euclidienne*. (G. 1-62).

Traduction par M. Laugel d'un travail paru dans les *Mathematische Annalen*, t. IV, p. 573-625. Une partie de ce travail est la reproduction littérale d'une Notice parue sous le même titre (*Göttinger Nachrichten*; 1871) et traduite par Hoüel dans ce Bulletin (1re série, t. II, p. 341-351; 1871).

Nous renverrons le lecteur à l'analyse du travail de M. Klein, publiée dans le *Bulletin*.

Bianchi (*L.*). — Sur deux classes de surfaces qui engendrent par un mouvement hélicoïdal une famille de Lamé. (H. 1-8).

L'auteur rappelle l'attention sur deux classes de systèmes triples orthogonaux, dans lesquels les surfaces de l'une des familles sont congruentes, qu'il a signalés dans des Mémoires antérieurs (*Annali di Matematica*, 2e Série, t. XIII, 1884, et XIX, 1890).

Dans le premier Mémoire, il a établi l'existence de familles de Lamé, dépendant de deux fonctions arbitraires, formées d'hélicoïdes qui ont même axe et même pas. Le mouvement hélicoïdal qui fait glisser les hélicoïdes sur eux-mêmes échange entre elles les surfaces de chacune des deux autres familles, qui sont donc formées de surfaces congruentes. La détermination de ces systèmes dépend d'une équation aux dérivées partielles du second ordre dont M. Bianchi donne des intégrales particulières remarquables.

La deuxième classe de systèmes triples signalée par l'auteur s'obtient de la manière suivante : soit Σ un hélicoïde quelconque, C une de ses lignes de courbure; sur le plan normal en un point P de C à l'hélice qui passe en ce point traçons une courbe arbitraire Γ qui coupe orthogonalement Σ en P. Traçons aussi tous les plans ϖ normaux en chaque point de C à l'hélice correspondante. Il existe une surface S, et une seule, qui contient C et Γ comme lignes de courbure et dont les lignes de courbure d'un système sont situées dans le plan ϖ; elle se détermine par quadratures.

Si l'on donne à S le mouvement hélicoïdal qui fait glisser Σ sur elle-même, elle engendre une famille de Lamé.

Un cas particulier conduit M. Bianchi à des surfaces Σ ayant toutes la même courbure totale constante $\left(-\frac{1}{C^2}\right)$. Les *complémentaires* de ces hélicoïdes Σ sont encore toutes congruentes entre elles à l'égard du déplacement hélicoïdal; leurs

équations en termes finis s'obtiennent au moyen des fonctions elliptiques. Ce ne sont ni des hélicoïdes, ni des surfaces à lignes de courbure planes.

Dans une Addition importante M. Bianchi établit l'existence de familles de Lamé dont tous les individus se déduisent de l'un d'eux par les transformations *conformes* d'un groupe G_1 à un paramètre : soit S une surface dont toutes les lignes de courbure d'un système coupent à angle droit toutes les trajectoires du groupe de transformations conformes G_1, issues de leurs points; si l'on transforme cette surface S par le groupe G_1, on obtient une famille de Lamé.

En particulier on peut ainsi former des familles de Lamé, dépendant de deux fonctions arbitraires, avec des surfaces spirales de M. M. Lévy ayant même axe et même paramètre.

J. D.

VERHANDELINGEN DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM. EERSTE SECTIE. In-4° (1).

Tome V; 1897.

Schoute (P.-H.). — Le prisme quadridimensional. (n° 2, 20 p., 1 pl.).

Démonstration, d'abord à l'aide de l'hypergéométrie et ensuite d'une manière indépendante de la quatrième dimension, d'un certain théorème se rapportant à la section moyenne du prismoïde, corps polyfacial limité par des parallélogrammes et des triangles. La formule pour le volume du prismoïde tridimensional est encore de rigueur pour le volume du prismoïde quadridimensional. Simplification des formules de Cotes. Remarques.

Wind (C.-H.). — Étude sur la théorie des phénomènes magnéto-optiques en rapport avec l'effet de Hall. (n° 3, 91 p.).

L'auteur, en se basant sur les équations ordinaires de Maxwell et sur un rapport particulier entre le courant et la force électriques dans les points d'un champ magnétique, expose une théorie qui explique les phénomènes connus comme effet de Hall, rotation magnétique du plan de polarisation indiquée par Faraday et phénomène de Kerr, et donne lieu à plusieurs résultats encore à vérifier par l'expérimentation. Cette théorie, intimement liée à celle de H.-A. Lorentz, a été confirmée par de nouveaux résultats obtenus par P. Zeeman.

Siertsema (L.-H.). — Sur l'impossibilité de substances diama-

(1) Voir *Bulletin*, XXII_2, p. 108. Le Tome IV des *Verhandelingen*, qui n'a pas encore paru, sera analysé prochainement.

gnétiques d'après Duhem et quelques propriétés de minimum dans le champ magnétique. (n° 4, 29 p.).

D'après M. Duhem l'existence de matières à coefficient de magnétisation négatif est en contradiction avec les lois de la théorie mécanique de la chaleur. Au contraire, l'auteur fait voir que la contradiction disparaît, si l'on adopte la théorie de Maxwell au lieu de celle de Poisson. Ensuite il s'occupe de propriétés de minimum.

Korteweg (*D.-J.*). — Sur certaines vibrations d'ordre supérieur et d'intensité anormale (vibrations de relation) dans les mécanismes à plusieurs degrés de liberté. (n° 8, 32 p., 1 pl.).

Les vibrations dont x, y, z, ... sont les coordonnées principales et n_x, n_y, n_z, ... les nombres d'oscillations correspondants, peuvent s'exprimer par des séries en général rapidement convergentes. Mais dans le cas d'une relation linéaire

$$p_1 n_x - q_1 n_y - r_1 n_z + \ldots + \rho = 0,$$

où p_1, q_1, r_1, ... sont des nombres entiers positifs ou négatifs, et ρ est relativement petit en rapport à n_x, n_y, n_z, certains termes obtiennent des valeurs anormales et les vibrations correspondantes d'un ordre supérieur sont d'une intensité qui peut devenir égale à celle des vibrations principales, si la somme

$$S = [p_1] + [q_1] + [r_1] + \ldots$$

des valeurs absolues des coefficients p_1, q_1, r_1, ... est relativement petite.

L'auteur complète ce théorème de M. E.-J. Routh (*Treatise on the stability of a given state of motion, particularly steady motion*, 1877) en démontrant que l'influence des vibrations de relation les plus fortes sera toujours faible pour $S > 4$, tandis que les cas $S = 2, 3, 4$ sont caractérisés à ce sujet par des particularités qui leur sont propres. Il étudie ces cas $S = 2, 3, 4$, en s'occupant principalement des vibrations de relation qui se présentent pour $\rho = 0$.

Sommaire : 1. Introduction. 2. Conditions d'existence et définition des vibrations de relation. 3. Grandeur de l'accroissement de l'intensité de ces vibrations. 4. Leur signification dans la mécanique et dans les théories du son et de la lumière. 5. Considérations de Routh. Distinction précise entre les deux cas où la somme S surpasse ou ne surpasse pas quatre. 6. Les trois espèces de vibrations de relation. 7. Vibrations de relation d'ordre supérieur. 8. Le cas $S > 4$. Phénomène dans le spectre. 9. Le cas $S = 4$. 10. Le cas $S = 3$. Vibrations de pseudo-somme ($n_x + n_y - n_z = \rho$) et de pseudo-octave ($2n_x - n_y = \rho$). 11. Le cas $S = 2$. Vibrations pseudo-égales ($n_x - n_y = \rho$). 12. Vibrations de relation pure ($\rho = 0$). 13. Mécanismes d'exception. 14. Mécanismes symétriques. 15. Le pendule sphérique.

Tome VI; 1899.

Gravelaar (N.-L. W.-A.). — Les œuvres de John Napier. (n° 6, 159 p., avec fac-similé et 3 pl.).

Analyse détaillée des œuvres de Napier, en particulier de celles qui se rapportent à l'histoire de la découverte des logarithmes et à la logarithmotechnie du XVIIe siècle, se basant sur un examen minutieux d'un grand nombre de sources.

Bes (K.). — Théorie générale de l'élimination d'après la méthode de Bézout, suivant un nouveau procédé (en français). (n° 7, 121 p.).

Pour déterminer le résultat des trois équations homogènes $\varphi = 0$, $\varphi = 0$, $\chi = 0$ des degrés l, m, n dans les trois variables x, y, z, Bézout s'est servi de la fonction $F = \Phi\varphi + \Psi\psi + X\chi$, où Φ, Ψ, X sont des fonctions homogènes des degrés $k - l$, $k - m$, $k - n$ à coefficients indéterminés. Ici M. Bes fait connaître non seulement le résultant des équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$, mais aussi leurs solutions quel qu'en soit le nombre, à l'aide d'une certaine matrice qu'il appelle l'*assemblant* de F.

1. Théorie des assemblants appliquée à un système d'équations linéaires homogènes. 2. Deux équations homogènes à deux variables. 3. Trois équations homogènes à trois variables. 4. Système de n équations homogènes à n variables.

En trois notes additionnelles l'auteur démontre trois théorèmes dont il s'est servi en passant.

Tome VII; 1900.

Van Oss (S.-L.). — Das regelmässige Sechshundertzell und seine selbstdeckenden Bewegungen. (n° 1, 18 p., 9 pl.).

Ce mémoire sur les mouvements anallagmatiques de la figure régulière de l'espace quadridimensional E_4 limitée par 600 tétraèdres fait suite de la thèse de l'auteur défendue à Giessen (Allemagne) *Die Bewegungsgruppen der regelmässigen Gebilde von vier Dimensionen* (Les groupes de mouvements des figures régulières à quatre dimensions), Utrecht, P. den Boer. Dans cette thèse l'auteur s'est occupé principalement des figures régulières limitées respectivement par 5 on 16 tétraèdres, 8 hexaèdres ou 24 octaèdres; ici il étudie en premier lieu la figure limitée par 600 tétraèdres et son groupe de 7200 rotations, tandis qu'à la fin il voue deux planches à la figure polaire réciproque

par rapport à une hypersphère concentrique, limitée par 120 dodécaèdres.

Chemin faisant M. van Oss trouve que les 120 sommets de la figure principale pris cinq fois forment les sommets de 25 figures limitées par 24 octaèdres, résultat qui peut être comparé au théorème connu que les milieux des arêtes d'un dodécaèdre ou d'un icosaèdre forment les sommets de 5 octaèdres.

Stott (Mme A. Boole). — On certain Series of Sections of the Regular Four-dimensional Hypersolids. (n° 3, 21 p., 5 pl.).

Si l'on se propose que notre espace E_3 fasse partie d'un E_4 et que dans cet E_4 des figures régulières limitées respectivement par 5, 16 ou 600 tétraèdres, 8 hexaèdres, 24 octaèdres ou 120 dodécaèdres se meuvent parallèlement à elles-mêmes à travers notre E_3, on peut considérer à chaque moment l'intersection tridimensionale de notre E_3 avec ces figures quadridimensionnales en mouvement. Cette forme dépend, il va sans dire, de la position de ces figures par rapport à notre E_3. Si l'on se borne à des intersections d'un caractère régulier, il y a en général quatre séries de positions parallèles à distinguer, ces figures régulières admettant quatre espèces d'axes, les axes a_1 joignant deux sommets opposés, les axes a_2 joignant les milieux de deux arêtes opposées, les axes a_3 joignant les centres de deux faces opposées et les axes a_4 joignant les centres de deux corps limitants opposés. Ainsi l'étude de ces sections régulières aurait à s'occuper de vingt-quatre séries de sections parallèles, parce qu'il y a six figures régulières; seulement le pentaèdroïde fait exception à la loi générale, parce qu'il ne possède que deux espèces d'axes. Donc le nombre des séries de sections parallèles est vingt-deux.

La fille distinguée du mathématicien anglais éminent a fait une étude profonde de ces vingt-deux séries de sections; elle les a réalisées bidimensionalement par le dessin et tridimensionalement par de petits modèles en carton.

Dans ce mémoire, l'auteur a expliqué comment se détermine la forme des sections. Cet exposé est illustré par une série de figures, en partie des projections, en partie des diagrammes d'après lesquels on peut former les modèles en carton.

L'étude de Mme Stott est en relation intime avec trois mémoires de M. Schoute (voir *Bulletin*, XXII_2, pp. 89, 91, 116); seulement elle est plus générale en ce qu'elle ne se borne pas à des sections centrales.

Schoute (P.-H.). — Les hyperquadriques dans l'espace à quatre dimensions. Étude de Géométrie énumérative. (n° 4, 66 p.).

Dans un travail paru en 1894 dans le t. XLV des *Mathematische Annalen*, le géomètre éminent de Hambourg, M. H. Schubert, a développé dans toute généralité les formules qui font connaître en un espace E_n à n dimensions les nombres des espaces courbes du second ordre à p dimensions satisfaisant à $n(p-2)-\frac{1}{2}p(p-1)$ conditions simples; donc la Géométrie énumérative des êtres du second ordre en E_n est depuis quelques années une théorie achevée.

Néanmoins, M. Schoute a déduit dans ce mémoire-ci, d'une manière directe, les nombres en rapport avec les hyperquadriques en E_n, cette déduction ayant des avantages sur celle basée sur les considérations beaucoup plus difficiles du cas général d'un n quelconque, si l'on désire se borner au cas $n=4$. Les instruments dont il se sert se réduisent à deux principes fondamentaux, le prin-

cipe de correspondance de Chasles dans sa forme la plus simple et le principe de la conservation du nombre.

La rédaction de ce travail a servi à l'auteur comme sujet d'étude de la Géométrie énumérative; il le publie dans l'espoir d'éveiller l'envie de se familiariser avec les belles recherches de M. Schubert qui n'ont pas attiré encore l'attention qu'elles méritent.

ARCHIVES NÉERLANDAISES DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES, publiées par la Société hollandaise des Sciences à Harlem et rédigées par M. J. Bosscha (1), 2e série.

Tome I; 1898.

Kuenen (*J.-P.*). — Sur la condensation et les phénomènes critiques des mélanges d'éthane et de protoxyde d'azote. (22-43).

Zeeman (*P.*). — De l'influence d'un champ magnétique sur la lumière émise par un corps. (44-54, 217-220).

Van der Waals (*J.-D.*). — De l'équilibre d'un corps solide complexe en présence de gaz et de liquide. (78-88) (2).

Wind (*C.-H.*). — Étude théorique des phénomènes magnéto-optiques et du phénomène de Hall. (119-216) (3).

Korteweg (*D.-J.*) — Sur certaines vibrations d'ordre supérieur et d'intensité anormale, — vibrations de relation, — dans les mécanismes à plusieurs degrés de liberté. (229-260, 1 pl.) (4).

Kuenen (*J.-P.*). — Sur la condensation d'un mélange de deux gaz. (331-341).

Kuenen (*J.-P.*). — De l'influence de la pesanteur sur les phé-

---

(1) Voir *Bulletin*, XXII_2, p. 115.
(2) Voir *Bulletin*, XXII_2, p. 107.
(3) Voir plus haut, p. 238.
(4) Voir plus haut, p. 239.

nomènes critiques des substances simples et des mélanges. (342-353).

Schreinemakers (*F.-A.-H.*). — De l'équilibre dans les systèmes de trois constituants avec deux phases liquides possibles. I. Partie théorique. (411-454).

Tome II; 1899.

Lorentz (*H.-A.*). — Sur la polarisation partielle de la lumière émise par une source lumineuse dans un champ magnétique. (7-20) (1).

Schreinemakers (*F.-A.-H.*). — De l'équilibre, etc. II. Exemples expérimentaux. (21-67). III. Deux phases solides. (144-173).

Van der Waals (*J.-D.*). — Sur la représentation graphique des équilibres à l'aide de la fonction ξ. (68-78) (2).

Van der Waals (*J.-D.*). — Une règle approchée relative à la forme de la courbe de plissement d'un mélange. (79-102) (3).

Einthoven (*W.*). — Explication physiologique simple de diverses illusions optiques. (103-143).

Lorentz (*H.-A.*). — De l'influence des corps étrangers sur la température de transformation. (174-179).

Siertsema (*L.-H.*). — Mesures de la polarisation rotatoire, etc. (291-380, 3 pl.).

Lorentz (*H.-A.*). — Sur les vibrations de systèmes portant des charges électriques et placés dans un champ magnétique. (412-434).

---

(1) Voir *Bulletin*, XXIV_2, p. 150.
(2) Voir *Bulletin*, XXIV_2, p. 151.
(3) Voir *Bulletin*, XXIV_2, p. 152.

HANDELINGEN van het Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres. 7e Congrès, 1899; Harlem (1).

Schoute (*P.-H.*). — Une transformation cubique dans l'espace. (258-268) (2).

De Vries (*J.*). — Quelques propriétés des cubiques planes rationnelles. (268-270).

Ici la cubique plane rationnelle la plus générale est engendrée par les faisceaux de droites

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0, \qquad P\lambda + Q = 0,$$

où A, B, C, P, Q représentent des fonctions linéaires des coordonnées x, y.

Koopmans (*G.-C.-A.*). — Sur le manque de rigueur de plusieurs définitions et méthodes des mathématiques élémentaires. (270-276).

Vaes (*F.-J.*). — Corps déduits des corps réguliers. (276-287).

Les sommets d'un dodécaèdre et d'un icosaèdre concentriques, dont les arêtes se bissectent orthogonalement les unes les autres, forment ensemble les 32 sommets d'un corps semi-régulier limité par 30 losanges; on peut dire que ce polyèdre nouveau enveloppe les deux autres. De la même manière, on peut envelopper ce polyèdre à trente faces par un polyèdre régulier limité par 60 deltoides, etc.

Janssen van Raay (*W.-H.-L.*). — Définitions géométriques de quelques fonctions elliptiques. (287-300).

L'auteur se propose de déduire par la géométrie les propriétés générales des fonctions elliptiques de Jacobi. Son point de départ forme l'ellipse biquadratique de Halphen, sa méthode diffère de celle de Halphen en ce qu'elle se rattache plus étroitement à la goniométrie.

---

(1) Voir *Bulletin*, XXII_1, p. 116.
(2) Voir *Bulltin*. XXIV_2, p. 196.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXIV.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXIV; 1900. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

246

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXIV.

28260 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.